Решения задач из прошлых выпусков

В скобках после условия задачи указан её автор, а после решения — автор решения.

2.8. Условие. Выяснить, сходится ли равномерно на отрезке $[0, 1]$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$$

(*А. Д. Соловьёв*)

Решение. Покажем, что ответ положительный.

Ясно, что указанный ряд сходится при $x = 1$ и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ мажорируется рядом $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, который равномерно сходится на отрезке $[0, 1-\varepsilon]$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда x лежит в произвольно малой окрестности единицы.

Нам надо показать, что при достаточно больших K величина

$$\sup_x \sum_{n=K}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$$

становится сколь угодно малой.

Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим суммы

$$\sum_{n\geqslant K:\, x^n>\delta} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}.$$

Они мажорируются суммами сходящегося ряда

$$\sum_{n=K}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)^n}$$

и потому равномерно малы.

Для решения задачи достаточно доказать, что при всех достаточно больших K величина

$$\sup_x \sum_{\substack{n\geqslant K\\ x^n<\delta}} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$$

становится сколь угодно малой. Положим $M = -1/\ln x$. Условие $x^n < \delta$ означает, что $n > -M \ln \delta$.

Найдём такое $n_1 = n(x)$, что $x^{n(x)} \approx 1/n(x)$. А именно, положим

$$n_1 = [M(\ln M + \ln\ln M)].$$

Тогда

$$n_1\Big(x^{n_1} - \frac{1}{n_1}\Big) \to 0 \quad \text{при } M \to \infty \text{ (т. е. при } x \to 1).$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{n \geqslant n(x)} \frac{x^n}{(1+x^n)^n} < \frac{1}{M \ln M} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{M \ln M(1-\exp(-1/M))} < \frac{2}{\ln M}.$$

Последнее неравенство выполнено при всех достаточно больших M, поскольку $1 - \exp(-1/M) \approx 1/M$, когда $1/M$ близко к 0. Поэтому ряд

$$\sum_{n \geqslant n(x)} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$$

равномерно сходится на интервале $x \in (0,1)$. Суммируя вышесказанное, имеем, что при рассмотрении частных сумм можно ограничиться индексами $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющими неравенствам $M|\ln\delta| < n < M(\ln M + \ln\ln M)$.

Разобьём отрезок натурального ряда, содержащийся в

$$(M|\ln\delta|,\ M(\ln M + \ln\ln M))$$

на такие участки, чтобы для всех $n \in [\lambda - 1, \lambda]$ выполнялись условия:

$$x^n \in \Big[\frac{\lambda-1}{n_1}, \frac{\lambda}{n_1}\Big].$$

А именно, пусть λ-й участок начинается с

$$n_\lambda = n_\lambda(x) = \Big[n_1 + \frac{\ln\lambda}{\ln x}\Big] = [n_1 - M\ln\lambda].$$

При этом $\lambda \in [1, \delta \cdot n_1]$.

Количество членов ряда, отвечающих λ-му участку, равно

$$n_\lambda - n_{\lambda-1} = M \ln\Big(1 + \frac{1}{\lambda}\Big) \approx \frac{M}{\lambda}.$$

Кроме того, поскольку $x^{n_\lambda} \sim \dfrac{\lambda}{M\ln M}$, то

$$\frac{x^{n_\lambda}}{(1+x^{n_\lambda})^{n_\lambda}} \sim \frac{\lambda}{M \ln M} \cdot \exp\Big(-\lambda\Big(1 - \frac{\ln\lambda}{\ln M + \ln\ln M}\Big)\theta\Big),$$

где θ — величина, близкая к единице при малых λ/n, она всегда близка к единице при малых δ.

Поэтому вклад участка с номером λ в общую сумму можно оценить величиной

$$O(1)\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\lambda\Big(1-\frac{\ln\lambda}{\ln M+\ln\ln M}\Big)\theta\Big),$$

где величины $O(1)$ и θ не зависят от x.

