
Современная математика для широкой аудитории

Сквозь сеть сопротивлений

М. Б. Скопенков*, А. А. Пахарев†, А. В. Устинов‡

Памяти Андрея Ходулёва

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая читателям статья является продолжением статей [1] и [5] из предыдущих номеров «Математического Просвещения». В первой из них было сформулировано несколько трудных задач о сопротивлении симметричных электрических цепей, а во второй было приведено элементарное доказательство теоремы Пойа о случайном блуждании. Основная цель этой статьи — привести элементарное доказательство следующего фольклорного результата.

ТЕОРЕМА 1.1. (А) *Если человек случайным образом блуждает по бесконечной квадратной сетке, то вероятность его возвращения в начальный узел до первого попадания в узел, соседний с ним справа, равна $1/2$.*

(В) *Сопротивление между соседними узлами бесконечной квадратной сетки из единичных сопротивлений равно $1/2$.*

* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-5490.2014.1, фонда «Династия», фонда Саймонса.

† Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-5490.2014.1.

‡ Работа выполнена при поддержке фонда «Династия».

Все необходимые определения будут даны. Части (А) и (В) теоремы 1.1 оказываются равносильны друг другу. По сути это одно и то же утверждение, сформулированное в разных терминах: один раз на языке случайных блужданий, а второй раз — на языке электрических цепей. При решении подобных задач полезно знать оба «языка» и уметь переводить интересующее вас утверждение с одного языка на другой.

Элементарное доказательство теоремы 1.1 использует замечательную теорему 3.2 о сопротивлении между соседними узлами конечных «симметричных» электрических цепей и возможность приблизить бесконечную квадратную сетку такими цепями. В процессе доказательства мы решим большинство задач из заметки [1], познакомимся с теорией потенциала на графах и свойствами дискретных гармонических функций.

План статьи следующий. В § 2 будут даны определения основных объектов, связанных с конечными электрическими цепями. В § 3 будет доказана теорема 3.2 о сопротивлении «симметричных» электрических цепей. В § 4 мы начнём обсуждать бесконечные электрические цепи, а в § 5 докажем основные теоремы о потенциале на бесконечной квадратной сетке. В § 6 докажем часть (В) основной теоремы 1.1. В § 7 докажем дискретный аналог теоремы Лиувилля, который потребуется нам для доказательства части (А) основной теоремы 1.1 в § 8. В § 9 обсудим без доказательства некоторые её обобщения, в частности, коснёмся задачи о сопротивлении между произвольными узлами бесконечной квадратной сетки. Например, сопротивление между узлами, соседними по диагонали, равно $2/\pi$.

Если статью читать независимо от предыдущих [1] и [5], то некоторые утверждения читателю придётся принять без доказательства.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Поскольку мы собираемся применять электрические цепи для доказательства математического результата, нам понадобится их формальное аксиоматическое определение¹⁾. Для начала ограничимся рассмотрением конечных электрических цепей.

Наше определение использует язык графов. Будем рассматривать неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Иногда нам удобно будет выбрать на ребре ориентацию.

¹⁾ Есть и другие подходы к аксиоматике электрических цепей; см, например, [4, 13, 18]. Впервые математический аппарат для анализа электрических цепей постоянного тока был разработан Кирхгофом [18].

Условимся, что если в некотором графе вершины x и y соединены ребром, то через xy обозначается ориентированное ребро, направленное от вершины x к вершине y .

Электрическая цепь — это связный конечный граф Γ , в котором:

- каждому ребру xy приписано положительное вещественное число $R(xy) = R(yx)$, называемое его *сопротивлением*²⁾,
- выделено некоторое (непустое) множество вершин, называемое *границей* ($\partial\Gamma$ — граница графа Γ),
- каждой вершине x границы $\partial\Gamma$ приписано вещественное число $g(x)$ — *потенциал* в этой вершине.

Потенциалы вершин $u(x)$ определяются следующими условиями:

АКСИОМА 1 (граничное условие Дирихле). В граничных вершинах значения потенциала совпадают со значениями данной функции g , т. е. $u(x) = g(x)$ для всех $x \in \partial\Gamma$.

АКСИОМА 2 (правило токов Кирхгофа). Для любой неграничной вершины x выполнено равенство

$$\sum_{xy} \frac{u(x) - u(y)}{R(xy)} = 0,$$

где суммирование ведётся по всем рёбрам xy , содержащим вершину x .

Величина

$$i_u(xy) := \frac{u(x) - u(y)}{R(xy)}$$

называется *током*, идущим по ребру xy в направлении от x к y . Число

$$i_u(x) := \sum_{xy} i_u(xy),$$

где суммирование ведётся по всем рёбрам xy , содержащим вершину x , называется *током, вытекающим в цепь* через вершину x . Таким образом, по аксиоме 2, $i_u(x) = 0$ для каждой неграничной вершины x . Если цепь имеет только две граничные вершины x и y , то число

$$R(x \leftrightarrow y) := \frac{g(x) - g(y)}{i_u(x)} = \frac{g(y) - g(x)}{i_u(y)} \quad (1)$$

называется *эффективным сопротивлением* цепи между вершинами x и y , или просто *сопротивлением* цепи. *Тепловой мощностью* цепи называется

²⁾ Величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью*.

величина

$$Q_u := \sum_{xy} \frac{(u(x) - u(y))^2}{R(xy)} = \sum_{xy} i_u(xy)^2 R(xy),$$

где суммирование ведётся по всем (неориентированным) рёбрам цепи. Если же суммировать не по всем рёбрам цепи, а только по некоторому её подграфу, то говорят о *тепловой мощности* подграфа.

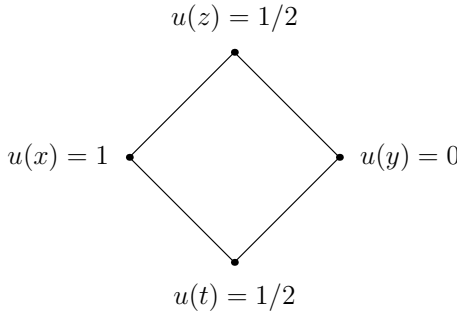


Рис. 1. Квадрат с единичными сопротивлениями сторон

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим электрическую цепь, полученную из квадрата $xzyt$ приписыванием единичного сопротивления каждому ребру (см. рис. 1). Пусть граничными вершинами этой цепи будут вершины x и y с функцией g на них, равной 1 и 0 соответственно. По аксиоме 2

$$(u(z) - u(x)) + (u(z) - u(y)) = 0,$$

поэтому $u(z) = 1/2$. Аналогично $u(t) = 1/2$. Из этого следует, что по каждому ребру идёт ток $\pm 1/2$, положительный — по рёбрам, ориентированным вправо, отрицательный — по рёбрам, ориентированным влево. Найдём эффективное сопротивление этой цепи между вершинами x и y :

$$R(x \leftrightarrow y) = \frac{g(x) - g(y)}{i_u(x)} = \frac{1 - 0}{1/2 + 1/2} = 1.$$

Тепловая мощность каждого ребра равна $(1/2)^2$, поэтому тепловая мощность всей электрической цепи равна 1.

Функцию $u(x)$, удовлетворяющую аксиоме 2 на некотором множестве вершин, назовём *гармонической* на этом множестве вершин. *Гармонической на цепи* назовём функцию, гармоническую во всех неграничных вершинах цепи. По умолчанию, под гармонической функцией будет подразумеваться именно гармоническая на цепи функция.

Эти определения обобщают определения из статьи [5], в которой рассматривался частный случай, когда функция $g(x)$ принимает только значения 0 и 1. Следующие теоремы доказываются дословно так же, как аналогичные теоремы из статьи [5].

ТЕОРЕМА 2.2 (теорема единственности потенциала). *В электрической цепи не может быть двух различных потенциалов.*

ТЕОРЕМА 2.3 (теорема существования потенциала). *В электрической цепи существует потенциал.*

Сформулируем ещё несколько результатов из статьи [5], которые нам потребуются.

ТЕОРЕМА 2.4 (принцип суперпозиции). *Если $u(x)$ и $v(x)$ — гармонические функции на цепи, то при любых $a, b \in \mathbb{R}$ функция $au(x) + bv(x)$ — гармоническая на цепи.*

ТЕОРЕМА 2.5 (принцип максимума). *Гармоническая функция на цепи принимает своё наибольшее значение в граничных вершинах.*

Задача о нахождении потенциала $u(x)$, удовлетворяющего аксиомам 1–2, называется *задачей Дирихле*. В некоторых случаях оказывается удобнее рассматривать другую задачу: в граничных вершинах фиксировать не значения потенциала, а втекающий ток (то есть использовать не «источники напряжения», а «источники тока»). Пусть каждой вершине x электрической цепи приписано число $i(x)$ — ток, втекающий в эту вершину. Наложим на эти числа следующее ограничение: $\sum_x i(x) = 0$ (сумма втекающих в цепь токов равна нулю). При таком подходе аксиома 1 заменяется следующим предположением.

АКСИОМА 1' (граничное условие Неймана). Для любой граничной вершины x выполнено равенство $i_u(x) = i(x)$.

В таком случае *потенциалом* называется функция $u(x)$, которая удовлетворяет граничному условию Неймана (аксиоме 1') и правилу токов Кирхгофа (аксиоме 2). Задача о нахождении потенциала, удовлетворяющего аксиомам 1' и 2, называется *задачей Неймана*.

Следующая теорема является несложным следствием приведённых выше результатов.

ТЕОРЕМА 2.6 (теорема существования и единственности решения задачи Неймана). *Решение задачи Неймана всегда существует. Оно единственно с точностью до добавления константы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем единственность. Допустим, что существуют два потенциала u_1 и u_2 , удовлетворяющие аксиомам 1' и 2. Тогда их

разность $u_1 - u_2$ является гармонической функцией во всех вершинах цепи (включая граничные). Докажем, что она постоянна. Действительно, возьмём любую вершину графа и объявим её на время единственной граничной вершиной цепи. По принципу максимума 2.5 мы получаем, что в ней достигается максимум потенциалов всех вершин цепи. Прделаав это для каждой вершины, получим, что в любой вершине потенциал равен одному и тому же числу — максимуму потенциалов всех вершин цепи.

