Наш семинар: математические сюжеты

Неравенство Бернштейна, тождество Рисса и формула Эйлера для ряда обратных квадратов

С. Б. Гашков

§ 1. Введение

Тригонометрия учит нас, что, скажем, Венеру Милосскую можно свести к серии математических формул, а потому, если даже её статую в Лувре и уничтожить, то, проявив некоторое терпение, можно её восстановить с помощью тех же формул, притом любое число раз, абсолютно такую же: все формы, линии, объёмы, текстуру камня, потёртости, вес и эстетический восторг включительно.

Блез Сандрар, «Принц-потрошитель,
или Женомор», 1917 г.

В начале прошлого века некоторые серьёзные и известные математики не считали ниже своего достоинства заниматься задачами, которые сейчас производят впечатление олимпиадных, причём чуть ли не школьного типа. Например, академик Сергей Натанович Бернштейн написал ряд статей, посвящённых различным неравенствам для тригонометрических многочленов (см. [2, 3]). Подобными задачами занимались, отчасти соревнуясь с С. Н. Бернштейном, Марсель Рисс[1)], Фейер, Юнг, Сегё, Сасс, Эгервари, Джексон и др. Самые простые из доказанных ими теорем действительно превратились в олимпиадные задачи (и их можно найти в различных сборниках подобных задач), но многие замечательные и красивые факты остаются малоизвестными. Невзирая на высказанное знаменитым Ж. Дьёдонне (в книге «Линейная алгебра и элементарная геометрия») мнение о том, что тригонометрия нужна лишь для астрономов, геодезистов и составителей задачников по тригонометрии, автор статьи надеется, что красивые классические теоремы, которые в ней найдёт читатель, заслуживают большей популярности.

Далее будут приведены формулировки и доказательства некоторых неравенств С. Н. Бернштейна для тригонометрических и алгебраических многочленов. Эти доказательства основаны на использовании разнообразных тригонометрических тождеств, связанных с тождеством М. Рисса, выражающим значение производной тригонометрического многочлена в данной точке через его значения в некоторых других точках. Хотя это тождество не выглядит элементарным из-за вхождения в него производной, оно тесно связано с многими элементарными тождествами, частные случаи которых можно предлагать в качестве задач школьникам.

Для краткости, а также с целью демонстрации простоты применяемых в статье рассуждений, в ней выбрана форма изложения в виде последовательности задач, к которым даются указания или полные решения. Многие из этих задач представляют самостоятельный интерес и могут быть использованы на учебных занятиях со школьниками или студентами. Также для краткости вместо чисто тригонометрических выкладок часто используются равносильные вычисления с комплексными числами.

Некоторые свойства тригонометрических многочленов

Тригонометрическим многочленом порядка n называется сумма вида

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где хотя бы одно из чисел a_n или b_n отлично от нуля. Коэффициенты a_k, b_k могут быть как действительными, так и комплексными (в случае необходимости поле коэффициентов указывается).

1. Докажите, что произведение тригонометрических многочленов порядков n и m есть тригонометрический многочлен порядка $n+m$.

[1)] Брат известного математика Ференца Рисса. Чтобы их различать, пишем инициалы. Так как есть несколько математиков с фамилией Бернштейн, также во избежание путаницы пишем инициалы.

Указание. Примените формулы преобразования произведения синусов (косинусов) в сумму.

Далее используется формула Эйлера $\cos x + i\sin x = e^{ix} = \exp ix$, где i — мнимая единица.

2. Действительный тригонометрический многочлен порядка n имеет не более $2n$ действительных корней с учётом кратности. Докажите, что если корней ровно $2n$ и эти корни суть x_k, $k = 1, \ldots, 2n$, то

$$t_n(x) = A\sin\Bigl(\frac{x-x_1}{2}\Bigr)\ldots\sin\Bigl(\frac{x-x_{2n}}{2}\Bigr).$$

Указание. Достаточно воспользоваться представлением тригонометрического многочлена порядка n в виде $e^{-inz}P_{2n}(e^{iz})$ и заметить, что $e^{-inz} \neq 0$ и P_{2n} не имеет нулевых корней. Представляя корни в виде e^{iz_k}, имеем

$$t_n(z) = e^{-inz}P_{2n}(e^{iz}) = c_n e^{-inz}\prod_{k=1}^{2n}(e^{iz} - e^{iz_k}) = c_n\prod_{k=1}^{2n}\bigl(e^{i\frac{z}{2}} - e^{i\frac{-z+2z_k}{2}}\bigr) =$$

$$= c_n e^{\frac{i}{2}\sum\limits_{k=1}^{2n} z_k}\prod_{k=1}^{2n}\bigl(e^{i\frac{z-z_k}{2}} - e^{i\frac{z_k-z}{2}}\bigr) = A\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{z-z_k}{2}.$$

3. Докажите, что при чётном n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(kx+\alpha) = \frac{\cos\Bigl(\alpha+\dfrac{nx}{2}\Bigr)\cos\Bigl(\dfrac{(n+1)x}{2}\Bigr)}{\cos\dfrac{x}{2}},$$

а при нечётном n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(kx+\alpha) = \frac{\sin\Bigl(\alpha+\dfrac{nx}{2}\Bigr)\sin\Bigl(\dfrac{(n+1)x}{2}\Bigr)}{\cos\dfrac{x}{2}}$$

там, где эти дроби определены.

Решение. Перепишем

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(kx+\alpha)$$

в виде

$$\mathrm{Re}\Bigl(e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-e^{ix})^k\Bigr)$$

и применим формулу суммы членов геометрической прогрессии:

$$\mathrm{Re}\Bigl(e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-e^{ix})^k\Bigr) = \mathrm{Re}\Bigl(e^{i\alpha}\frac{1-(-e^{ix})^{n+1}}{1+e^{ix}}\Bigr)$$

(здесь и далее $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$ — действительная и мнимая части комплексного числа z). При чётном n имеем

$$(-e^{ix})^{n+1} = -\cos(n+1)x - i\sin(n+1)x,$$

и тогда

$$\mathrm{Re}\Big(e^{i\alpha}\frac{1-(-e^{ix})^{n+1}}{1+e^{ix}}\Big) =$$
$$= \mathrm{Re}\Big((\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{(1+\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x)(1+\cos x - i\sin x)}{2+2\cos x}\Big) =$$
$$= \frac{\cos\Big(\alpha + \dfrac{nx}{2}\Big)\cos\Big(\dfrac{(n+1)x}{2}\Big)}{\cos\dfrac{x}{2}}.$$

При нечётном n, очевидно,

$$(-e^{ix})^{n+1} = \cos(n+1)x + i\sin(n+1)x,$$

и аналогично

$$\mathrm{Re}\Big(e^{i\alpha}\frac{1-(-e^{ix})^{n+1}}{1+e^{ix}}\Big) =$$
$$= \mathrm{Re}\Big((\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{(1-\cos(n+1)x - i\sin(n+1)x)(1+\cos x - i\sin x)}{2+2\cos x}\Big) =$$
$$= \frac{\sin\Big(\alpha + \dfrac{nx}{2}\Big)\sin\Big(\dfrac{(n+1)x}{2}\Big)}{\cos\dfrac{x}{2}}.$$

4. Докажите для

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_n\Big(x + \frac{2\pi k}{n}\Big) = n(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Указание. Примените формулу суммирования геометрической прогрессии подобно решению задачи 3.