Нам остаётся установить равномерную (если δ мало, а M достаточно велико) малость суммы

$$\sum_{\lambda=1}^{\delta M\ln M}\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\lambda\Big(1-\frac{\ln\lambda}{\ln M+\ln\ln M}\Big)\theta\Big)$$

или сумм

$$S_1=\sum_{\lambda=1}^{\sqrt{M\ln M}}\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\lambda\Big(1-\frac{\ln\lambda}{\ln M+\ln\ln M}\Big)\theta\Big)$$

и

$$S_2=\sum_{\lambda=\sqrt{M\ln M}}^{\delta M\ln M}\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\lambda\Big(1-\frac{\ln\lambda}{\ln M+\ln\ln M}\Big)\theta\Big).$$

Сумма S_1 оценивается величиной

$$\sum_{\lambda=1}^{\sqrt{M\ln M}}\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\frac{\lambda}{3}\Big)<\frac{1}{\ln M(1-\exp(-1/3))},$$

которая равномерно мала — ибо M изначально можно считать бóльшим любого наперёд заданного натурального числа.

Сумма S_2 оценивается величиной

$$S_2<\sum_{\lambda=\sqrt{M\ln M}}^{\delta M\ln M}\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\lambda\frac{|\ln\delta|}{10\ln M}\Big)=\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\frac{\sqrt{M}|\ln\delta|}{10\sqrt{\ln M}}\Big)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}t^n,$$

где $t=\exp\Big(-\dfrac{|\ln\delta|}{10\ln M}\Big)$. Отсюда

$$S_2<\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\frac{\sqrt{M}|\ln\delta|}{10\sqrt{\ln M}}\Big)\cdot\frac{1}{1-\exp\Big(-\frac{|\ln\delta|}{10\sqrt{\ln M}}\Big)}\sim$$

$$\sim\frac{1}{\ln M}\cdot\exp\Big(-\frac{\sqrt{M}|\ln\delta|}{10\sqrt{\ln M}}\Big)\cdot\frac{1}{\frac{\delta|\ln\delta|}{\ln M}}=\frac{1}{\delta|\ln\delta|}\cdot\exp\Big(-\frac{\sqrt{M}|\ln\delta|}{10\sqrt{\ln M}}\Big).$$

Последняя величина стремится к нулю при $M\to\infty$.

(*А. Канель-Белов*)

3.5. Условие. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Доказать, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена. (*Теорема Гаусса — Люка*)

Решение. Нам будет удобно пользоваться следующим критерием выпуклости:

Множество M является *выпуклым*, если любая точка вне его отделена от него прямой. Выпуклая оболочка множества M есть пересечение полуплоскостей, содержащих M.

Если корень производной не принадлежит выпуклой оболочке корней многочлена, то через него можно провести такую прямую, что все корни многочлена лежат по одну сторону от неё. Таким образом, достаточно показать, что если все корни многочлена P принадлежат полуплоскости, то на её границе производная многочлена P' в ноль не обращается.

Рассмотрим подстановку $z \to \lambda \cdot z + b$ и воспользуемся тем фактом, что любой поворот и любой параллельный перенос плоскости реализуется как преобразование вида $z \to \lambda \cdot z + b$. При такой подстановке все корни P, а также все корни P' преобразуются одинаковым образом, ибо

$$(P(\lambda \cdot z + b))' = \lambda \cdot P'(\lambda \cdot z + b).$$

(Если z — корень P, то $\lambda^{-1}(z - b)$ есть корень $P(\lambda \cdot z + b)$.) Ясно, что существует движение (поворот или перенос), переводящее произвольную полуплоскость в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}(z) > 0$.

Итак, задача свелась к следующему утверждению:

Если все корни многочлена P лежат в верхней полуплоскости, то многочлен P' вещественных корней не имеет.

Пусть $R(z) = P'(z)/P(z)$ — логарифмическая производная P. По теореме Безу

$$P(z) = a_0 \prod_k (z - z_k)^{a_k},$$

где a_k есть кратность корня z_k. Отсюда следует, что

$$R(z) = \sum_k \frac{a_k}{z - z_k}$$

и все числа a_k — натуральные. Остаётся показать, что функция $\sum_k \frac{a_k}{z - z_k}$ не имеет вещественных корней.