Существование достаточно доказать для случая, когда функция $i(x)$ отлична от нуля только в двух вершинах x и y (рассматривая линейные комбинации таких функций, всегда можно получить решение задачи Неймана в общей ситуации). Возьмём эти две вершины за границу цепи и положим $g(x) = 0$, $g(y) = 1$. По теореме существования 2.3 в этой цепи существует потенциал u . Если $i_u(x) = -i_u(y) = 0$, то u является гармонической функцией во всех вершинах цепи. По доказанному выше, она была бы постоянна, но $u(x) \neq u(y)$. Значит, $i_u(x) \neq 0$. Тогда $\frac{i(x)}{i_u(x)}u$ — искомое решение задачи Неймана. \square

Задачи об электрических цепях после формализации становятся математическими. При их решении часто возникает соблазн воспользоваться соображениями, очевидными с физической точки зрения. Но мы постараемся чётко разделять физические и математические аргументы.

§ 3. СОПРОТИВЛЕНИЕ «СИММЕТРИЧНЫХ» ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Перед тем как читать дальше, рекомендуем читателю попробовать самому вычислить сопротивление между соседними вершинами проволочных правильных многогранников с единичными сопротивлениями.

Перед формулировкой основного результата этого раздела (теоремы 3.2) рассмотрим один частный случай.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим электрическую цепь, полученную из рёбер тетраэдра $xyzt$ приписыванием единичного сопротивления каждому ребру (см. рис. 2). Пусть граничными вершинами этой цепи будут вершины x и y с функцией g на них, равной 1 и 0 соответственно. Поменяем в этой цепи вершины z и t местами. Цепь не изменится, поэтому по теореме единственности 2.2 потенциалы тоже не изменятся. Значит, $u(z) = u(t)$. По аксиоме 2 имеем $(u(z) - u(x)) + (u(z) - u(y)) + (u(z) - u(t)) = 0$, поэтому $u(z) = u(t) = 1/2$. Значит, эффективное сопротивление между вершинами x и y :

$$R(x \leftrightarrow y) = \frac{g(x) - g(y)}{i_u(x)} = \frac{1 - 0}{1/2 + 1/2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

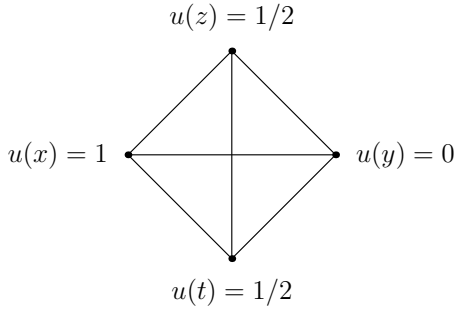


Рис. 2. Тетраэдр с единичными сопротивлениями

В этом примере для вычисления эффективного сопротивления тетраэдра между двумя его соседними вершинами мы воспользовались *симметрией* данного графа. Следующие определения представляют формализацию понятия симметрии.

Соседние вершины графа (то есть вершины, соединённые ребром), будет также называть *смежными*. *Самосовмещением* (или *автоморфизмом*) графа Γ назовём такую перестановку его вершин, которая сохраняет отношение смежности (другими словами, соседние вершины должны переходить в соседние). *Поворотом* графа Γ *вокруг вершины* z назовём самосовмещение этого графа, оставляющее на месте вершину z . *Центром симметрии* графа Γ назовём такую вершину z , что любую смежную с z вершину можно перевести в любую другую смежную с z вершину каким-то поворотом вокруг z . Граф Γ называется *правильным*, если все его вершины — центры симметрии графа. Оставляем читателю проверку того, что степени вершин на концах любого ребра правильного графа составляют одну и ту же пару чисел (возможно, одинаковых). Примеры правильных графов: правильные (и некоторые полуправильные) многогранники любой размерности; правильные решётки на евклидовой плоскости, плоскости Лобачевского и их многомерных аналогах; решётки на торе и т. п. Нетривиальный пример: граф ромбододекаэдра. Это многогранник, который получается, если к каждой грани куба приставить по четырёхугольной пирамиде так, что все треугольники, граничащие по рёбрам куба, сольются в ромбы. Поверхность ромбододекаэдра состоит из 12 ромбов. Он нетривиален тем, что его вершины имеют разную степень (3 и 4).

Понятие правильного графа заимствовано из статьи [3].

Основной результат раздела — следующая фольклорная теорема (см., например, [19]).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть граф электрической цепи из единичных сопротивлений является правильным и имеет t рёбер и n вершин. Предпо-

ложим, что x и y — соседние вершины степеней k и l соответственно. Тогда эффективное сопротивление между вершинами x и y вычисляется по формуле

$$R(x \leftrightarrow y) = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу Неймана со следующими граничными условиями: в некоторую вершину z нашего графа втекает ток $(n-1)/n$, а из всех остальных вершин вытекает ток $1/n$ (т. е. $i(z) = (n-1)/n$ и $i(w) = -1/n$ при $w \neq z$). По теореме 2.6 у этой задачи есть некоторое решение u_z . Положим сначала $z = x$. Возьмём две произвольные соседние с x вершины w и t . В силу правильности нашего графа, некоторый поворот графа вокруг вершины x переводит вершину w в вершину t . При этом повороте граничные условия Неймана не изменяются, следовательно, по теореме 2.6 потенциалы могут измениться только на некоторую общую для всех вершин константу. Так как потенциал вершины x не изменяется, все потенциалы также не изменяются. Поэтому потенциал вершины w равен потенциалу вершины t , и ток, текущий по ребру xw , равен току, текущему по ребру xt . Из этого следует, что из вершины x в любую соседнюю с x вершину течёт один и тот же ток. Суммарный ток, втекающий в цепь через вершину x , равен $(n-1)/n$, поэтому ток, текущий по ребру xy , равен $\frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Аналогично в случае $z = y$ по ребру yx течёт ток $\frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Рассмотрим потенциал $u := u_x - u_y$. Ясно, что $i_u(x) = 1$, $i_u(y) = -1$ и $i_u(w) = 0$ при любом w , отличном от x и y . При этом

$$i_u(xy) = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

и, следовательно,

$$R(x \leftrightarrow y) = \frac{u(x) - u(y)}{i_u(x)} = \frac{i_u(xy)}{1} = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{m}. \quad \square$$

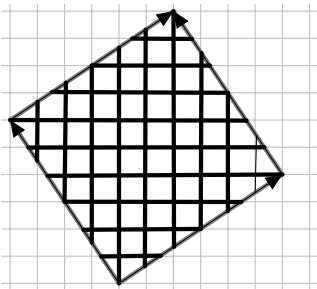


Рис. 3. Сетка на торе

ПРИМЕР 3.3. Рассмотрим бесконечную квадратную сетку \mathbb{Z}^2 из единичных сопротивлений, в которой выделен квадрат с центром в узле сетки и вершинами в узлах сетки (см. рис. 3). Вырежем его из сетки и отождествим точки на противоположных сторонах (которые совмещаются параллельным переносом вдоль стороны квадрата) так, чтобы получился тор. Видно, что получившая сетка на торе является правильным графом, поэтому по теореме 3.2 сопротивление между двумя её соседними узлами

равно $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{S}\right)$, где S — площадь квадрата. В частности, если вершины квадрата расположены в узлах $(n; n)$, $(-n; n)$, $(-n; -n)$, $(n; -n)$, то сопротивление между соседними узлами полученной *сетки на торе* \mathbb{Z}_{2n}^2 равно $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

Так же легко найти сопротивление между соседними вершинами для правильных многогранников с единичными сопротивлениями рёбер. Для куба оно равно $7/12$, для икосаэдра — $11/30$, для додекаэдра — $19/30$, для ромбододекаэдра — $13/24$. В случае бесконечных правильных графов было бы естественно ожидать, что дробь $1/n$ в первом равенстве теоремы 3.2 можно заменить на 0. Для бесконечной квадратной сетки это справедливо (что в точности и утверждает теорема 1.1(B)). Однако для бесконечных графов аналог теоремы 3.2 верен не всегда. Контрпримером служит бесконечное бинарное дерево (степень каждой вершины в таком дереве равна 3).

Дальнейшая часть § 3 не используется при доказательстве основного результата статьи. Покажем, как рассуждения из доказательства теоремы 3.2 позволяют получить ещё несколько любопытных утверждений. Правильный граф будем называть *диаметрально симметричным*, если его вершины можно разбить на пары *диаметрально противоположных* так, что перестановка вершин, одновременно меняющая между собой вершины в каждой паре, является самосовмещением графа, и любой поворот вокруг какой-либо вершины графа оставляет на месте также и её диаметрально противоположную вершину. Для (полу)правильных многогранников такое разбиение на пары строится с помощью центральной симметрии многогранника.

ТЕОРЕМА 3.4. *Цепь с единичными сопротивлениями такова, что её граф Γ с n вершинами является диаметрально симметричным. Пусть к двум её соседним вершинам подвели напряжение так, что по соединяющему их ребру потёк ток i . Тогда по диаметрально противоположному ребру течёт ток $i/(n-1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть удобное нам ненулевое значение i и для него доказать, что по диаметрально противоположному ребру течёт ток $i/(n-1)$. Обозначим соседние вершины, к которым подвели напряжение, через x и y . При доказательстве теоремы 3.2 для потенциала $u := u_x - u_y$ был найден ток

$$i := i_u(xy) = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Именно это значение i , не ограничивая общности, мы и рассмотрим. Пусть теперь x' и y' — вершины графа, диаметрально противоположные x и y соответственно. Ток $i_u(y'x')$ обозначим через i' . Пусть $v := u_{y'} - u_{x'}$. Рассмотрим теперь потенциал $u + v$. По каждому из рёбер xy и $y'x'$ будет течь ток $i + i'$.

Но $u+v=(u_x-u_{x'})-(u_y-u_{y'})$. Из-за симметричности и правильности графа потенциал $u_x - u_{x'}$ даёт ток $1/k$ по ребру xy , а потенциал $u_y - u_{y'} - 1/l$. Отсюда

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = i + i' = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + i'.$$

Значит,

$$i' = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{i'}{i} = \frac{1}{n-1}.$$

То есть по противоположному ребру течёт ток $i/(n-1)$ (причём если по ребру xy он тёт от x к y , то по ребру $x'y'$ он будет течь от y' к x'). \square

В частности, для икосаэдра получается ток $i/11$, додекаэдра $-i/19$, ромбододекаэдра $-i/13$, куба $-i/7$.