5. Докажите для любого

$$t_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

при $m > n/3$ тождество

$$t_n(x) - t_n\Big(x + \frac{\pi}{m}\Big) + t_n\Big(x + \frac{2\pi}{m}\Big) - \ldots + t_n\Big(x + \frac{\pi(2m-2)}{m}\Big) -$$

$$- t_n\left(x + \frac{\pi(2m-1)}{m}\right) = 2m(a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Указание. Примените задачу 3. См. также [4, 5].

6. Тригонометрический многочлен n-го порядка удовлетворяет равенствам

$$t_n(a) = -t_n\left(a + \frac{\pi}{n}\right) = t_n\left(a + \frac{2\pi}{n}\right) = \ldots = -t_n\left(a + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right).$$

Докажите, что $t_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Указание. Примените задачу 5.

Далее будут использованы[2)] интересные сами по себе

Тождества Валлиса

7. Докажите, что

$$1)\ \prod_{l=1}^{n-1} \sin\frac{l\pi}{n} = n2^{-n+1}, \qquad 2)\ \prod_{l=1}^{n-1} \sin\frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n}2^{-n+1},$$

$$3)\ \prod_{l=1}^{n-1} \cos\frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n}2^{-n+1}, \quad 4)\ \prod_{l=1}^{n} \sin\frac{(2l-1)\pi}{4n} = 2^{-n+\frac{1}{2}}.$$

Решение. Третье равенство вытекает из второго в силу следствия формул приведения:

$$\sin\frac{k\pi}{2n} = \cos\frac{(n-k)\pi}{2n}.$$

Перемножив второе и третье равенство и воспользовавшись формулой двойного угла $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, получаем, что первое равенство равносильно второму (или третьему). Четвёртое равенство вытекает из второго, если заметить, что

$$\prod_{l=1}^{n} \sin\frac{(2l-1)\pi}{4n} = \frac{\prod\limits_{l=1}^{2n-1} \sin\frac{l\pi}{4n}}{\prod\limits_{l=1}^{n-1} \sin\frac{2l\pi}{4n}} = \frac{P_{2n}}{P_n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

где

$$P_n = \prod_{l=1}^{n-1} \sin\frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n}2^{-n+1}.$$

Докажем первое равенство. Заметим, что многочлен

$$p_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

[2)] Найденные знаменитым английским математиком XVII века.

имеет комплексные корни $x_k = \varepsilon^k$, $k = 1, \ldots, n-1$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, так как двучлен $x^n - 1$ имеет те же корни, а также корень $x_0 = \varepsilon^0 = 1$. Из теоремы Безу следует тогда тождество

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k),$$

откуда в силу непосредственно проверяемого тождества $|1 - e^{2ix}| = 2\sin|x|$ получаем

$$\begin{aligned} n &= p_n(1) = |p_n(1)| = \\ &= \left|\prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)\right| = \prod_{k=1}^{n-1}|1 - e^{2k\pi i/n}| = \prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

§ 2. Интерполяционная формула Эрмита и тождество М. Рисса

Виноват ты сам, Ральф, — недовольно заметил штурман. — На кой чёрт ты всегда стреляешь с дистанции, на которой нас контузит от собственных взрывов? — Зато не нужно ломать голову в тригонометрии <...>

В. С. Пикуль, «Реквием конвою PQ-17»

Производной многочлена

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

с действительными или комплексными коэффициентами называется многочлен

$$t_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k(b_k\cos kx - a_k\sin kx).$$

Производная удовлетворяет непосредственно проверяемым тождествам

$$f' + g' = (f+g)', \quad (fg)' = f'g + g'f, \quad (cf(x))' = cf'(x), \quad f(x+c)' = f'(x+c),$$

где c — константа. Производную частного двух многочленов можно определить равенством

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2},$$

в частности, например, $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Доказательство следующего далее тождества М. Рисса можно найти, например, в [9, 11]. Ниже приводится один из его вариантов, основанный на использовании тригонометрической интерполяции.

8 (М. Рисс). Пусть $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$. Докажите, что

а) $\cos nx = A \prod\limits_{k=1}^{2n} \sin \dfrac{x-\theta_k}{2}$;

б) $Q_n^{(m)}(x) = (-1)^{m+1} 2^{2n-1} \dfrac{\sin \dfrac{x-(\pi+\theta_m)}{2}}{2n} \prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{2n} \sin \dfrac{x-\theta_m}{2}$

есть тригонометрический многочлен n-й степени, такой что

$$Q_n^{(m)}(\theta_k) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m; \end{cases}$$

отметим, что почти всюду

$$Q_n^{(m)}(x) = \frac{\cos nx}{2n}(-1)^m \operatorname{ctg} \frac{x-\theta_m}{2} = (-1)^{m+1} \frac{\cos nx \sin \dfrac{x-(\pi+\theta_m)}{2}}{2n \sin \dfrac{x-\theta_m}{2}};$$

в) любой тригонометрический многочлен $t_n(x)$ можно представить в виде

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \cos \frac{x-\theta_k}{2} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{2n} \sin \frac{x-\theta_m}{2},$$

причём почти всюду

$$t_n(x) = a \cos nx + \frac{\cos nx}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\operatorname{ctg} \frac{x-\theta_k}{2}\right) t_n(\theta_k),$$

и выполнено равенство

$$t_n'(0) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(\theta_k)}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}};$$

г) справедлива формула М. Рисса (тождество М. Рисса) для производной тригонометрического многочлена:

$$t_n'(x) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(x+\theta_k)}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}};$$

д) верно тождество

$$n = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}}.$$

Указание (к п. а). Примените задачу 2. Можно также найти константу A, подставив в обе части равенства $x = 0$. Слева получим 1, а справа, согласно задаче 7,

$$A \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = A \cdot 2^{1-2n},$$

откуда $A = 2^{2n-1}$.

Указание (к п. б). Равенство $Q_n^{(m)}(\theta_k) = 0$ при $k \neq m$ следует из п. а). При подстановке $x = \theta_k$, $k \neq m$, правая часть формулы из условия обращается в нуль. При подстановке $x = \theta_m$ справа получается с учётом равенства задачи 7

$$\frac{(-1)^m 2^{2n-1}}{2n} \prod_{k\neq m} \sin \frac{\theta_m - \theta_k}{2} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{2n-1}}{2n} \prod_{k\neq m} \sin \frac{(k-m)\pi}{2n} =$$

$$= \frac{2^{2n-1}}{2n} \prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \prod_{k=1}^{2n-m} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{2^{2n-1}}{2n} \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = 1.$$

Из формулы произведения синусов и задачи 1 следует, что

$$\frac{\sin \dfrac{x - (\pi + \theta_m)}{2}}{2n} \prod_{k\neq m} \sin \frac{x - \theta_k}{2}$$

есть тригонометрический многочлен n-го порядка.