В самом деле, при вещественном z все векторы $z - z_k$ лежат в нижней полуплоскости, а векторы $\frac{a_k}{z - z_k}$ — в верхней. Ясно, что сумма векторов с положительной мнимой частью не равна нулю. (*А. Канель-Белов*)

4.12. Условие. С многочленами от двух переменных можно делать следующие операции вывода. Пусть даны или уже выведены многочлены P_1, P_2. Тогда выводятся следующие многочлены:

$$\lambda P_1, \quad P_1 + P_2, \quad P_1(R(x), R(y)),$$

где R — произвольный многочлен от одной переменной.

а) Верно ли, что любая система многочленов [с комплексными коэффициентами] выводится из конечной подсистемы?

б) Тот же вопрос для многочленов с целыми коэффициентами, которые можно умножать только на целые числа. (*В. Шпехт*)

Решение. Введём более общее понятие *выводимости*. Пусть дана некоторая система преобразований (например, дифференцирований). Будем считать многочлен *выводимым* из некоторой системы многочленов, если его можно получить из этой системы применением (быть может неоднократным) этих преобразований. Систему многочленов назовём *конечно базируемой*, если она выводится из некоторой конечной системы.

4.12 а). Ответ: да.

Покажем, что система многочленов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ конечно базируема относительно системы подстановок $P(x_i) \to x_i$ (при которых x_i заменяется на $P(x_i)$), где $P(x)$ — многочлен от одной переменной, и взятия линейных комбинаций. Мы будем рассматривать многочлены с комплексными коэффициентами, но доказательство проходит над любым полем характеристики 0.

Под *дифференцированием* кольца R понимается линейный оператор $D\colon R \to R$, удовлетворяющий *тождеству Лейбница*:

$$D(uv) = D(u)v + uD(v).$$

Дифференцирование однозначно определяется своими образами на образующих кольца R. Например, если $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, то для любого набора элементов y_i существует однозначно определённое дифференцирование D такое, что $D(x_i) = y_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. В дальнейшем, когда мы говорим, что δ есть оператор дифференцирования, и предъявляем $\delta(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, то мы тем самым даём определение оператора δ (так ниже определяются операторы $\partial_{kl}, \partial_\mu, \partial_{\mu_j}$).

Вернёмся к нашей задаче. Каждый многочлен $P(x)$ определяет оператор дифференцирования ∂_P, для которого $\partial_P(x_i) = P(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Шаг 1. Сведём задачу к конечной базируемости относительно взятия линейных комбинаций и операторов дифференцирования вида ∂_P для всевозможных многочленов P. Выберем многочлен $S_\lambda(x) = x(1 + \lambda P(x))$.

Рассмотрим произвольный многочлен $Q \in K[x_1, \ldots, x_n]$ и его образ $S_\lambda(Q)$ при подстановке

$$S_\lambda(x_i) = x_i(1 + \lambda P(x_i)) \to x_i$$

(одновременно по всем i). Многочлен $S_\lambda(Q)$ можно представить в виде

$$S_\lambda(P) = \sum_{k=0}^{\deg Q} \lambda^k Q_k,$$

где $Q_0 = Q$, $Q_1 = \partial_P(Q)$.

Доказательство следующей леммы мы предоставляем читателю:

Лемма 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные ненулевые числа, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — векторы, $\vec{f_i} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \vec{e}_k$. Тогда все $\vec{e}_k$ содержатся в линейной оболочке системы $\vec{f_i}$.*

В качестве векторов $\vec{e}_k$ возьмём многочлены Q_k. Применив лемму 1, получим, что многочлен $\partial_P(Q)$ принадлежит линейной комбинации $S_{\lambda_i}(Q)$, $i = 1, \ldots, \deg Q$; $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Поскольку наша система S замкнута относительно взятия линейных комбинаций, получаем, что если $Q \in S$, то $\partial_P(Q) \in S$.