Следующий результат позволяет доказать теорему 3.2 для более широкого класса графов, чем рассмотренный ранее.

ТЕОРЕМА 3.5 (теорема Фостера [14]). *В конечной электрической цепи с n вершинами на произвольном связном графе с произвольными сопротивлениями рёбер выполнено*

$$\sum_{xy} \frac{R(x \leftrightarrow y)}{R(xy)} = n - 1,$$

где сумма берётся по всем неориентированным рёбрам xy электрической цепи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что потенциал u_z является решением следующей задачи Неймана: $i(z) = (n-1)/n$ и $i(w) = -1/n$ при $w \neq z$. Теорема получается из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{xy} \frac{R(x \leftrightarrow y)}{R(xy)} &= \sum_{xy} (i_{u_x}(xy) - i_{u_y}(xy)) = \sum_{xy} (i_{u_x}(xy) + i_{u_y}(yx)) = \\ &= \sum_x \sum_{xy} i_{u_x}(xy) = \sum_x \frac{n-1}{n} = n - 1. \end{aligned}$$

Второе равенство следует из того, что в любой цепи $i(xy) = -i(yx)$. Третье равенство следует из того, что суммировать по ориентированным рёбрам можно двумя способами. Первый — суммировать по неупорядоченной паре (начало, конец) и обоим возможным направлениям (левая часть), второй — суммировать по началу, а внутри этого суммирования суммировать по концу (правая часть). Четвёртое равенство является следствием определения потенциала u_x . Пятое равенство вытекает из того, что в графе n вершин.

Осталось пояснить лишь первое равенство. Рассмотрим две соседние вершины x и y . Положим $u := u_x - u_y$. Потенциал u является решением

задачи Неймана, в которой в вершину x входит ток 1, а из вершины y выходит ток 1. По определению эффективного сопротивления между вершинами x и y получим

$$R(x \leftrightarrow y) = \frac{u(x) - u(y)}{i_u(x)}.$$

В доказательстве теоремы 3.2 было замечено, что $i_u(x) = 1$. По определению тока по ребру, имеем

$$u(x) - u(y) = i_u(xy)R(xy).$$

Объединяя это, получаем

$$\frac{R(x \leftrightarrow y)}{R(xy)} = i_u(xy).$$

Наконец, по определению i

$$\frac{R(x \leftrightarrow y)}{R(xy)} = i_{u_x}(xy) - i_{u_y}(xy). \quad \square$$

Из теоремы Фостера следует теорема 3.2 для *рёберно-транзитивного* графа с единичными сопротивлениями — графа, для любых двух рёбер которого существует самосовмещение этого графа, переводящее первое ребро во второе (см. задачу 10 на стр. 63). Стоит заметить, что именно в этой общности теорема 3.2 была доказана в статье [19]. Класс рёберно-транзитивных графов шире, чем класс правильных графов. Простейший пример рёберно-транзитивного графа, который не является правильным, — это граф Дойля (известный также как граф Хольта, см. [9, 10, 16] и рис. 4).

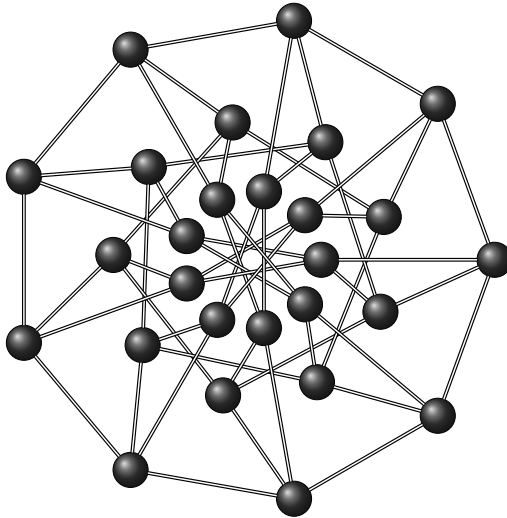


Рис. 4. Граф Дойля

§ 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВУМЕРНОЙ КВАДРАТНОЙ СЕТКЕ

Теперь настало время обратиться к бесконечным электрическим цепям. Замечательное введение в этот предмет имеется у Земаяна [30]. Наше изложение во многом следует его подходу.

Начиная с этого момента все электрические цепи будут иметь единичные сопротивления рёбер.

Приведём определения понятий, используемых в формулировке теоремы 1.1(В). Рассмотрим *бесконечную квадратную сетку* \mathbb{Z}^2 , состоящую из точек с целочисленными координатами, в которой все соседние точки (то есть точки на расстоянии 1) соединены единичными сопротивлениями.

Для функции u , заданной в узлах сетки \mathbb{Z}^2 , будем обозначать через \square *оператор усреднения*³⁾ по соседним вершинам:

$$\square u(m, n) := \frac{u(m-1, n) + u(m+1, n) + u(m, n-1) + u(m, n+1)}{4}.$$

В случае сетки \mathbb{Z}^2 данное ранее определение гармонической функции становится таким: функция u гармонична в точке (m, n) , если $\square u(m, n) = u(m, n)$.

Назовём *стандартным потенциалом на \mathbb{Z}^2* функцию $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую следующим аксиомам (сравните с аксиомами 1'-2 в § 2):

АКСИОМА 1'' (граничное условие Неймана и симметрия).

$$i_u(0, 0) = 1, \quad i_u(1, 0) = -1 \quad \text{и} \quad u(0, 0) = -u(1, 0).$$

АКСИОМА 2'' (правило токов Кирхгофа).

$$i_u(m, n) = 0 \quad \text{при} \quad (m, n) \neq (0, 0), (1, 0).$$

АКСИОМА 3'' (конечность тепловой мощности). $Q_u < \infty$.

Формула для тока на сетке \mathbb{Z}^2 имеет особенно простой вид:

$$i_u(m, n) = 4u(m, n) - u(m-1, n) - u(m+1, n) - u(m, n-1) - u(m, n+1).$$

Таким образом, стандартный потенциал — это функция, гармоническая во всех узлах сетки \mathbb{Z}^2 , кроме точек $(0, 0)$ и $(0, 1)$, для которых $i_u(0, 0) = 1$, $i_u(1, 0) = -1$. Кроме того, тепловая мощность этой функции конечна и $u(0, 0) = -u(1, 0)$.

³⁾ Часто рассматривается также *дискретный оператор Лапласа* $\Delta := \square - 1$, где 1 обозначает тождественное отображение.

По аналогии с эффективным сопротивлением конечных электрических цепей (1) определим сопротивление между соседними узлами сетки \mathbb{Z}^2 как

$$R((0, 0) \leftrightarrow (1, 0)) := \frac{u(0, 0) - u(1, 0)}{i_u(0, 0)}.$$

Наше определение стандартного потенциала годится не для любой бесконечной электрической цепи. Например, для бесконечного дерева, у которого из каждой вершины выходит ровно 3 ребра, стандартный потенциал и сопротивление между соседними узлами не определяются однозначно аналогичными аксиомами. Существует другой подход к определению потенциала и сопротивления бесконечных электрических цепей с помощью «исчерпывания» конечными цепями. При таком подходе главная трудность заключается в обосновании корректности предельного перехода. Преодолеть её непросто, поэтому мы такой подход обсуждать не будем.

Как отмечалось ранее, для сопротивления между соседними узлами сетки \mathbb{Z}^2 остаётся справедливой теорема 3.2, если в ней дробь $1/n$ заменить нулём. Приведём несколько убедительных рассуждений «на физическом уровне строгости», обосновывающих этот результат. Как мы увидим, каждое такое рассуждение опирается на тот или иной «очевидный» факт, доказательство которого, на самом деле, совсем не элементарно и даже сложнее доказательства основного результата.

РАССУЖДЕНИЕ С СУПЕРПОЗИЦИЕЙ (см. ссылки в [30]). Будем рассуждать так же, как в доказательстве теоремы 3.2, только заменим $1/n$ нулём. Пусть $x := (0, 0)$ и $y := (0, 1)$. Рассмотрим следующие две ситуации. В первом случае подадим в узел x единичный ток, а во все остальные узлы — нулевые токи (это возможно, так как цепь бесконечная). Из соображений симметрии, по всем четырём рёбрам, выходящим из вершины x , текут одинаковые токи. Значит, по ребру xy течёт ток $1/4$. Во втором случае подадим единичный ток в узел y , а в остальные узлы — нулевые токи. По ребру xy течёт ток $-1/4$. Возьмём разность этих двух распределений тока. Теперь в узел x единичный ток входит, а из узла y он выходит. Ток по ребру xy равен $1/4 + 1/4 = 1/2$. Значит, разность потенциалов между x и y равна $1/2$. Поскольку в x втекает единичный ток, сопротивление между x и y равно $1/2$. \square

Критика рассуждения с суперпозицией, [30]. Это рассуждение неявно опирается на следующие два факта. Во-первых, оно использует существование функции Грина на сетке \mathbb{Z}^2 , то есть такого потенциала $u_x(m, n)$, для которого ток в узле x ненулевой, а во всех остальных узлах нулевой. Во-вторых, оно использует конечность тепловой мощности для разности

$u_x(m, n) - u_y(m, n)$ двух функций Грина (чтобы можно было утверждать, что эта разность есть стандартный потенциал). Последнее утверждение совсем не очевидно, так как сама функция Грина неограниченно возрастает на бесконечности и имеет бесконечную тепловую мощность.