Указание (к п. в). Аналогично построению интерполяционного многочлена Лагранжа положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \Big(\cos \frac{x - \theta_k}{2}\Big) t_n(\theta_k) \prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{2n} \sin \frac{x - \theta_m}{2};$$

почти всюду это выражение равно

$$f(x) = \frac{\cos nx}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \Big(\operatorname{ctg} \frac{x - \theta_k}{2}\Big) t_n(\theta_k).$$

Тогда $f(\theta_k) = t_n(\theta_k)$, $k = 1, \ldots, 2n$. Поэтому $f(x) - t_n(x)$ и $a \cos nx$ совпадают в точках θ_k, $k = 1, \ldots, 2n$, а при подходящем выборе a и в точке 0, поэтому согласно теореме 2 они тождественно совпадают как тригонометрические многочлены n-го порядка. Дифференцируя обе части первого равенства п. в) в нуле, замечаем, что производная от слагаемого $a \cos nx$

в нуле равна нулю, а производная произведения $\dfrac{1}{2n}\cos nx$ на

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\Big(\operatorname{ctg}\frac{x-\theta_k}{2}\Big)t_n(\theta_k)$$

в нуле равна

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k t_n(\theta_k)\operatorname{ctg}'\Big(\frac{x-\theta_k}{2}\Big)\Big|_{x=0}$$

согласно правилам дифференцирования произведения и суммы. Остаётся вычислить производную $\operatorname{ctg}((x-\theta_k)/2)$ и получить согласно правилу дифференцирования дроби

$$\operatorname{ctg}'\frac{x-\theta_k}{2}=\frac{-1}{2\sin^2\dfrac{x-\theta_k}{2}},\quad \operatorname{ctg}'\Big(\frac{x-\theta_k}{2}\Big)\Big|_{x=0}=\frac{-1}{2\sin^2\dfrac{-\theta_k}{2}}=\frac{-1}{2\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}.$$

Указание (к п. г). Примените к $f_n(x)=t_n(x+y)$ вторую формулу п. в). Тогда, дифференцируя $f_n(x)$ в нуле при любом y, имеем

$$t_n'(y)=f_n'(0)=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{f_n(\theta_k)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{t_n(\theta_k+y)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}.$$

Указание (к п. д). Примените вторую формулу п. в) к $t_n(x)=\sin nx$. Справа получим n, а слева

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{t_n(\theta_k)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}.$$

§ 3. Неравенства С. Н. Бернштейна

<...> основные результаты математики чаще выражаются неравенствами, а не равенствами.

Эдвин Беккенбах, Ричард Беллман,
«Введение в неравенства»

Здесь речь пойдёт о неравенстве для тригонометрических производных[3]. Оно (а также некоторые его варианты и обобщения) будет сформулировано в следующей далее задаче 11, но вначале необходимо привести некоторые предварительные сведения.

[3] Это уточнение необходимо, так как с именем С. Н. Бернштейна связано много различных неравенств.

Назовём нормой и обозначим $\|t_n\|$ максимум модуля тригонометрического многочлена t_n. Величину $\max|t_n(x)|$ также называют равномерной или чебышёвской нормой. В силу периодичности очевидно равенство

$$\max|t_n(x)| = \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|t_n(x)|.$$

Кроме неё, используются нормы

$$\|t_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad p\geqslant 1,$$

а норму $\|t_n\|$ обозначают $\|t_n\|_\infty$. Можно проверить, что $\|t_n\|_p\leqslant\|t_n\|_\infty$. Очевидно, что для любой константы c и любого $p\geqslant 1$, в том числе и $p=\infty$, справедливо равенство $\|ct_n\|_p=|c|\cdot\|t_n\|_p$ и что для нормы $\|f\|$ справедливо неравенство выпуклости $\|\alpha f+\beta g\|\leqslant|\alpha|\cdot\|f\|+|\beta|\cdot\|g\|$.

9. Докажите для 2π-периодических функций свойство инвариантности нормы относительно сдвига на произвольное число a:

$$\|f(x+a)\|_p = \|f(x)\|_p.$$

Далее нам понадобится классическое неравенство Минковского. Оно тоже сформулировано в виде задачи, решение которой можно найти, например, в [1, 11–13, 16]. Ввиду широкой известности решения оно здесь не приводится.

10. Докажите, что при $p\geqslant 1$ справедливо неравенство Минковского

$$\|\alpha f+\beta g\|_p\leqslant|\alpha|\cdot\|f\|_p+|\beta|\cdot\|g\|_p,$$

которое обращается в равенство только при выполнении тождества $f(x) = cg(x)$, где $c\in\mathbb{R}$ — константа.

Всё сказанное выше справедливо для многочленов как с действительными, так и с комплексными коэффициентами (можно определить нормы и доказать все указанные их свойства).

Различные доказательства неравенств С. Н. Бернштейна можно найти в [2, 3, 6, 8–12, 16]. Здесь приводится доказательство, основанное на использовании тождества М. Рисса. Известно также несколько полиномиальных неравенств типа С. Н. Бернштейна (см., например, [16]), но они выходят за рамки данного изложения.

11. Докажите для тригонометрических многочленов t_n порядка n (как с действительными, так и с комплексными коэффициентами)

а) неравенство С. Н. Бернштейна $\max_{x\in\mathbb{R}}|t_n'(x)|\leqslant n\max_{x\in\mathbb{R}}|t_n(x)|$;

б) неравенство С. Н. Бернштейна $\|t_n'(x)\|_p \leqslant n\|t_n(x)\|_p$;
в) неравенство С. Н. Бернштейна для кратных производных

$$\|t_n^{(k)}(x)\|_p \leqslant n^k\|t_n(x)\|_p.$$

Указание (к п. а). Вычисляя у обеих частей тождества М. Рисса норму $\|f\|$ и пользуясь неравенством выпуклости $\|\alpha f + \beta g\| \leqslant |\alpha| \cdot \|f\| + |\beta| \cdot \|g\|$ и равенством $\|t(x+\alpha)\| = \|t(x)\|$, получаем неравенство

$$\|t_n'(x)\| \leqslant \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\|t_n(x+\theta_k)\|}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\|t_n(x)\|}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} =$$

$$= \|t_n(x)\|\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{4n\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = n\|t_n(x)\|,$$

где на последнем шаге использовано равенство п. д) задачи 8.