Замечание. Каждая подстановка определяет эндоморфизм кольца многочленов. Фактически мы перешли от действия полугруппы эндоморфизмов к действию «инфинитезимальных» или «бесконечно близких к тождественному» эндоморфизмов, т. е. к её *касательной алгебре Ли* — множеству дифференцирований ∂_P. Такие объекты устроены проще, и этот приём весьма распространён в алгебре и дифференциальной геометрии. В положительной характеристике этот подход работает гораздо хуже (см. задачу 4.12 б).

Шаг 2. Под *регулярной конечной базируемостью* системы S относительно семейства операторов R_i будем понимать наличие конечного набора *регулярных образующих*, т. е. однородных многочленов $\{s_1, \ldots, s_t\} \subset S$ таких, что для любого $s \in S$ существуют константы $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, для которых $s = \sum_{ij} \alpha_{ij} R_i(s_j)$, и при этом $\forall\, i\ \ \deg(R_i(s_j)) \leqslant \deg s$.

В дальнейшем (в решении п. а)) под *конечной базируемостью* всегда понимается *регулярная конечная базируемость*. Под *образующими* всегда понимаются *регулярные образующие* относительно рассматриваемой системы операторов.

Для осуществления индукции нам будет удобно доказать несколько более общий

Факт: *Система многочленов $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m]$ регулярно конечно базируема относительно линейных действий, умножения на многочлены из $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$ и операторов дифференцирований $\partial_{k,r}$ где $k \geqslant 1$,* *определённых равенствами*

$$\partial_{k,r}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leqslant r, \\ x_i^k & \text{при } i > r. \end{cases}$$

Шаг 3. Базой индукции служит случай $r = m$. Тогда операторы $\partial_{k,r}$ отсутствуют, но имеется операция умножения на произвольный многочлен. В этом случае наше утверждение представляет собой классическую **теорему Гильберта о базисе**: *Любая система многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_r$, замкнутая относительно операций сложения и умножения на произвольный многочлен, выводится из конечного набора многочленов.* (См. «Математическое просвещение», вып. 11, задача 11.12.)

Упражнение. Выведите теорему Гильберта о базисе из следующего факта: *В точки положительной целочисленной r-мерной решётки ставят прожекторы. Прожектор освещает положительный «октант». Запрещается ставить прожектор в освещённую область. Тогда процесс расстановки прожекторов должен остановиться.* (Точке с координатами $k_1, \ldots, k_r$ отвечает моном $x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$.)

Шаг 4. Индукционный переход. Понятие ширины. Если многочлен Q однороден степени n по $x_{r+1}, \ldots, x_m$, то $\partial_{1,r}(Q) = mQ$. Назовём *шириной* $\mathrm{Wide}(P)$ многочлена P его суммарную степень по $x_{r+1}, \ldots, x_m$. Прежде всего покажем, что при рассмотрении членов наибольшей ширины можно ограничиться дифференцированиями $\partial_{k,r}$, где $k \geqslant 2$.

В самом деле, пусть система S конечно базируема относительно операторов $\partial_{k,r}$, где $k \geqslant 1$, и пусть $s_1, \ldots, s_t$ — её образующие, $s \in S$, $\bar{s}_\tau$ — компонента в s_τ максимальной ширины. При этом $\partial_{1,r}(s_\tau) = \mathrm{Wide}(s_\tau)s_\tau$.