РАССУЖДЕНИЕ С НАЛОЖЕНИЕМ ШИНЫ. Рассуждение с наложением шины — это попытка исправить недостатки в предыдущем рассуждении. Наложим шину с нулевым сопротивлением на периметр очень большого квадрата $[-N, N] \times [-N, N]$. Потенциалы на бесконечности стремятся к нулю, поэтому наложение шины мало повлияет на значение искомого сопротивления. Дальнейшие рассуждения проводятся с точностью до погрешности, которая стремится к нулю с ростом N . Если источник единичного тока подключён к точке $(0, 0)$ и шине, то из точки $(0, 0)$ в каждый из четырёх соседних узлов течёт ток, равный $1/4$. Если же источник единичного тока подключён к шине и точке $(1, 0)$, то из четырёх соседних узлов в точку $(1, 0)$ втекает ток, равный $1/4$. Значит, при подключении обоих источников тока по ребру между $(0, 0)$ и $(1, 0)$ будет течь ток $1/2$ и разность потенциалов в этих точках тоже будет равна $1/2$. Поскольку в $(0, 0)$ втекает единичный ток, сопротивление между соседними узлами сетки равно $1/2$. \square

Критика рассуждения с наложением шины. Наложённая нами шина симметрична относительно точки $(0, 0)$, но не точки $(1, 0)$. Поэтому мы не можем сделать вывод, что во второй ситуации все токи, вытекающие из узла $(1, 0)$, равны $1/4$. Можно показать, что эти токи близки к $1/4$ при большом N , но для этого требуются тонкие оценки потенциала в рассматриваемой электрической цепи в узлах, соседних с шиной.

Приведём теперь другие рассуждения, которые, в отличие от предыдущих, сравнительно легко доводятся до строгого доказательства.

РАССУЖДЕНИЕ С ДВОЙСТВЕННОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПЬЮ, [29]. Рассмотрим *двойственную электрическую цепь*, изображённую на рис. 5 пунктирными линиями. Это тоже квадратная сетка, поэтому сопротивление R между её соседними узлами такое же, как у исходной. Покажем, что сопротивления двойственных цепей дают в сумме 1 (тогда каждое из этих сопротивлений равно $1/2$).

Для этого укажем следующий способ построения стандартного потенциала на двойственной цепи, исходя из стандартного потенциала на исходной. Положим значения потенциала на концах ребра двойственной цепи, пересекающего ребро исходной цепи между $(0, 0)$ и $(0, 1)$, равными $(1 - R)/2$ и $(R - 1)/2$, соответственно. На каждом из остальных рёбер двойственной цепи положим разность потенциалов равной току через пересекающее

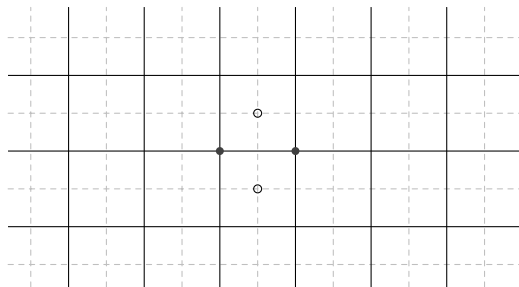


Рис. 5. Двойственные электрические цепи

его ребро исходной цепи (с подходящим знаком). Нетрудно убедиться (см. задачу 8 на стр. 63), что этим корректно определяется некоторая функция на двойственной цепи, удовлетворяющая аксиомам 1''–3'' с точностью до поворота на 90 градусов. Значит, построенная функция — стандартный потенциал и сопротивление двойственной цепи равно $1 - R$. \square

Приведённое рассуждение использует только существование и единственность стандартного потенциала, которые будут доказаны в § 5. Недостаток этого рассуждения в том, что оно использует специфику сетки \mathbb{Z}^2 и его трудно обобщить на другие бесконечные правильные графы. Поэтому мы не разбираем его подробно.

РАССУЖДЕНИЕ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ПЕРЕХОДОМ. Сетка на торе \mathbb{Z}_{2n}^2 — это правильный граф, который «стремится» к сетке \mathbb{Z}^2 при неограниченном возрастании числа n . Поэтому сопротивление между соседними узлами сетки на торе \mathbb{Z}_{2n}^2 стремится с одной стороны, к сопротивлению между соседними узлами двумерной сетки, а с другой — к $1/2$, по теореме 3.2. \square

Именно это рассуждение мы разберём подробно в последующих параграфах.

§ 5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОТЕНЦИАЛЕ НА КВАДРАТНОЙ СЕТКЕ

Установим основные свойства потенциала на бесконечной квадратной сетке \mathbb{Z}^2 . Наши рассуждения элементарны и основываются на методе релаксации (см., например, [5, с. 32–34]) и энергетических оценках, восходящих к Л. А. Люстернику [26, § 4.2].

ТЕОРЕМА 5.1 (теорема существования стандартного потенциала). *Стандартный потенциал на \mathbb{Z}^2 существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомая функция $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ будет пределом последовательности функций, которую мы построим, используя следующую ите-

рациональную процедуру (*метод релаксации*). Выберем последовательность узлов $(m_k, n_k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$, где $k \geq 0$, посещающую каждый узел, кроме $(0, 0)$ и $(1, 0)$, бесконечно много раз. Последовательность функций $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ задаётся начальными условиями

$$u_0(0, 0) = 1, \quad u_0(m, n) = 0 \quad \text{при } (m, n) \neq (0, 0),$$

граничными условиями

$$u_k(0, 0) = 1, \quad u_k(1, 0) = 0 \quad \text{при } k \geq 0$$

и рекуррентным соотношением

$$u_{k+1}(m, n) = \begin{cases} \square u_k(m, n) & \text{при } (m, n) = (m_k, n_k), \\ u_k(m, n) & \text{при } (m, n) \neq (m_k, n_k). \end{cases} \quad (2)$$

Докажем по индукции, что построенная последовательность функций удовлетворяет неравенствам

$$u_k(m, n) \leq u_{k+1}(m, n), \quad (3)$$

$$u_k(m, n) \leq \square u_k(m, n) \quad (4)$$

при всех m, n, k . При $k = 0$ эти неравенства очевидны. При произвольном $k \geq 0$ первое неравенство следует из второго. Действительно, при $(m, n) = (m_k, n_k)$ имеем

$$u_k(m_k, n_k) \leq \square u_k(m_k, n_k) = u_{k+1}(m_k, n_k),$$

а при $(m, n) \neq (m_k, n_k)$ выполняется равенство

$$u_k(m, n) = u_{k+1}(m, n).$$

Значит, для доказательства шага индукции достаточно проверить, что из (3)–(4) вытекает неравенство

$$u_{k+1}(m, n) \leq \square u_{k+1}(m, n).$$

Снова рассмотрим два варианта. Если $(m, n) = (m_k, n_k)$, то

$$u_{k+1}(m_k, n_k) = \square u_k(m_k, n_k) = \square u_{k+1}(m_k, n_k),$$

поскольку в узлах, соседних с (m_k, n_k) , на шаге $k + 1$ значения функции не менялись. Если же $(m, n) \neq (m_k, n_k)$, то

$$u_{k+1}(m, n) = u_k(m, n) \leq \square u_k(m, n) \leq \square u_{k+1}(m, n).$$

Требуемые неравенства (3)–(4) доказаны.

Мы получили, что в каждой точке $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ числа $\{u_k(m, n)\}$ образуют неубывающую последовательность, содержащуюся в отрезке $[0, 1]$. Значит, $u_k(m, n)$ стремятся к значению некоторой предельной функции $v(m, n)$. Переходя к пределу в равенстве (2) (по такой подпоследовательности индексов k , для которых (m_k, n_k) — фиксированная точка), получаем, что $v(m, n)$ есть гармоническая функция везде, кроме точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Искомая функция получается линейным преобразованием:

$$u(m, n) := \frac{v(m, n) - v(1 - m, -n)}{i_v(0, 0) - i_v(1, 0)}.$$

Здесь

$$i_v(0, 0) \geq v(0, 0) - v(1, 0) = 1 \quad \text{и} \quad i_v(1, 0) \leq v(1, 0) - v(0, 0) = -1,$$

поэтому знаменатель ненулевой.

Получаем, что функция $u(m, n)$ тоже гармоническая везде, кроме точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Граничные условия Неймана и симметрия проверяются непосредственно.

Проверим, что тепловая мощность Q_u конечна. На каждом шаге метода релаксации тепловая мощность не увеличивается, так как для вершины $(m, n) = (m_k, n_k)$ минимум квадратного трёхчлена

$$(u_k(m+1, n) - t)^2 + (u_k(m-1, n) - t)^2 + (u_k(m, n+1) - t)^2 + (u_k(m, n-1) - t)^2$$

достигается при

$$t = \square u_k(m, n) = u_{k+1}(m, n).$$

Поэтому тепловая мощность функции u_k остаётся ограниченной:

$$Q_{u_k} \leq Q_{u_0} = 4.$$

На любом квадрате $N \times N$ тепловая мощность для функции u_k стремится к тепловой мощности функции v . Значит, $Q_v \leq 4$, а следовательно, тепловая мощность Q_u тоже конечна:

$$Q_u \leq \frac{4Q_v}{i_v(0, 0) - i_v(1, 0)} \leq 8. \quad \square$$

ТЕОРЕМА 5.2 (теорема единственности стандартного потенциала). *Существует не более одного стандартного потенциала на \mathbb{Z}^2 .*

ЛЕММА 5.3 (лемма о тепловой мощности пути). *Пусть вершины x и y соединены в электрической цепи с единичными сопротивлениями путём из m рёбер. Тогда тепловая мощность этого пути не меньше, чем $(u(x) - u(y))^2/m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть путь из x в y состоит из вершин $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$. Тогда по неравенству Коши — Буняковского тепловая мощность пути не меньше, чем

$$\sum_{k=0}^{m-1} (u(x_{k+1}) - u(x_k))^2 \geq \frac{(u(x) - u(y))^2}{m}. \quad \square$$

Обозначим через Π_n прямоугольник $[-n, n+1] \times [-n, n]$, а через $\partial\Pi_n$ — его границу (см. рис. 6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Пусть есть два различных стандартных потенциала u_1 и u_2 . Рассмотрим их разность $u := u_1 - u_2$. Для неё по-прежнему $u(0, 0) = -u(1, 0)$, тепловая мощность $Q_u \leq 2Q_{u_1} + 2Q_{u_2}$