Указание (к п. б). Для нормы $\|t\|_p$ справедливы неравенство

$$\|\alpha f + \beta g\|_p \leqslant |\alpha| \cdot \|f\|_p + |\beta| \cdot \|g\|_p$$

и равенство $\|t(x+\alpha)\| = \|t(x)\|$. Поэтому неравенство $\|t_n'(x)\|_p \leqslant n\|t_n(x)\|_p$ доказывается аналогично п. а).

Указание (к п. в). Примените k раз доказанное в п. б) неравенство.

12. Докажите, что все неравенства С. Н. Бернштейна 11 а)–в) обращаются в равенства для многочленов $t_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx$ и только для них.

Указание. В случае нормы $\|f\|$ согласно приведённому в п. а) доказательству равенство возможно, лишь когда для некоторого x справедливы равенства

$$t_n(x) = -t_n\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big) = t_n\Big(x+\frac{2\pi}{n}\Big) = \ldots = -t_n\Big(x+\frac{(2n-1)\pi}{n}\Big).$$

Применяя задачу 6, отсюда выводим, что $t_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx$. В случае нормы $\|f\|_p$, $p > 1$, согласно задаче 10 равенство $\|t_n'(x)\|_p = n\|t_n(x)\|_p$ возможно, лишь если тождественно $t_n(x+\theta_1) = ct_n(x+\theta_1+\pi/n)$, $c \in \mathbb{R}$, но тогда $t_n(x+\theta_1) = c^{2n}t_n(x+\theta_1+2n\pi/n) = c^{2n}t_n(x+\theta_1)$, откуда следует, что либо тождественно $t_n(x) = 0$, либо $c^{2n} = 1$, что возможно лишь при $c = \pm 1$. В случае $c = -1$ имеем $t_n(x) = -t_n(x+\pi/n)$, откуда согласно задаче 6 следует, что $t_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx$. В случае $c = 1$ имеем $t_n(x) = t_n(x+\pi/n)$, и в силу той же задачи $t_n(x)$ равен константе. Но тогда равенство $\|t_n'(x)\|_p = n\|t_n(x)\|_p$ возможно лишь для $t_n(x) = 0$.

В случае $p=1$ равенство в неравенстве $\|af+bg\|_1 \leqslant a\|f\|_1 - b\|g\|_1$ при $a>0>b$ возможно лишь при $f=0$ или $g=0$ или когда $f/g<0$ при любом x. Отсюда следует, что равенство

$$\|t_n'(x)\|_1 = \frac{1}{4n}\left\| \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(x+\theta_k)}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}} \right\|_1 = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\|t_n(x+\theta_k)\|_1}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}}$$

возможно, лишь когда $t_n(x)$ и его сдвиги $t_n(x+\theta_k)$, где $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, имеют общие корни и таковы, что между соседними корнями $t_n(x)/t_n(x+\theta_k) \in \mathbb{R}$ и не меняет знака, значит, все эти промежутки (рассматриваемые по модулю 2π) имеют равную длину, а именно π/n, и их количество равно $2n$, а это возможно, согласно п. а) задачи 8, только для функции

$$A\cos n(x-\alpha) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

13. Докажите неравенство С. Н. Бернштейна для алгебраических многочленов: при $|x|<1$ для любого многочлена p_n степени n

$$|p_n'(x)| \leqslant \frac{n \max_{|x|\leqslant 1} |p_n(x)|}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Указание. Рассмотрим тригонометрический многочлен

$$t_n(x) = p_n(\cos x).$$

Его степень не выше n согласно, например, задаче 1. Очевидно,

$$p_n(x) = t_n(\arccos x), \qquad \|p_n\| = \max_{|x|\leqslant 1} |p_n(x)| = \|t_n\|.$$

В силу неравенства С. Н. Бернштейна при $|x|<1$ имеем

$$|p_n'(x)| = |t_n'(\arccos x)\arccos' x| = \left| \frac{t_n'(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leqslant \frac{n\|t_n\|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n\|p_n\|}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Неравенство С. Н. Бернштейна имеет много приложений. В частности, из него можно вывести следующее неравенство П. Л. Чебышёва, которое равносильно экстремальному свойству тригонометрических многочленов: среди всех таких многочленов порядка n с фиксированными старшими коэффициентами a_n, b_n наименьшую норму $\|t_n\|$ (т. е. минимальное уклонение от нуля) имеет $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

14. Выведите из неравенства С. Н. Бернштейна неравенство П. Л. Чебышёва $\|t_n\| \geqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$.

Указание. Так как у производной $t_n'(x)$ старшие члены имеют коэффициенты, равные по модулю $n|a_n|$, $n|b_n|$, то, используя тождество задачи 4 и неравенство С. Н. Бернштейна при подходящем выборе α_n, имеем:

$$n^2\|t_n\| \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left\|t_n'\Bigl(\alpha_n+\frac{2\pi k}{n}\Bigr)\right\| \geqslant \left\|\sum_{k=0}^{n-1}t_n'\Bigl(\alpha_n+\frac{2\pi k}{n}\Bigr)\right\| = n^2\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

У указанного неравенства Чебышёва (и равносильного ему неравенства для алгебраических многочленов) известно много доказательств (см., например, [2, 5, 8, 10–12, 15]). Применяя неравенство Минковского и задачу 9, аналогично решению задачи 14 можно доказать следующее обобщение неравенства Чебышёва для произвольной нормы $\|f(x)\|_p$:

$$\|t_n\|_p \geqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cdot\|\cos x\|_p.$$

§ 4. Сумма обратных квадратов и ещё одно доказательство тождества М. Рисса

Имейте в виду, что существует ещё и седьмое доказательство, и уж самое надёжное. И сейчас оно вам будет предъявлено.

М. А. Булгаков, «Мастер и Маргарита»

Это доказательство появляется в конце длинной цепочки задач, продолжающейся в нескольких секциях этого раздела. Первая задача совсем простая.

15. Проверьте тождество $\dfrac{1}{1-e^{i\varphi}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\operatorname{ctg}(\varphi/2)}{2}$.

16. Докажите при $\alpha \neq m\pi/n$, где m — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\Bigl(\alpha+\frac{k\pi}{n}\Bigr) = 2\ \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{i(2\alpha+\frac{2k\pi}{n})}}.$$

Указание. Примените тождество из задачи 15.