Тогда для каких-то коэффициентов $\alpha_{n,\tau} \in \mathbb{C}$ выполняется равенство:

$$\bar{s} = \sum_{n \geqslant 2;\, \tau} \alpha_{n,\tau} \partial_{n,r} \bar{s}_\tau + \sum_{\tau} \alpha_{1,\tau} \partial_{1,r} \bar{s}_\tau.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Wide}\Bigl(s - \sum_{n \geqslant 2;\, \tau} \alpha_{n,\tau} \partial_{n,r} s_\tau - \sum_{\tau} \alpha_{1,\tau} \,\mathrm{Wide}(s_\tau) s_\tau\Bigr) < \mathrm{Wide}(s)$$

и дело завершает индукция по ширине старшего члена. Таким образом, оператор $\partial_{1,r}$ можно отбросить. Сформулируем теперь *основную лемму*:

Лемма 2. *Из конечной базируемости систем многочленов из $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m]$ относительно семейства операторов $\partial_{n,r+1}$ и умножений на многочлены из $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{r+1}]$ вытекает конечная базируемость систем многочленов из $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m]$ относительно семейства операторов $\partial_{n,r}$ и умножений на многочлены из $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{r+1}]$*

Доказательство. Пусть система S конечно базируема относительно операторов $\partial_{n,r}$, $n \geqslant 2$. Тогда для любой системы многочленов S существуют такие её регулярные образующие s_τ, что для любого $s \in S$ выполняется равенство:

$$s = \sum_{k\geqslant 2;\ \tau} \alpha_{k,\tau} \partial_{k,r} s_\tau$$

при некоторых $\alpha_{k,\tau} \in \mathbb{C}$.

Легко видеть, что если не все эти коэффициенты равны нулю, то

$$\mathrm{Wide}\Big(s - \sum_{k\geqslant 2;\ \tau} \alpha_{k,\tau} \partial_{k,r+1} s_\tau\Big) < \mathrm{Wide}(s),$$

ибо операторы $\partial_{k,r}$ и $\partial_{k,r+1}$ приводят к появлению одних и тех же членов наибольшей ширины. Дело завершает индукция по ширине. Итак, *основная лемма доказана.* □

Перейдём к **решению задачи 4.12 а).** Введём дополнительные переменные μ_j; $j = r+1, \ldots, m$, операторы дифференцирования ∂_μ и ∂_{μ_j}:

$$\partial_\mu(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leqslant r, \\ \mu_i x_i & \text{при } i > r, \end{cases} \qquad \partial_{\mu_j}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \mu_j x_j & \text{при } i = j \end{cases}$$

и систему дополнительных подстановок $D_R\colon R(x_i)\mu_i \to \mu_i\ \forall\, i$. Ясно, что

$$\partial_\mu = \sum_{i=r+1}^{m} \partial_{\mu_i}.$$

Поскольку любой оператор $\partial_{k,r}$ получается путём применения ∂_μ и оператора D_{x^k} с последующей специализацией $\mu_i \to 1$, из конечной базируемости системы $\partial_\mu(S)$ вытекает конечная базируемость системы S.

Лемма 3. *Конечная базируемость всех систем вида $\partial_\mu(S)$ вытекает из конечной базируемости всех систем вида $\partial_{\mu_i}(S)$ для всех $i = r+1, \ldots, m$.*

Доказательство. Пусть система $\partial_{\mu_i}(S)$ конечно базируема относительно новой системы операторов. Тогда существуют такие её регулярные образующие, что для любого $s \in S$ при некоторых $\alpha_{k,\tau} \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$\partial_{\mu_i}(s) = \sum_{k\geqslant 2;\ \mu} \alpha_{k,\tau} R_k(\partial_{\mu_i}(s_\tau)).$$

Легко видеть, что тогда

$$s^{(i)} = \partial_\mu(s) - \sum_{k\geqslant 2;\ \mu} \alpha_{k,\tau} R_k(\partial_\mu(s_\tau))$$

не содержит компоненты с μ_i, и осталось доказать конечную базируемость системы $S^{(i)}$, порождённой элементами вида $s^{(i)}$, где $s \in S$. Доказательство леммы завершается индукцией по числу компонент. □

Итак, всё свелось к доказательству конечной базируемости систем $\partial_{\mu_i}(S)$. Можно считать, что $i = r + 1$ (случаи большего i аналогичны). При этом операторы D_R действуют умножениями на $R(x_{r+1})$, так что для индукционного перехода, решающего задачу, остаётся применить основную лемму.