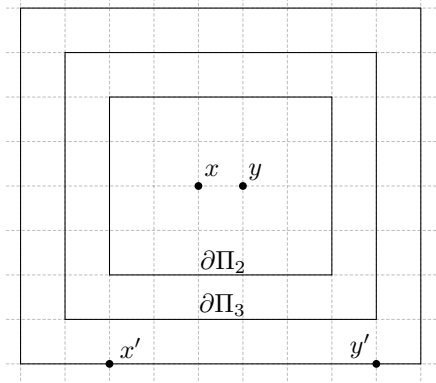


Рис. 6. Прямоугольники Π_n

по-прежнему конечна, но $i_u(x) = 0$ уже во всех узлах x сетки. Докажем, что такая функция u тождественно равна нулю. Предположим, что $u(x) < u(y)$ для каких-то двух соседних узлов x и y , например, $x = (0, 0)$ и $y = (1, 0)$. Рассмотрим прямоугольник Π_n (см. рис. 6). Так как $i_u = 0$ внутри прямоугольника Π_n , по принципу максимума (теорема 2.5) найдутся узлы $x', y' \in \partial\Pi_n$, для которых $u(x') \leq u(0, 0)$ и $u(1, 0) \leq u(y')$. Соединим x' и y' путём, проходящим по границе $\partial\Pi_n$. Он содержит не более $8n + 2$ вершин, поэтому по лемме о тепловой

мощности пути (лемма 5.3) на нём выделяется тепловая мощность не менее $\frac{|u(x') - u(y')|^2}{8n + 2}$, что не менее $\frac{|u(0, 0) - u(1, 0)|^2}{8n + 2}$. Поэтому общая тепловая мощность

$$Q_u \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u(0, 0) - u(1, 0)|^2}{8n + 2},$$

то есть бесконечна. Полученное противоречие доказывает, что неравенство $u(x) < u(y)$ невозможно. Значит, u — константа. Поскольку $u(0, 0) = -u(1, 0)$, функция u равна нулю тождественно, то есть $u_1 = u_2$. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Стандартный потенциал u на \mathbb{Z}^2 удовлетворяет функциональному уравнению $u(1 - t, -n) = -u(t, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функция $\tilde{u}(t, n) := -u(1 - t, -n)$ тоже является стандартным потенциалом на \mathbb{Z}^2 . Значит, по теореме единственности (теорема 5.2), получаем $u(1 - t, -n) = -u(t, n)$. \square

ЛЕММА 5.5 (лемма о достижении максимума). *Для любого $n \in \mathbb{N}$ максимум стандартного потенциала u на \mathbb{Z}^2 , взятый по всем узлам, не лежащим в Π_{n-1} , достигается на $\partial\Pi_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \sup_{x \notin \Pi_{n-1}} u(x)$. По следствию 5.4 получим $M \geq 0$. Рассмотрим часть сетки \mathbb{Z}^2 между прямоугольниками Π_n и Π_k с параметрами $n < k$. Ясно, что для достаточно больших k максимум функции u по такой фигуре будет больше $M/2$. По принципу максимума 2.5 максимум u по фигуре достигается на границе этой фигуры. Предположим, что при каком-то k он достигается на $\partial\Pi_k$. Тогда и при всех $m > k$ максимум по части сетки \mathbb{Z}^2 между прямоугольниками Π_n и Π_m достигается на $\partial\Pi_m$. По следствию 5.4 граница $\partial\Pi_m$ содержит две точки x' и y' , такие что $u(x') > M/2$, $u(y') < -M/2$. Соединим x' и y' путём, проходящим по $\partial\Pi_m$. Он содержит не более $8m + 2$ вершин, поэтому по лемме 5.3 на $\partial\Pi_m$ выделяется тепловая мощность не меньше $M^2/(8m + 2)$. Суммируя данные оценки по всем $m > k$, мы получаем, что тепловая мощность стандартного потенциала бесконечна, что противоречит определению. Значит, максимум u по рассматриваемой фигуре достигается на $\partial\Pi_n$. Следовательно, и максимум по внешности прямоугольника Π_n тоже достигается на границе $\partial\Pi_n$ этого прямоугольника. \square

ТЕОРЕМА 5.6 (теорема об убывании потенциала на бесконечности). *Стандартный потенциал u на \mathbb{Z}^2 равномерно стремится к нулю на бесконечности, т. е. $\max_{\partial\Pi_n} u \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M := \max_{\partial\Pi_n} u$. Тогда по лемме о достижении максимума 5.5 $\max_{\partial\Pi_m} u \geq M \geq 0$ при каждом $m < n$. По следствию 5.4 граница $\partial\Pi_m$ содержит две точки x' и y' , такие что $u(x') \geq M$, $u(y') \leq -M$. Соединим x' и y' путём, проходящим по границе. Он содержит не более $8m + 2$ вершин, поэтому по лемме о тепловой мощности пути 5.3 на границе прямоугольника Π_m выделяется тепловая мощность не менее $4M^2/(8m + 2)$. Значит, общая тепловая мощность Q_u не менее $\sum_{m=2}^n \frac{4M^2}{8m + 2}$. Значит,

$$M^2 \leq \frac{2Q_u}{\sum_{m=3}^n \frac{1}{m}}.$$

Это означает, что M стремится к нулю с ростом n , что и требовалось. \square

§ 6. СОПРОТИВЛЕНИЕ МЕЖДУ СОСЕДНИМИ УЗЛАМИ СЕТКИ

Полученные в предыдущем разделе результаты выполняются не только для сетки \mathbb{Z}^2 , но и в значительно более общей ситуации. Для доказательства теоремы 1.1(В) нам понадобятся их аналоги для сетки на торе \mathbb{Z}_{2n}^2 .

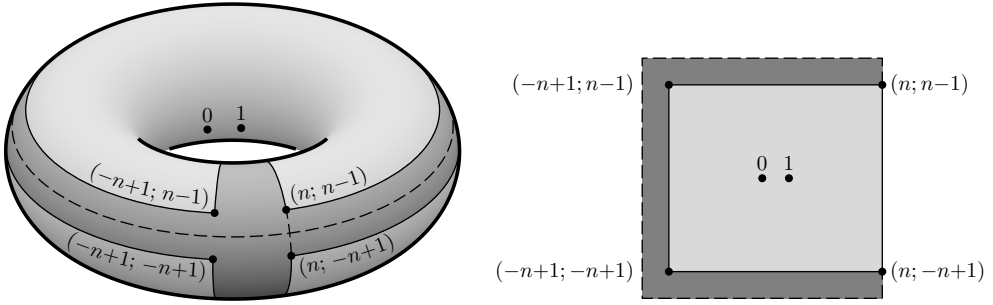


Рис. 7. Прямоугольник Π_{n-1} и его контур на торе

Подграф, в который переходит контур прямоугольника Π_{n-1} при склейке противоположных сторон квадрата с вершинами $(n; n)$, $(-n; n)$, $(-n; -n)$, $(n; -n)$, будем по-прежнему обозначать через $\Pi_{n-1} \subset \mathbb{Z}_{2n}^2$, см. рис. 7. Стандартный потенциал u_n на \mathbb{Z}_{2n}^2 определяется аналогично стандартному потенциалу на \mathbb{Z}^2 . Его существование и единственность следуют из теоремы 2.6. Для него выполняется следующий аналог теоремы 5.6.

ТЕОРЕМА 6.1 (теорема об убывании на бесконечности). *Значения стандартного потенциала u_n на \mathbb{Z}_{2n}^2 на подграфе Π_{n-1} равномерно стремятся к нулю, то есть $\max_{\Pi_{n-1}} u_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.6 и опирается на следующий результат предыдущей статьи [5].

ТЕОРЕМА 6.2 (закон сохранения энергии). *Если электрическая цепь имеет ровно 2 граничные вершины x и y , то выполнено равенство*

$$Q_u = \frac{(g(x) - g(y))^2}{R(x \leftrightarrow y)} = i_u(x)^2 \cdot R(x \leftrightarrow y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Пусть $M := \max_{\partial \Pi_n} u_n$. Тогда по принципу максимума $\max_{\partial \Pi_m} u \geq M \geq 0$ при каждом $m < n$. Аналогично следствию 5.4 получаем, что $\partial \Pi_m$ содержит две точки x' и y' , такие что $u(x') \geq M$, $u(y') \leq -M$. Соединим x' и y' путём, проходящим по границе. Он содержит не более $8m + 2$ вершин, поэтому по лемме 5.3 тепловая мощность, выделяемая на границе прямоугольника Π_m , не меньше $4M^2 / (8m + 2)$. Значит, общая тепловая мощность Q_{u_n} не менее $\sum_{m=2}^n \frac{4M^2}{8m + 2}$. Поэтому

$$M^2 \leq \frac{2Q_{u_n}}{\sum_{m=3}^n \frac{1}{m}}.$$

Обозначим через R_n сопротивление сетки \mathbb{Z}_{2n}^2 на торе между узлами $x = (0, 0)$ и $y = (1, 0)$. С одной стороны, согласно принципу максимума

$u_n(x) - u_n(y) = i(xy) \leq 1$ (ток, текущий по одному из рёбер, не превосходит суммарного тока). С другой стороны, по закону сохранения энергии 6.2 для стандартного потенциала $Q_{u_n} = R_n = u_n(x) - u_n(y)$. Значит, $Q_{u_n} \leq 1$ и M стремится к нулю с ростом n , что и требовалось. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1(B). По нашему соглашению, прямоугольник Π_{n-1} можно рассматривать одновременно и как подмножество сетки \mathbb{Z}^2 , и как подмножество сетки \mathbb{Z}_{2n}^2 на торе. Рассмотрим на этом прямоугольнике разность $u - u_n$ стандартных потенциалов на \mathbb{Z}^2 и \mathbb{Z}_{2n}^2 . По свойствам стандартных потенциалов, эта разность является гармонической функцией внутри прямоугольника Π_{n-1} . Значит, по принципу максимума 2.5, её максимальное значение достигается на границе $\partial\Pi_{n-1}$. По теоремам 5.6 и 6.1 это максимальное значение стремится к нулю с ростом n , значит, и в любой внутренней точке прямоугольника разность $u - u_n$ стремится к нулю. В частности, $u(0, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0, 0)$.