17. Докажите при $\alpha \neq 2m\pi/n$, где m — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{i(\alpha+\frac{2k\pi}{n})}} = \frac{n}{1-e^{in\alpha}} = \frac{n}{2} + i\frac{n\operatorname{ctg}(n\alpha/2)}{2}.$$

Указание. Примените формулу

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_k} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

где $f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$. При $x_k=e^{i(\alpha+\frac{2k\pi}{n})}$, $k=1,\ldots,n$, согласно теореме Безу $f(x)=x^n-e^{in\alpha}$. Другое решение можно получить, заметив, что корни многочлена

$$(1+x)^n-x^ne^{in\alpha}$$

есть $1/(x_k-1)$, где $x_k=e^{i(\alpha+\frac{2k\pi}{n})}$, $k=1,\ldots,n$, причём это верно и при $\alpha=2m\pi/n$, где m — целое число, нужно только проверить, что тогда уравнение принимает вид $(1+x)^n-x^n$, имеет степень $n-1$ и корни $1/(x_k-1)$, где $x_k=e^{i(\frac{2k\pi}{n})}$, $k=1,\ldots,n-1$. После этого применяем теорему Виета и получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{i(\alpha+\frac{2k\pi}{n})}}=\frac{n}{1-e^{in\alpha}}=\frac{n}{2}+i\frac{n\operatorname{ctg}(n\alpha/2)}{2}.$$

18 (Гобсон). Докажите, что корнями уравнения $(z-1)^n=(z+1)^n$ являются комплексные числа $z_k=i\operatorname{ctg}(k\pi/n)$, $k=1,\ldots,n-1$.

Решение. Уравнение $(z-1)^n=(z+1)^n$ равносильно $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n=1$, значит, $(z_k-1)/(z_k+1)=\varepsilon^k$, $\varepsilon=e^{2\pi i/n}$. Проверим, что $z_k=i\operatorname{ctg}(k\pi/n)$ является корнем уравнения $(z-1)/(z+1)=\varepsilon^k$, $k=1,\ldots,n-1$. Очевидно, что $|z_k-1|=|z_k+1|$. Положим $\alpha_k=\pi/2-k\pi/n$, тогда $\arg(z_k+1)=\alpha_k$, $\arg(z_k-1)=\pi-\alpha_k$. Отсюда

$$\arg\frac{z_k-1}{z_k+1}=\arg(z_k-1)-\arg(z_k+1)=\pi-2\alpha_k=\frac{2k\pi}{n},$$

поэтому $(z_k-1)/(z_k+1)=\varepsilon^k$, так как у этих чисел совпадают и модули, и аргументы.

19. Вычислите $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{n}$.

Решение[4]. Применим теорему Виета к уравнению $(z-1)^n=(z+1)^n$. Это уравнение можно записать в виде $(z+1)^n-(z-1)^n=0$ и, пользуясь формулой бинома, в виде

$$\binom{n}{1}z^{n-1}+\binom{n}{3}z^{n-3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}z^{n-2k-1}+\ldots=0.$$

Его корнями являются числа $z_k=i\operatorname{ctg}(k\pi/n)$, $k=1,\ldots,n-1$, согласно задаче 18. Из теоремы Виета следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-1}z_k=0,\qquad\sum_{1\leqslant k<l<n}z_kz_l=\binom{n}{3}\Big/\binom{n}{1}=\frac{(n-1)(n-2)}{6},$$

[4] Идея решения принадлежит Н. М. Коробову, как мне сообщил А. В. Устинов.

откуда

$$\sum_{k=1}^{n-1} z_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right)^2 - 2\sum_{1\leqslant k<l<n} z_k z_l = -\frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{n} = -\sum_{k=1}^{n-1} z_k^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

20. Докажите равенство $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi k}{n}} = \frac{n^2-1}{3}$.

Указание. Примените тождество $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

21. Докажите при $\alpha \neq m\pi/n$, где m — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = n\operatorname{ctg} n\alpha.$$

Решение. Используя тождество

$$\frac{1}{1-e^{i\varphi}} = \frac{1}{2} + \frac{i\operatorname{ctg}(\varphi/2)}{2}$$

задачи 15 и выделяя мнимые части, получаем при $\alpha \neq m\pi/n$, где m — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = n\operatorname{ctg} n\alpha.$$

22. Докажите при $\alpha \neq m\pi/n$, где m — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{1-e^{i(2\alpha+\frac{2k\pi}{2n})}} = \frac{n}{1-e^{in\alpha}} - \frac{n}{1-e^{i(n\alpha+\pi/2)}} =$$

$$= \frac{in\operatorname{ctg} n\alpha}{2} - \frac{in\operatorname{ctg}\left(n\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{in}{\sin(2n\alpha)}.$$

Указание. Примените задачу 21.

Формула Эйлера для ряда обратных квадратов

Эта формула появляется в конце следующей цепочки задач.

23. Докажите тождества

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right) = 4n^2, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right) = 2n^2.$$

Указание. Примените тождество п. д) задачи 8. Для доказательства второго тождества заметить, что в первой сумме слагаемые можно разбить на пары равных:

$$\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{k\pi}{2n}\right)=\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{(2n-k-1)\pi}{2n}\right).$$

24. Докажите тождества

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{k\pi}{2n}\right)=4n^2-2n,\quad \sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{k\pi}{2n}\right)=2n^2-n.$$

Указание. Примените задачу 23 и тождество $\operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1$.

В следующей задаче, наконец, появляется формула Эйлера.

25. Выведите из задач 23, 24 формулы Эйлера для ряда обратных квадратов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Решение. Применим при $0<x\leqslant\pi/2$ неравенства $\operatorname{ctg}^2 x<1/x^2<\operatorname{cosec}^2 x$ (вытекающие из неравенств $\sin x<x<\operatorname{tg} x$) и тождества задач 23, 24. Тогда имеем

$$2n^2-n=\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{k\pi}{2n}\right)<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{k\pi}{2n}\right)^2}=\frac{16n^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(1+2k)^2}$$

и аналогично

$$2n^2=\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{k\pi}{2n}\right)>\frac{16n^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(1+2k)^2},$$

откуда следует, что

$$\pi^2\frac{1-\frac{1}{2n}}{8}<\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(1+2k)^2}<\frac{\pi^2}{8},$$

значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

получаем

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Аналогично и первое равенство можно вывести из второго.

Эйлер нашёл также формулы для ряда обратных четвёртых степеней и т. д. Эти формулы дают явные выражения значения в точках вида $2k$ дзета-функции Римана (её называют иногда функцией Эйлера — Римана). Доказательства этих формул используют ряды Фурье и поэтому недостаточно элементарны, так же как и большинство доказательств приведённой выше формулы Эйлера. Ещё одно элементарное доказательство можно найти в [14, 15]. Большое количество других доказательств (не все из которых совсем уж элементарны) имеется в [7].

В конце этого раздела указывается ещё одно доказательство тождества п. д) задачи 8. В нём используется следующая задача.

26. Докажите формулу Виета — Муавра кратных углов

$$\cos na = \cos^n a - \binom{n}{2} \sin^2 a \cos^{n-2} a + \binom{n}{4} \sin^4 a \cos^{n-4} a - \ldots$$

Указание. Примените формулу Муавра — Эйлера $e^{inx} = (e^{ix})^n$ и формулу бинома Ньютона.

Частным случаем при $n = 2m$ первого тождества следующей задачи является тождество п. д) задачи 8.