Задача 4.12 а) решена.

4.12 б). Ответ: нет.

Пусть p — простое число. Покажем, что система многочленов $Q_k(x, y) = (x - y)x^{p^k - 1}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ бесконечно базируема. Достаточно показать, что она бесконечно базируема по модулю многочлена $(x - y)^2$.

Положим $\tau = x - y$, тогда $Q_k = \tau x^{p^k - 1}$. Рассмотрим произвольный многочлен вида $\tau H(x)$. Применим к нему подстановку $R(x) \to x$; $R(y) \to y$. В результате получится многочлен $\tau R'(x)H(R(x))$, поскольку $\tau^2 = 0$.

Рассмотрим замену

$$R(x) = \sum_{j=1}^{s} \mu_k x^{i_k} \to x, \quad R'(x)\tau \to \tau,$$

где $s > 1$ и μ_k для всех $i_k \neq 0$ — неопределённые константы (вместо которых потом подставляются числа). Применим её к многочлену вида $\tau H(x)$. Результатом будет выражение вида

$$\tau \sum_J \mu_1^{j_1} \ldots \mu_s^{j_s} \Big(\sum_k \alpha_\ell x^k \Big).$$

Коэффициент $\sum_k \alpha_\ell x^k$ при произведении $\mu_1^{j_1} \ldots \mu_s^{j_s}$ будем называть *результатом действия на $\tau H(x)$ вербального оператора* порядка $(j_1, \ldots, j_s)$ от $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_s})$. (Рассуждения с вербальными операторами аналогичны рассуждениям с применением леммы 1.) Конечная базируемость относительно наших подстановок равносильна конечной базируемости относительно вербальных операторов.

Опишем действие вербальных операторов $(j_1, \ldots, j_s)$ от $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_s})$ на многочлен $Q_k(x, y) = (x - y)x^{p^k - 1}$. Результат получается, если каждое вхождение x (всего таких вхождений $p^k - 1$) заменить на вхождение x^{i_m}, а вхождение τ заменить на $i_m x^{i_m} \tau$; $m = 1, \ldots, s$. При этом ровно j_m ($m = 1, \ldots, s$) раз происходит замена, связанная с x^{i_m} (только так возникает $\mu_m^{j_m}$). Ясно, что $\sum_m j_m = p^k$.

Занумеруем вхождения переменных в Q_k слева направо. Отметим, что замены $x \to x_{j_\alpha}$ при действии вербального оператора на Q_k можно сгруппировать по циклам. Результат действия вербального оператора есть результат суммирования по таким циклам. Каждый цикл состоит либо из одного элемента, либо из p^k элементов.

Для любого набора целых неотрицательных чисел имеет место равенство:

$$(x^{r_1})'x^{r_2}\dots x^{r_k}+(x^{r_2})'x^{r_3}\dots x^{r_k}x^{r_1}+(x^{r_k})'x^{r_1}\dots x^{r_{k-1}}=|\vec{r}|x^{|\vec{r}|-1}. \quad (1)$$

($|\vec{r}|$ обозначает $\sum r_j$, степени x^{r_i} переставляются по циклу.)

Степень по x образа вербального оператора равна $\sum i_\alpha j_\alpha$ (а по τ она остаётся единицей). Заметим, что разность степеней Q_k при различных k делится на p. Поэтому если применить к Q_k вербальный оператор с $s>1$ (с разными j), то коэффициент при многочлене Q_l, где $l>k$, окажется в силу равенства (1) делящимся на $|\vec{r}|$, т. е. равным нулю. Если же применить замену, отвечающую подстановке $x\to x^j$, то для получения Q_l степень должна увеличиться в p^{l-k} раз, и тогда $j=p^{l-k}$. При этом τ перейдёт в $p^{l-k}x^{p^{l-k}-1}\tau=0$ при $l-k>0$. Отсюда непосредственно вытекает