Из условия Неймана и симметрии следует, что сопротивление сетки \mathbb{Z}^2 между узлами $(0, 0)$ и $(1, 0)$ равно

$$R = \frac{u(0, 0) - u(1, 0)}{i_u(0, 0)} = 2u(0, 0),$$

а сопротивление сетки \mathbb{Z}_{2n}^2 на торе между теми же узлами равно

$$R_n = \frac{u_n(0, 0) - u_n(1, 0)}{i_{u_n}(0, 0)} = 2u_n(0, 0).$$

Пользуясь доказанной сходимостью для этих выражений и теоремой 3.2, получаем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Отметим одно следствие формулы $R = 2u(0, 0)$, установленной в этом доказательстве.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Значение стандартного потенциала на \mathbb{Z}^2 в начале координат равно $1/4$.*

§ 7. ДИСКРЕТНАЯ ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

Следующее утверждение, которое нам нужно для доказательства основной теоремы, является дискретным аналогом теоремы Лиувилля из комплексного анализа. Это не только красивый факт, но и удобный инструмент для изучения гармонических функций. Дискретная теорема Лиувилля известна по крайней мере с 1930-х годов, см. работу Капуляда [8], а также

Хейльбронна [15]. Два различных доказательства усиленной версии этой теоремы на сетке \mathbb{Z}^n (см. замечание 7.4) могут быть найдены у Даффина [12] (см. теорему 5 и следствие из неё) и Ито — Маккина [17, с. 124]. Дискретная теорема Лиувилля многократно обсуждалась на страницах «Математического Просвещения» (см. также [6]).

ТЕОРЕМА 7.1 (дискретная теорема Лиувилля). *Ограниченная гармоническая на сетке \mathbb{Z}^2 функция является константой.*

Приведём два разных доказательства.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1 (см. [8]). Рассмотрим функции

$$\Delta_x u(m, n) = u(m + 1, n) - u(m, n) \quad \text{и} \quad \Delta_y u(m, n) = u(m, n + 1) - u(m, n),$$

которые также будут ограниченными и гармоническими. Пусть функция $\Delta_x u(m, n)$ не равна нулю тождественно. Переходя при необходимости от функции u к $-u$, можно считать, что

$$M = \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |u(m, n)| = \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} u(m, n) > 0.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти точку (m, n) , для которой $u(m, n) \geq M - \varepsilon$. Из гармоничности функции u следует, что в каждой из соседних с (m, n) точек значения функции u не меньше, чем $M - 3\varepsilon$, а в каждой из точек, в которые из (m, n) можно дойти по рёбрам за k шагов, — не меньше, чем $M - 3^k \varepsilon$. Значение ε может быть выбрано сколь угодно малым, поэтому можно найти область сколь угодно большого размера, в которой значения функции u не меньше, чем $M/2$. В частности, на сетке \mathbb{Z}^2 можно найти квадрат $N \times N$ сколь угодно большого размера такой, что $\Delta_x u(m, n) > M/2$ для всех точек этого квадрата. Из этого следует, что функция $u(m, n)$ возрастёт при движении внутри квадрата параллельно оси Ox по крайней мере на $M \cdot N/2$. Но это противоречит ограниченности $u(m, n)$.

Противоречие показывает, что $\Delta_x u(m, n) = 0$. Аналогично проверяется, что $\Delta_y u(m, n) = 0$. Значит, u — постоянная функция. \square

Недостатком этого доказательства является то, что оно существенно использует специфику квадратной сетки. Следующее рассуждение проходит для широкого класса сеток на плоскости, а также позволяет установить более сильный факт. Оно использует лемму, доказанную в предыдущей статье [5, раздел 3.2].

ЛЕММА 7.2 (лемма о сопротивлении квадрата). *Сопротивление между центром и границей квадратной сетки размером $2n \times 2n$ стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n .*

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Предположим противное: пусть $u(m, n)$ — ограниченная гармоническая функция на сетке \mathbb{Z}^2 , которая не является константой. Тогда найдутся два соседних узла, в которых данная функция принимает разные значения. Для простоты будем считать, что $u(0, 0) = 0$, $u(1, 0) > 0$ (прибавление константы сохраняет гармоничность и ограниченность функции). Тогда

$$M = \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \{u(m, n)\} > 0.$$

Определим последовательность функций $\{u_k\}$ как последовательность потенциалов на клетчатых прямоугольниках Π_k с граничными условиями Дирихле

$$u_k(0, 0) = 0, \quad u_k(m, n)|_{(m,n) \in \partial \Pi_k} = M.$$

Тогда, согласно принципу максимума 2.5, в любой точке $(m, n) \in \Pi_k$ будет выполняться оценка $u(m, n) \leq u_k(m, n)$.

По лемме о сопротивлении квадрата 7.2 получаем, что сопротивление между узлом $(0, 0)$ и границей клетчатого прямоугольника Π_k стремится к бесконечности с ростом k . Так как разность потенциалов между $(0, 0)$ и границей фиксирована и равна M , втекающий в эту цепь через узел $(0, 0)$ ток стремится к нулю. Значит, ток, текущий по каждому из рёбер, выходящих из начала координат, стремится к нулю с ростом k . Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать значение k , чтобы выполнялись оценки $u(1, 0) \leq u_k(1, 0) \leq \varepsilon$. Но это противоречит предположению $u(1, 0) > 0$. Значит, $u(m, n)$ — постоянная функция. \square

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Если функция на сетке \mathbb{Z}^2 ограничена и удовлетворяет аксиомам 1'' и 2'' (но не обязательно 3''), то она совпадает со стандартным потенциалом на \mathbb{Z}^2 .

Иными словами, в определении стандартного потенциала u на \mathbb{Z}^2 вместо конечности тепловой мощности можно требовать выполнения более слабого условия — ограниченности функции u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v — ограниченная функция, удовлетворяющая аксиомам 1'' и 2''. Пусть u — стандартный потенциал на \mathbb{Z}^2 . Тогда функция $u - v$ ограничена и гармонична во всех узлах сетки \mathbb{Z}^2 . По дискретной теореме Лиувилля $u - v$ есть константа. Но, как и обе функции u и v , функция $u - v$ удовлетворяет условию симметрии $(u - v)(0, 0) = -(u - v)(1, 0)$, значит, функция $u - v$ тождественно равна нулю и v совпадает с u . \square

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Второе доказательство дискретной теоремы Лиувилля устанавливает на самом деле более сильное утверждение: всякая функция, гармоническая на сетке \mathbb{Z}^2 и ограниченная *снизу*, является константой.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Второе доказательство теоремы позволяет получить ещё одно усиление дискретного аналога теоремы Лиувилля: ограниченная функция, гармоническая на множестве $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, является константой.

Действительно, после того как мы переместили начало координат в выбранную нами точку, гармоничность функции в начале координат никак не использовалась. Поэтому, повторяя рассуждения из доказательства дискретной теоремы Лиувилля (меняя, если потребуется, знак данной функции), получаем, что значения данной функции в точках $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$ должны совпадать со значением в начале координат, то есть функция должна быть гармонической и в точке $(0, 0)$.

Таким образом, у непостоянной ограниченной функции гармоничность должна нарушаться по крайней мере в двух точках, как это и происходит в случае стандартного потенциала.

§ 8. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ

В предыдущей статье [5] мы подробно обсудили задачу о возвращении случайного блуждания. Постановка задачи о случайном блуждании восходит к Пирсону (см. [22]). Рэлей (см. [25]), отвечая на вопрос Пирсона, сразу заметил, что случайные блуждания можно анализировать методами гармонического анализа. Задача о возвращении случайного блуждания по сетке произвольной размерности была решена Пойа [24]. Доказательство с использованием электрических цепей, по-видимому, принадлежит Нэш-Вильямсу.

Приведём математическое определение случайного блуждания на сетке \mathbb{Z}^2 , о котором идёт речь в теореме 1.1(A) (мотивировка этого определения была дана в начале предыдущей статьи [5]). *Траекторией* длины $T + 1$ назовём упорядоченный набор $T + 1$ узлов квадратной сетки, причём узлы, соседние в наборе, являются соседними и в сетке. *Положением* в момент t назовём t -й узел в этом наборе. *Случайным блужданием*, стартующим в узле (m_0, n_0) , назовём отображение, которое каждой строке s длины T из символов ‘L’, ‘R’, ‘U’, ‘D’ сопоставляет траекторию длины $T + 1$ по следующим правилам:

1) Положение в момент 1 — это узел (m_0, n_0) .

2) Если (m, n) — положение в момент t , где $1 \leq t \leq T$, то положение в момент $t + 1$ — это:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (m + 1, n), & \text{если } y \neq (0, 0), (1, 0) \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'R'} ; \\ (m - 1, n), & \text{если } y \neq (0, 0), (1, 0) \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'L'} ; \\ (m, n + 1), & \text{если } y \neq (0, 0), (1, 0) \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'U'} ; \\ (m, n - 1), & \text{если } y \neq (0, 0), (1, 0) \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'D'} ; \\ (m, n), & \text{если } y = (0, 0) \text{ или } y = (1, 0). \end{array} \right.$$

Вероятностью $P_T(m, n)$ того, что случайное блуждание, стартующее из узла (m, n) , за T шагов достигнет узла $(0, 0)$ раньше, чем узла $(1, 0)$, назовём долю строк s длины T , для которых соответствующая траектория заканчивается узлом $(0, 0)$. Предел этой вероятности при $T \rightarrow \infty$ назовём вероятностью $P(m, n)$ того, что случайное блуждание, стартующее из узла (m, n) , достигнет узла $(0, 0)$ раньше, чем узла $(1, 0)$. В частности, $P(0, 0) = 1$, $P(1, 0) = 0$.