27. Докажите тождества

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = n^2, \quad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = n^2 - n.$$

Решение. Согласно задаче 26

$$\cos na = \cos^n a - \binom{n}{2} \sin^2 a \cos^{n-2} a + \binom{n}{4} \sin^4 a \cos^{n-4} a - \ldots$$

При подстановке в обе части равенства $a = \dfrac{\pi(1+2k)}{2n}$ получаем с обеих сторон нули. Деля обе части на $\sin^n a \neq 0$, заменяя везде дроби $\dfrac{\cos a}{\sin a}$ на $\operatorname{ctg} a$ и в случае нечётного n деля ещё раз полученное равенство на $\operatorname{ctg} a \neq 0$ при $k = 0, \ldots, \lfloor (n-2)/2 \rfloor$, получаем равенства

$$0 = x^{2m} - \binom{n}{2} x^{2m-2} + \ldots,$$

где $m = \lfloor n/2 \rfloor$, $x = \operatorname{ctg} a$, $k = 0, \ldots, m-1$. Значит, уравнение

$$x^m - \binom{n}{2} x^{m-1} + \ldots = 0$$

имеет в точности m корней $x_k = \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\pi(1+2k)}{2n}$, $k = 0, \ldots, m-1$. Поэтому по теореме Виета имеем, что их сумма

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Применяя тождество $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$, отсюда имеем при $n = 2m+1$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = \frac{n(n-1)}{2} + m = 2m^2 + 2m = \frac{n^2-1}{2}.$$

Поскольку при $k = m$, очевидно,

$$\operatorname{cosec}\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = 1, \quad \operatorname{ctg}\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = 0,$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{m} \operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = \frac{n^2+1}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n} = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n} = n(n-1),$$

так как в последней сумме слагаемые можно разбить на пары равных:

$$\operatorname{ctg}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = \operatorname{ctg}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{(n-k-1)\pi}{n}\Bigr).$$

Аналогично имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m} \operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = 2\frac{n^2-1}{2} + 1 = n^2.$$

В случае $n = 2m$ получаем равенства задач 23, 24, например

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = n(n-1) + 2m = n^2,$$

так как в последней сумме слагаемые можно разбить на пары равных:

$$\operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Bigr) = \operatorname{cosec}^2\Bigl(\frac{\pi}{2n} + \frac{(n-k-1)\pi}{n}\Bigr).$$

Тригонометрические тождества, равносильные тождеству М. Рисса

Их появлению также предшествует цепочка задач.

28. Докажите при $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, 2n$, и $m \leqslant n$ тождество

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\cos m\theta_k}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}} = 0.$$

Указание. Достаточно применить формулу п. г) задачи 8 к функции $t_n(x) = \cos mx$.

29. Докажите тождество

$$\frac{z^m}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{m}{z-1} + m - 1 + (m-2)z + \ldots + z^{m-2}.$$

Решение. Применяя формулу

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \ldots + z^{n-1}),$$

имеем

$$\frac{z^m}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{m}{z-1} = \frac{z^m - 1}{(z-1)^2} - \frac{m}{z-1} = \frac{1 + z + \ldots + z^{m-1}}{z-1} - \frac{m}{z-1} =$$
$$= 1 + \frac{z^2 - 1}{z-1} + \ldots + \frac{z^{m-1} - 1}{z-1} = 1 + (z+1) + \ldots + (1 + z + \ldots + z^{m-2}) =$$
$$= m - 1 + (m-2)z + \ldots + z^{m-2}.$$

30. Докажите тождество

$$\frac{1}{2\sin^2(\varphi/2)} = \frac{1}{1 - \cos\varphi} = -\frac{2e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi} - 1)^2}.$$

Решение. Первое равенство следует из формулы двойного угла. Так как модуль $e^{i\varphi} - 1$ равен $2\sin(\varphi/2)$ (у треугольника с вершинами в точках $0, 1, e^{i\varphi}$ боковые стороны равны единице, а угол при вершине равен φ), модуль дроби $\dfrac{-2e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi}-1)^2}$ равен $\dfrac{1}{2\sin^2(\varphi/2)}$. Аргумент числа $e^{i\varphi} - 1$ равен $(\varphi + \pi)/2$, значит, аргумент его квадрата равен $\varphi + \pi$, поэтому аргумент указанной дроби равен $(\varphi+\pi) - (\varphi+\pi) = 0$, т. е. дробь равна $1/(2\sin^2(\varphi/2))$.

31. Докажите при $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, 2n$, тождество

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} = -\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{e^{i\theta_k} - 1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{1 - e^{i\theta_k}} = in.$$

Решение. Равенство

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{1-e^{i\theta_k}} = in$$

следует из задачи 22 при подстановке $\alpha = \pi/(4n)$. Используя тождество задачи 29 при $m = 1$ и тождество задачи 30, имеем

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{(e^{i\theta_k}-1)^2} + \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{e^{i\theta_k}-1} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{e^{i\theta_k}}{(e^{i\theta_k}-1)^2} =$$
$$= -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = 0,$$

так как слагаемые в сумме можно разбить на пары взаимно противоположных:

$$(-1)^{k+1}\sin^2\frac{\theta_k}{2} = -(-1)^{2n-k+2}\sin^2\frac{\theta_{2n-k+1}}{2}.$$

32. Докажите при $m < n$ и при $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, 2n$, тождество

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}e^{mi\theta_k} = 0.$$

Указание. Примените формулу $1 + z + \ldots + z^{2n-1} = (z^{2n}-1)/(z-1)$ при $z = -e^{im\pi/n}$.

33. Докажите при $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, 2n$, и $m \leqslant n$ тождества

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = im, \quad \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{\sin m\theta_k}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = m.$$

Решение. Тождество

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{\sin m\theta_k}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = m$$

вытекает из тождества

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = im,$$

если в нём заменить $e^{im\theta_k}$ согласно формуле Эйлера на $i\sin m\theta_k + \cos m\theta_k$ и взять от обеих сторон мнимые части. Если взять действительные части, то получим ещё раз тождество задачи 28. Для доказательства тождества

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = imn,$$

заменив в нём $\dfrac{e^{im\theta_k}}{4\sin^2(\theta_k/2)}$ на $-\dfrac{e^{i(m+1)\theta_k}}{(e^{i\theta_k}-1)^2}$ согласно тождеству задачи 30 и далее на

$$-\frac{1}{(e^{i\theta_k}-1)^2} - \frac{m+1}{e^{i\theta_k}-1} - m - (m-1)e^{i\theta_k} - \ldots - (e^{i\theta_k})^{m-1}$$

согласно тождеству задачи 29, получим в левой части сумму

$$-\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\Big(\frac{1}{(e^{i\theta_k}-1)^2} - \frac{m+1}{e^{i\theta_k}-1} - m - (m-1)e^{i\theta_k} + \ldots + (e^{i\theta_k})^{m-1}\Big) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{(e^{i\theta_k}-1)^2} - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{m+1}{e^{i\theta_k}-1} -$$

$$-(m-1)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}e^{i\theta_k} - \ldots - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}e^{i(m-1)\theta_k}.$$

Применяя тождества задач 31 и 32, получаем при $m \leqslant n$ в правой части imn, что и требовалось доказать.