Лемма 4. *Если $\sum_{k=1}^s i_kj_k$ делится на p, то результат действия вербального оператора порядка $(j_1,\dots,j_s)$ $(s\geqslant 2)$ от $(x^{i_1},\dots,x^{i_s})$ нулевой.*

Кроме того ясно, что результат действия оператора

$$\tau R'(x)H(R(x))\to\tau H(x)$$

нулевой, если $R(x)=P(x^{pm})$, ибо тогда $R'(x)=0$. Поэтому из данной леммы вытекает

Следствие. *Ненулевой вклад в коэффициенты при x^{pm}, получающиеся при подстановке из предыдущего следствия, дают члены, в которых не присутствует произведение $\mu_\alpha\mu_\beta$ при $\alpha\neq\beta$. Они отвечают подстановкам вида $\mu_kx^{i_k}\to x$, $\mu_kx^{i_k-1}\tau\to\tau$.*

Если при этом i_k делится на p, то результат соответствующей подстановки нулевой.

Пусть подстановка применяется к Q_k и её результат не равен нулю. Тогда согласно следствию в полученном многочлене нет членов с показателями, кратными p^l, где $l>k$. Поэтому никакой многочлен Q_α не может быть выведен из системы $\{Q_i\}_{i<\alpha}$ и, таким образом, система $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ бесконечно базируема.

Комментарии. Под *тождеством* в алгебре A (определение алгебры над полем см. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2011. С. 38) понимается многочлен, тождественно обращающийся в ноль в алгебре A. Например, в алгебре матриц второго порядка выполняется тождество

Холла $[[x, y]^2, z] = 0$ (см. задачу 3.1). Тождество f следует из набора тождеств $\{g_i\}$, если везде, где выполняется набор тождеств $\{g_i\}$, автоматически выполняется тождество f. *Проблема Шпехта* звучит так: верно ли, что любая система тождеств следует из конечной подсистемы? В характеристике нуль (как её понимал сам Шпехт) её решил А. Р. Кемер, в положительной характеристике контрпримеры получил автор, позднее — А. В. Гришин и В. В. Щиголев. Пункт а) данной задачи передаёт идею А. В. Гришина решения проблемы Шпехта в нулевой характеристике. (Рассмотрим матрицы M_k, $k=1, \ldots, s$, такие что при $i \leqslant j$ в пересечении i-й строки с j-м столбцом матрицы M_k стоит переменная x_{ij}^k, а при $j > i$ стоит 0. Если рассмотреть многочлены от этих матриц, то подстановкам $P(M_k) \to M_k$ будут соответствовать подстановки $P(x_{ii}^k) \to x_{ii}^k$ в кольце $K[x_{ii}^k]$.) При этом, правда, ещё требуется весьма специфическое применение леммы Артина — Рисса, идея которого была впервые предложена А. Я. Беловым. Задача 4.12 б) отражает идею построения контрпримеров в проблеме Шпехта в положительной характеристике. Историю вопроса см. *Белов А. Я.* Локальная конечная базируемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец // Изв. РАН. Сер. Матем. 2010. Т. 74, № 1. С. 3–134.

(*А. Канель-Белов*)

16.1. Условие. Найти первообразную

$$\int \frac{x^2\, dx}{(x\sin(x) + \cos(x))^2}.$$

(*Фольклор*)

Решение. Подынтегральное выражение — дробь, у которой знаменатель — квадрат. Попробуем представить её как производную дроби. Тогда в числителе должны стоять $x\sin x + \cos x$ и его производная $x\cos x$, умноженные на какие-то выражения. Как получить отсюда x^2? Попробуем представить его как $x^2\cos^2 x + x^2\sin^2 x$, что-то добавить и вычесть. Получаем:

$$x^2 = (x\sin x + \cos x)x\sin x + x\cos x(x\cos x - \sin x),$$

при этом $x\sin x = (\sin x - x\cos x)'$. Отсюда

$$\int \frac{x^2\, dx}{(x\sin x + \cos x)^2} = \int d\,\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x} + C.$$