ТЕОРЕМА 8.1 (теорема существования). *Вероятность $P(m, n)$ существует, то есть для каждого узла (m, n) последовательность $P_T(m, n)$ имеет предел при $T \rightarrow \infty$.*

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $n_T(m, n)$ количество путей длины T на сетке \mathbb{Z}^2 , которые начинаются в узле (m, n) , проходят через узел $(0, 0)$ и попадают в узел $(1, 0)$ не позже, чем в узел $(1, 0)$. Ясно, что если такой путь длины T продолжить на 1 шаг любым из 4 возможных способов, то получится такой путь длины $T + 1$. Действительно, при любом продолжении пути он по-прежнему будет проходить через узел $(0, 0)$ и попасть в узел $(1, 0)$ сможет только позже, чем в $(0, 0)$. Значит, $n_{T+1}(m, n) \geq 4n_T(m, n)$. По определению

$$P_{T+1}(m, n) = \frac{n_{T+1}(m, n)}{4^{T+1}} \geq \frac{n_T(m, n)}{4^T} = P_T(m, n).$$

Получаем, что в каждой точке (m, n) последовательность $P_T(m, n)$ монотонно возрастает и ограничена сверху единицей. Значит, она имеет предел. \square

Приведём также набросок другого доказательства теоремы существования, похожего на доказательство теоремы 5.1 (важное отличие состоит в том, что в рекуррентном соотношении для $P_T(m, n)$ оператор усреднения применяется ко всем узлам одновременно, а не последовательно).

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению случайного блуждания последовательность функций $P_T(m, n)$ полностью характеризуется следующими свойствами:

- 1) (начальные условия) $P_0(0, 0) = 1$, $P_0(m, n) = 0$ при $(m, n) \neq (0, 0)$;
- 2) (граничные условия) $P_T(0, 0) = 1$, $P_T(1, 0) = 0$ при $T = 0, 1, 2, \dots$;
- 3) (рекуррентное соотношение)

$$P_{T+1}(m, n) = \square P_T(m, n) \quad \text{при } (m, n) \neq (0, 0), (1, 0). \quad (5)$$

Из этих свойств следует, что в каждом узле (m, n) сетки значения $P_T(m, n)$ образуют неубывающую последовательность, ограниченную сверху единицей. Для доказательства достаточно провести индукцию по пара-

метру T : при $(m, n) \neq (0, 0), (1, 0)$ имеем

$$P_{T+1}(m, n) = \square P_T(m, n) \geq \square P_{T-1}(m, n) = P_T(m, n).$$

Значит, во всех узлах сетки существует предел $\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(m, n)$ и функция $P(m, n)$ определена корректно. \square

Вероятность $P(m, n)$ обладает многими свойствами стандартного потенциала на \mathbb{Z}^2 .

ЛЕММА 8.2. *Функция $P(m, n)$ ограничена, гармонична во всех узлах, кроме точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$, и удовлетворяет функциональному уравнению $P(m, n) = 1 - P(1 - m, -n)$.*

Для доказательства леммы 8.2 нам понадобится следующее утверждение, которое является одним из вариантов теоремы Пойа, доказанной в предыдущей статье [5]. Для него мы приведём альтернативное доказательство.

ЛЕММА 8.3. *Случайное блуждание, стартующее в произвольном узле сетки \mathbb{Z}^2 , с вероятностью 1 достигнет начала координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.3. Пусть $Q_T(m, n)$ — вероятность того, что случайное блуждание, стартующее в узле (m, n) , достигнет начала координат не более чем за T шагов. В частности, $Q_T(0, 0) = 1$ для любого $T \geq 0$. По определению, в каждом узле (m, n) , отличном от начала координат, последовательность $\{Q_T(m, n)\}_{T=0}^{\infty}$ не убывает, находится в пределах от 0 до 1 и удовлетворяет уравнению

$$Q_{T+1}(m, n) = \square Q_T(m, n). \quad (6)$$

Значит, существует функция $Q(m, n) = \lim_{T \rightarrow \infty} Q_T(m, n)$ — вероятность попасть в начало координат, начиная из точки (m, n) . При этом $Q(0, 0) = 1$. Переходя в равенстве (6) к пределу при $T \rightarrow \infty$, получаем, что функция Q гармонична во всех узлах сетки \mathbb{Z}^2 за исключением, быть может, начала координат. Согласно замечанию 7.5 функция $Q(m, n)$ равна единице тождественно. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.2. Значения функции $P(m, n)$ лежат между нулём и единицей, поскольку аналогичным свойством обладает каждая из функций $P_T(m, n)$. Для доказательства гармоничности функции $P(m, n)$ достаточно перейти к пределу в равенстве (5).

Для вывода функционального уравнения заметим, что по соображениям симметрии величина $P(1 - m, -n)$ равна вероятности того, что случайное блуждание, стартующее из узла (m, n) , достигнет узла $(1, 0)$ раньше, чем узла $(0, 0)$. Поэтому $P(m, n) + P(1 - m, -n)$ равно вероятности того, что случайное блуждание, стартующее из узла (m, n) , достигнет хотя бы

одного из узлов $(0, 0)$ или $(1, 0)$. Согласно лемме 8.3 последняя вероятность тождественно равна единице, то есть $P(m, n) + P(1 - m, -n) = 1$. \square

СЛЕДСТВИЕ 8.4 (физическая интерпретация вероятности достижения). Вероятность $P(m, n)$ связана со стандартным потенциалом равенством

$$u(m, n) = \frac{1}{2} \left(P(m, n) - \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

в частности, $i_P(0, 0) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$v(m, n) := \frac{1}{2} \left(P(m, n) - \frac{1}{2} \right).$$

По лемме 8.2 она ограничена и удовлетворяет равенствам

$$v(0, 0) = -v(1, 0) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad i_v(0, 0) = -i_v(1, 0),$$

аналогичным свойствам $1''$ - $2''$ стандартного потенциала u . Заметим, что $i_v(0, 0) = -i_v(1, 0) \neq 0$, поскольку в противном случае v была бы непостоянной функцией ($v(0, 0) = -v(1, 0) = 1/2$), гармонической во всех узлах сетки \mathbb{Z}^2 , что противоречило бы дискретной теореме Лиувилля. Значит, можно рассмотреть функцию $v(m, n)/i_v(0, 0)$. Она ограничена, удовлетворяет условиям $1''$ - $2''$ и по следствию 7.3 совпадает со стандартным потенциалом, то есть

$$u(m, n) = \frac{v(m, n)}{i_v(0, 0)} = \frac{1}{i_P(0, 0)} \left(P(m, n) - \frac{1}{2} \right).$$

Подставляя в эту формулу $(m, n) = (0, 0)$ и пользуясь равенствами $P(0, 0) = 1$, $u(0, 0) = 1/4$ (следствие 6.3), находим значение $i_P(0, 0) = 2$, что и приводит к утверждению следствия. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 8.5. Отметим, что при доказательстве равенства (7) нельзя было непосредственно воспользоваться теоремой единственности 5.2, поскольку для функции P аксиома $3''$ (конечность тепловой мощности) априори может не выполняться. Рассуждениями из второго доказательства теоремы 8.1 в действительности можно получить конечность тепловой мощности для функции P , однако это требует более сложных соображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1(A). Вероятность возвращения в начало координат, по определению, есть

$$\frac{P(1, 0) + P(-1, 0) + P(0, 1) + P(0, -1)}{4} = 1 - \frac{i_P(0, 0)}{4}.$$

Подставляя в это равенство значение $i_P(0, 0) = 2$ из следствия 8.4, приходим к утверждению теоремы. \square

Таблица 1

Значения функции Грина $G(m, n)$

$n \backslash m$	-2	-1	0	1	2
-2	$\frac{8}{3\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$2 - \frac{4}{\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{8}{3\pi}$
-1	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$
0	$2 - \frac{4}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$2 - \frac{4}{\pi}$
1	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$
2	$\frac{8}{3\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$2 - \frac{4}{\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{8}{3\pi}$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.6. Приведённое доказательство теоремы 1.1(A) на первый взгляд может показаться слишком простым. Однако следует учесть, что, применяя следствие 8.4, мы опираемся на теоремы единственности и существования стандартного потенциала, дискретный аналог теоремы Лиувилля и теорему 1.1(B).

§ 9. ФУНКЦИЯ ГРИНА

В этом разделе мы приведём без доказательств некоторые факты о бесконечной квадратной сетке единичных сопротивлений. Центральную роль в дальнейшем рассказе будет играть *функция Грина* $G(m, n)$, которая определяется как сопротивление между узлами сетки \mathbb{Z}^2 с координатами $(0, 0)$ и (m, n) , см. задачу 1. (Отметим, что для более сложных сеток функция Грина определяется по-другому.)

Значения функции Грина $G(m, n)$ можно вычислить по формуле [28]

$$G(m, n) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi mx) \cdot \cos(\pi ny)}{\sin^2 \frac{\pi x}{2} + \sin^2 \frac{\pi y}{2}} dx dy.$$

Они были впервые найдены Маккри и Уиплом [20] (см. также книгу [23, стр. 372]), а их аналоги для треугольной и шестиугольной сеток — Аткинсоном и ван Стенвейком [7]. Значения при $|m|, |n| \leq 2$ даны в табл. 1.

Наиболее простая формула получается для диагональных значений

$$G(n, n) = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right). \quad (8)$$

По ним и по значению $G(1, 0) = 1/2$, найденному в теореме 1.1(B), остальные значения восстанавливаются исходя из гармоничности G вне начала

координат (см. ниже) и равенства $G(m, n) = G(n, m)$. Интересно, что в задаче о нахождении сопротивлений, как и в задаче о случайном блуждании, наблюдается асимптотическая изотропность сетки \mathbb{Z}^2 . В данном случае она проявляется в том, что при больших значениях $r = \sqrt{m^2 + n^2}$ значения $G(m, n)$ зависят главным образом лишь от расстояния до начала координат (см. [11, 28]):

$$G(m, n) = \frac{1}{2\pi}(2 \ln r + \ln 8 + 2\gamma) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где γ — постоянная Эйлера.

Функция Грина $G(m, n)$ однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяется следующими свойствами.

1^{'''}. $G(0, 0) = 0$.

2^{'''}. $G(m, n)$ гармонична во всех узлах сетки, кроме начала координат.

3^{'''}. $G(m, n) = O(\ln r)$.

Указанные свойства позволяют вычислять значения стандартного потенциала, исходя из значений функции Грина. Стандартный потенциал на двумерной сетке можно задать формулой

$$u(m, n) = \frac{1}{2}G(1 - m, n) - \frac{1}{2}G(m, n).$$

Действительно, по свойству 2^{'''} получаем, что $\frac{1}{2}G(1 - m, n) - \frac{1}{2}G(m, n)$ — гармоническая вне узлов $(0, 0)$ и $(1, 0)$ функция. Из равенства (9) следует, что она стремится к нулю на бесконечности. Так как $G(1, 0) = 1/2$, получаем, что $i_G(0, 0) = -2$. Значит, по дискретной теореме Лиувилля 7.1 она совпадает со стандартным потенциалом. В частности, это позволяет найти первые значения стандартного потенциала на \mathbb{Z}^2 (см. табл. 2).