34. Выведите из задачи 33 тождество М. Рисса.

Указание. Заменим в сумме

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{t_n(\theta_k)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}$$

тригонометрический многочлен $t_n(x)$ на $a_0 + \sum_{k=1}^{n}(b_k\sin kx + a_k\cos kx)$. Затем разобьём её естественным образом на $2n+1$ сумму и вычислим каждую из них, пользуясь тождествами

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{\sin m\theta_k}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = m, \quad \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{\cos m\theta_k}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = 0$$

задачи 33 (первое из них применяем при $1 \leqslant m \leqslant n$, а второе — при $0 \leqslant m \leqslant n$), получаем равенство п. г) задачи 8:

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{t_n(\theta_k)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = \sum_{k=1}^{n}kb_k = t_n'(0),$$

потому что производная

$$t_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k(b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Из доказанного равенства следует п. г) задачи 8, т. е. тождество М. Рисса.

35. Докажите, что тождество М. Рисса равносильно системе тождеств

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\cos m\theta_k}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}} = 0, \qquad \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\sin m\theta_k}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}} = m, \qquad m \leqslant n,$$

где $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, 2n$.

Решение. В задаче 34 показано, как из данных тождеств выводится тождество М. Рисса. Их вывод из тождества М. Рисса получается путём прямой подстановки в него вместо $t_n(x)$ функций $\sin mx$ и $\cos mx$ (см. также задачу 28).

§ 5. Ещё одно тождество типа тождества М. Рисса

И это тождество появляется в конце цепочки задач.

36. Докажите при $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e^{i\theta_k} - 1} = -\frac{n^2}{4}.$$

Указание. Из задачи 27 следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^{-2} \frac{\theta_k}{2} = n^2.$$

Поэтому (согласно задаче 30)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4 \sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}} = -\frac{n^2}{4}.$$

37. Докажите при $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{i\theta_k}} = \frac{n}{2}.$$

Указание. Примените задачу 17.

38. Докажите при $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(e^{i\theta_k}-1)^2} = -\frac{n^2-2n}{4}.$$

Указание. Примените задачи 36, 37.

39. Докажите при $m < n$ и при $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, тождество

$$\sum_{k=1}^{n} e^{mi\theta_k} = 0.$$

Указание. Примените формулу суммирования геометрической прогрессии.

40. Докажите при $m \leqslant n$ тождество

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}} = n - 2m,$$

где $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$.

Решение подобно решению задачи 33. Для доказательства тождества

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}} = n(n-2m),$$

где $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, заменим в нём $\dfrac{e^{im\theta_k}}{\sin^2(\theta_k/2)}$ на $-\dfrac{4e^{i(m+1)\theta_k}}{(e^{i\theta_k}-1)^2}$ согласно тождеству задачи 30, и далее на

$$-4\left(\frac{1}{(e^{i\theta_k}-1)^2} + \frac{m+1}{e^{i\theta_k}-1} + m + (m-1)e^{i\theta_k} + \ldots + (e^{i\theta_k})^{m-1}\right)$$

согласно тождеству задачи 29. Получим в левой части сумму

$$-4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(e^{i\theta_k}-1)^2} + \frac{m+1}{e^{i\theta_k}-1} + m + (m-1)e^{i\theta_k} + \ldots + (e^{i\theta_k})^{m-1}\right) =$$

$$= -4mn + \sum_{k=1}^{n} \frac{-4}{(e^{i\theta_k}-1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{-4(m+1)}{e^{i\theta_k}-1} - 4(m-1)\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} - \ldots - 4\sum_{k=1}^{n} e^{i(m-1)\theta_k}.$$

Применяя тождества задач 37, 38, 39, получаем при $m \leqslant n$ в правой части

$$-4mn + (-4)\left(-\frac{n^2-2n}{4}\right) + (-4(m+1))\frac{-n}{2} = n^2 - 2mn,$$

что и требовалось доказать.

41 (О'Хара). Докажите для любого алгебраического многочлена $f(z)$ с комплексными коэффициентами степени n тождество

$$zf'(z) = \frac{n}{2}f(z) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(e^{i\theta_k}z)}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}$$

(здесь, как и в следующих задачах, z принимает комплексные значения).

Решение. Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Тогда по формуле Муавра — Эйлера

$$f(e^{i\theta_k}z) = \sum_{m=0}^{n} a_m e^{im\theta_k} z^m.$$

Подставляя полученные равенства в сумму

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(e^{i\theta_k}z)}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}},$$

где $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, и меняя порядок суммирования в полученной повторной сумме, получаем, что она равна

$$\sum_{m=0}^{n} A_m z^m, \quad A_m = \frac{a_m}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}.$$

Из утверждения задачи 40 следует равенство

$$A_m = a_m\Big(\frac{n}{2} - m\Big).$$

Поэтому

$$\frac{n}{2}f(z) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(e^{i\theta_k}z)}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}} = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{n} a_m z^m - \sum_{m=0}^{n} A_m z^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} m a_m z^m = z\sum_{m=1}^{n} m a_m z^{m-1} = zf'(z).$$

Ещё одно доказательство тождества О'Хары имеется в [10].

§ 6. Неравенство Бернштейна для алгебраических многочленов и неравенство Сегё

Кратчайший путь между двумя истинами в действительной области часто лежит через комплексную плоскость.

Жак Адамар

Определим $\|f\|_{p,R}$ как

$$\left(\frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi}|f(R\,e^{ix})|^p\,dx\right)^{1/p}$$

при $p \geqslant 1$, $R > 0$. При $p = \infty$ определим $\|f\|_{p,R}$ как $\max_{|z|=R}|f(z)|$.

42. Докажите для любого алгебраического многочлена $f(z)$ с комплексными коэффициентами степени n и $R > 0$ неравенства С. Н. Бернштейна

$$\max_{|z|=R}|f'(z)| \leqslant \frac{n}{R}\max_{|z|=R}|f(z)|, \quad \|f'(z)\|_{p,R} \leqslant \frac{n}{R}\|f(z)\|_{p,R}.$$

Равенство достигается только при $f(z) = az^n$.

Указание. Случай $p = \infty$. Воспользуемся тождеством задачи 41

$$zf'(z) = \frac{n}{2}f(z) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(e^{i\theta_k}z)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}, \quad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n},\ k = 1, \ldots, n,$$

и вычислим у обеих его частей максимум по всем z при условии $|z| = R$. Слева получим $R\max_{|z|=R}|f'(z)|$, а справа, в силу неравенства треугольника $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, имеем

$$\max_{|z|=R}\left|\frac{n}{2}f(z) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(e^{i\theta_k}z)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}\right| \leqslant \left|\frac{n}{2}\max_{|z|=R}|f(z)| + \max_{|z|=R}|f(z)|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}\right|.$$

Из первого тождества задачи 27 следует, что

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = \frac{n}{2},$$

откуда имеем

$$R\max_{|z|=R}|f'(z)| \leqslant n\max_{|z|=R}|f(z)|.$$

Случай $1 \leqslant p < \infty$ рассматривается аналогично, но надо использовать неравенство Минковского (задача 10).

Используя принцип максимума для аналитических функций или лемму Д'Аламбера для многочленов, можно из задачи 42 вывести неравенство С. Н. Бернштейна в следующем виде:

$$\max_{|z|\leqslant R}|f'(z)| \leqslant \frac{n}{R}\max_{|z|\leqslant R}|f(z)|.$$

Обобщение этого неравенства можно найти в [6]. Другие обобщения имеются в [8].

43. Выведите из неравенств задачи 42 аналогичные неравенства для производных произвольного порядка.

Указание. $\|f^{(k)}(z)\|_{p,R} \leqslant \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{R^k}\|f(z)\|_{p,R}$.

44. Докажите, что если многочлен $f(z)$ удовлетворяет неравенству $|f(z)| \leqslant 1$ при всех $|z| \leqslant 1$, то его старший коэффициент по модулю не больше 1. Такое же неравенство справедливо при выполнении условия

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{ix})|\,dx \leqslant 2\pi.$$

Указание. Примените задачу 43.

45. Выведите неравенства задачи 42 из неравенства п. б) задачи 11.

Указание. Случай произвольного $R > 0$ следует из случая $R = 1$ с помощью замены переменных $w = z/R$. В случае $R = 1$ замена переменных $z = e^{ix}$ переводит комплексный алгебраический многочлен $f_n(z)$ в тригонометрический многочлен $t_n(x)$ с комплексными коэффициентами, такой что $t_n(x) = f_n(e^{ix})$. При этом $t'_n(x) = f'_n(z)iz$, откуда

$$\|f'_n(z)\|_{p,1} = \|t'_n(x)\|_p, \quad \|f_n(z)\|_{p,1} = \|t_n(x)\|_p.$$

Пусть

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Тригонометрический многочлен

$$t_n^* = \sum_{k=0}^{n}(a_k\sin kx - b_k\cos kx)$$

называется сопряжённым к $t_n(x)$.

46. Пусть $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, $c_k = a_k - ib_k$, $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что для действительных и мнимых частей справедливы равенства

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx}\right) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx}\right) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \sin kx - b_k \cos kx).$$

Указание. Примените формулу Муавра — Эйлера.

Обозначим многочлен

$$\sum_{k=1}^{n} (ka_k \cos kx + kb_k \sin kx)$$

через $n * t_n$.

47. Проверьте, что

$$t_n^{**} = -t_n, \quad t_n^{****} = t_n, \quad (t^*)'_n = (t')^*_n = n * t, \quad t'_n = -n * t^*,$$

$$(at_n)^* = at_n^*, \quad t_n^*(x+a) = (t_n(x+a))^*, \quad (f_n + g_n)^* = f_n^* + g_n^*.$$

48. Выведите из задачи 41 для любого тригонометрического многочлена порядка n тождества

$$(t')^*_n(x) = \frac{n}{2} t_n(x) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_n(\theta_k + x)}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}},$$

$$t'_n(x) = -\frac{n}{2} t_n^*(x) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_n^*(\theta_k + x)}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}}.$$

Решение. Подставим в тождество задачи 41

$$zf'(z) = \frac{n}{2} f(z) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(e^{i\theta_k} z)}{\sin^2 \dfrac{\theta_k}{2}}, \quad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}, \ k = 1, \ldots, n,$$

вместо z число e^{ix}, а вместо $f(z)$ — сумму $t_n(x) + it_n^*(x)$ согласно задаче 46. Тогда вместо

$$zf'(z) = \sum_{k=1}^{n} kc_k z^k,$$

согласно задаче 47, можно подставить $(t_n^*)' - it'_n(x)$. Так как $f(e^{i\theta_k} z)$ при $z = e^{ix}$, согласно задаче 47, равно

$$f(e^{i(x+\theta_k)}) = t_n(x+\theta_k) + it_n^*(x+\theta_k) = t_n(x+\theta_k) + i(t_n(x+\theta_k))^*,$$

приравнивая мнимые и действительные части тождества задачи 41, имеем

$$(t')^*_n(x) = \frac{n}{2}t_n(x) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{t_n(\theta_k + x)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}},$$

$$t'_n(x) = -\frac{n}{2}t^*_n(x) + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^*_n(\theta_k + x)}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}}.$$

49. Докажите неравенства Сегё

$$\|t'_n(x)\| \leqslant n\|t^*_n(x)\|, \quad \|t'_n(x)\|_p \leqslant n\|t^*_n(x)\|_p.$$

Они обращаются в равенство только при $t_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx$.

Указание. Случай $p=\infty$. Применяя второе тождество задачи 48 и первое равенство задачи 27, имеем

$$|t'_n(x)| \leqslant \frac{n}{2}\|t^*_n(x)\| + \frac{\|t^*_n(x)\|}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}} = n\|t^*_n(x)\|.$$

Случай $1 \leqslant p < \infty$ рассматривается аналогично, но надо использовать неравенство Минковского.

Список литературы

[1] *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965 (переиздано УРСС, 2007).

[2] *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшие приближения непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. Л.-М.: ОНТИ, 1937.

[3] *Бернштейн С. Н.* Сочинения. М.: АН СССР. Т. 1, 1952. Т. 2, 1954.

[4] *Гашков С. Б.* О тригонометрических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля с фиксированным средним коэффициентом // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 56–68.

[5] *Гашков С. Б.* Проблема Чебышева и тригонометрические многочлены // Квант. № 6. 1990.

[6] *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

[7] *Кохась К. П.* Сумма обратных квадратов // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 142–163.

[8] *Лебедев Н. А., Смирнов В. И.* Конструктивная теория функций комплексной переменной. М.: Физматгиз, 1964.

[9] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[10] *Прасолов В. В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2003.

[11] *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

[12] *Тихомиров В. М.* Теория приближений. М.: МГУ, 1976.

[13] *Харди Г. Х., Литтлвуд Д. И., Пойя Д.* Неравенства. М.: URSS, 2008.

[14] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы арифметики и алгебры. М.: Физматлит, 2001.

[15] *Яглом И. М., Яглом А. М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М.: URSS, 2010.

[16] *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. Springer-Verlag, 1995.

[17] *Hobson E. W.* A treatise on plane trigonometry. Cambridge: University Press, 1925.

С. Б. Гашков, механико-математический факультет МГУ
им. М. В. Ломоносова
`sbgashkov@gmail.com`