Таблица 2

Значения стандартного потенциала $u(m, n)$

$n \backslash m$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$\frac{11}{4} - \frac{128}{15\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{5}{4} + \frac{4}{\pi}$	$\frac{5}{4} - \frac{4}{\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{11}{4} + \frac{128}{15\pi}$
1	$-\frac{41}{4} + \frac{197}{3\pi}$	$-\frac{7}{4} + \frac{17}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{7}{4} - \frac{17}{3\pi}$	$\frac{41}{4} - \frac{197}{3\pi}$
0	$\frac{63}{4} - \frac{148}{3\pi}$	$\frac{13}{4} - \frac{10}{\pi}$	$\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4} + \frac{2}{\pi}$	$-\frac{13}{4} + \frac{10}{\pi}$	$-\frac{63}{4} + \frac{148}{3\pi}$
-1	$-\frac{41}{4} + \frac{97}{3\pi}$	$-\frac{7}{4} + \frac{17}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{7}{4} - \frac{17}{3\pi}$	$\frac{41}{4} - \frac{97}{3\pi}$
-2	$\frac{11}{4} - \frac{128}{15\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{5}{4} + \frac{4}{\pi}$	$\frac{5}{4} - \frac{4}{\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{11}{4} + \frac{128}{15\pi}$

Таблица 3

Числа Делануа

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	9	11	13
2	1	5	13	25	41	61	85
3	1	7	25	63	129	231	377
4	1	9	41	129	321	681	1289

Ещё один любопытный факт заключается в том, что слагаемые в приведённой таблице, не содержащие числа π , — это, с точностью до знака и деления на 4, числа Делануа $D(m, n)$ (см. [27] и табл. 3), которые определяются как число путей из начала координат в точку (m, n) , состоящих из векторов $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Эти числа легко находятся из начального условия $D(0, 0) = 1$ и рекуррентного соотношения

$$D(m, n) = D(m - 1, n) + D(m, n - 1) + D(m - 1, n - 1).$$

Все эти результаты доказываются обычно с помощью рядов Фурье. Способ элементарного вычисления значений функции Грина $G(m, n)$ при $(m, n) \neq (0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ неизвестен (если не считать несколько искусственной «элементаризации», когда приближённое решение строится с помощью «элементарных» конечных рядов Фурье, а точное решение получается путём предельного перехода). В следующих задачах приводятся некоторые свойства функции Грина, которые удаётся доказать элементарно.

ЗАДАЧИ

Обозначим через $u_{m,n}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ функцию, которая определяется аналогично стандартному потенциалу на \mathbb{Z}^2 с заменой узла $(1, 0)$ на (m, n) .

1. Для любого узла (m, n) функция $u_{m,n}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ существует и единственна. В частности, корректно определено *сопротивление* между узлами $(0, 0)$ и (m, n) :

$$G(m, n) := \frac{u_{m,n}(0, 0) - u_{m,n}(m, n)}{i_u(0, 0)}.$$

2. С помощью формулы (8), стр. 60, и свойства $2'''$, стр. 61, найдите значения функции $G(m, n)$ при $m = 5$ и $0 \leq n \leq 5$.

3. С помощью таблицы значений функции $G(m, n)$ найдите значения функции $u_{1,1}(m, n)$ ($-2 \leq m, n \leq 3$).

4. С помощью формулы (8) объясните, почему в табл. 2 слагаемые, не содержащие числа π , с точностью до деления на 4 и знака совпадают с числами Делануа из табл. 3. Как будут выражаться через числа Делануа аналогичные слагаемые из табл. 1?

5. Объясните совпадение чисел вида $u(n, n)$ и $u(n, n + 1)$ при $n \geq 1$ (см. табл. 2).

6. Предположим, что любые две вершины x и y графа можно поменять местами некоторым самосовмещением этого графа. Тогда $R(x \leftrightarrow y) = 2(u_x(y) - u_x(x))$.

7. Докажите свойство $2'''$ функции Грина, пользуясь предыдущей задачей для сетки \mathbb{Z}_{2n}^2 на торе и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$.

8. Проверьте корректность построения и аксиомы $1''-3''$ для функции, построенной в «рассуждении с двойственными цепями» из § 4.

9. Останется ли справедливой теорема 3.2, если плоскость, с нарисованной на ней сеткой, свернуть в цилиндр? (Как нужно сворачивать плоскость, чтобы граф на цилиндре был правильным?)

10. Выведите теорему 3.2 из теоремы Фостера.

11. Выведите теорему 3.2 из *теоремы Кирхгофа о деревьях*: сопротивление между соседними вершинами в связном конечном графе равно вероятности того, что случайно выбранное остовное дерево этого графа содержит ребро, соединяющее выбранные вершины.

12. Пусть источник единичного тока подсоединён к двум узлам некоторой конечной электрической цепи. Тогда ток, протекающий по любому ребру этой цепи, не превосходит единицы.

13. Докажите, что правильный граф рёберно-транзитивен.

14. Докажите, что граф Дойля не является правильным.

15. Пусть у конечного связного графа эффективные сопротивления между любыми соседними вершинами равны. Является ли этот граф рёберно-транзитивным?

Ещё довольно много интересных задач можно найти в книге [2].

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны И. И. Богданову и А. И. Храброву за полезные обсуждения, а также Е. П. Вдовину за информацию о графе Дойля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Баранов Д., Скопенков М., Устинов А. Сопротивление между узлами решётки // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 229–230.

- [2] *Вавилов В. В., Устинов А. В.* Задачи на клетчатой бумаге. М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 2006.
- [3] *Гальперин Г. А.* Мой друг Андрей Ходулёв // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 4. М.: МЦНМО, 2000. С. 8–32.
- [4] *Скопенков М., Прасолов М., Дориченко С.,* Разрезания металлического прямоугольника // Квант. № 3. 2011. С. 10–16.
- [5] *Скопенков М., Смыкалов В., Устинов А.* Случайные блуждания и электрические цепи // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 16. М.: МЦНМО, 2012. С. 25–47.
- [6] *Храбров А. И.* Дискретные гармонические функции // Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 2005 год. СПб.: Невский диалект, 2005. С. 112–145.
- [7] *Atkinson D., van Steenwijk F. J.* Infinite resistive lattices // American Journal of Physics. 1999. V. 67. P. 486–492.
- [8] *Capoulade J.* Sur quelques propriétés des fonctions harmoniques et des fonctions preharmoniques // Mathematica (Cluj). 1932. V. 6. P. 146–151.
- [9] *Doyle P. G.* A 27-vertex graph that is vertex-transitive and edge-transitive but not 1-transitive. ArXiv Mathematics e-prints <http://arxiv.org/abs/math/0703861>.
- [10] *Doyle P. G.* On Transitive Graphs // Senior Thesis. Cambridge, MA, Harvard College, April 1976.
- [11] *Duffin R., Shaffer D.* Asymptotic expansion of double Fourier transforms // Duke Math. J. 1960. V. 27. P. 581–596.
- [12] *Duffin R. J.* Discrete potential theory // Duke Math. J. 1953. V. 20. P. 233–251.
- [13] *Flanders H.* Infinite networks: I—Resistive networks // IEEE Transactions on circuit theory. 1971. V. 18, № 3. P. 326–331.
- [14] *Foster R. M.* The average impedance of an electrical network // Reissner Anniversary Volume, Contributions to Applied Mechanics. J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1948. P. 333–340.
- [15] *Heilbronn H.* On discrete harmonic functions // Proc. Camb. Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 194–206.
- [16] *Holt D.* A graph which is edge-transitive but not arc-transitive // J. Graph Theory. John Wiley & Sons, New York, NY. 1981. V. 5. P. 201–204.
- [17] *Ito K., McKean H. P., Jr.* Potentials and the random walk // Illinois J. of Math. 1960. V. 4. P. 119–132.
- [18] *Kirchhoff G. R.* Ueber die Aufloesung der Gleichungen auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Stroeme gefuert wird // Ann. Phys. 1847. Bd. 72. S. 498–508. Русский перевод: *Кирхгоф Г. Р.* Избранные труды. М.: Наука, 1988. С. 170–178.
- [19] *Klein D. J., Randic M.* Resistance distance // Journal of Mathematical Chemistry. 1993. V. 12. P. 81–95.

- [20] *McCrea W. H., Whipple F. J. W.* Random paths in two and three dimensions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1940. V. 60. P. 281–298.
- [21] *Murdoch B. H.* Preharmonic functions. Thesis, Princeton, 1952.
- [22] *Pearson K.* The problem of the random walk // Nature. London, 1905. V. 72. P. 294, 342.
- [23] *van der Pol B., Bremmer H.* Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge Univ. Press, 1950.
- [24] *Pólya G.* Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz // Math. Ann. 1921. Bd. 84. S. 149–160.
- [25] *Rayleigh J. W. S.* The problem of the random walk // Nature. London, 1905. V. 72. P. 318.
- [26] *Skopenkov M.* The boundary value problem for discrete analytic functions // Adv. Math. 2013. V. 240. P. 61–87.
- [27] *Sloane N. J. A.* Sequence A008288 in «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences». <http://oeis.org/>.
- [28] *Spitzer F.* Principles of Random Walks. New York: Van Nostrand, 1964. Русский перевод: *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
- [29] *Thomassen C.* Resistances and currents in infinite electrical networks // Journal of Combinatorial Theory. Ser. B. 1990. V. 49, Iss. 1. P. 87–102.
- [30] *Zemanian A. H.* Infinite electrical networks: a reprise // IEEE Transactions on circuits and systems. 1988. V. 35, № 11. P. 1346–1358.

М. Б. Скопенков, ИППИ РАН
skopenkov@rambler.ru

А. А. Пахарев, НИУ ВШЭ
a.paharev@gmail.com

А. В. Устинов, Хабаровское отделение ИПМ ДВО РАН
alexey.ustinov@gmail.com