Итерации квадратных радикалов и косинусы дуг, соизмеримых с окружностью

Н. Н. Осипов

Этой небольшой заметкой мы хотим обратить внимание читателя на некоторые интересные связи между алгеброй, тригонометрией и теорией чисел. Хорошо известно, например, что корни кубического уравнения

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами a, b в так называемом *неприводимом случае* могут быть записаны в тригонометрическом виде. Эта связь алгебры с тригонометрией становится более глубокой, если коэффициенты уравнения (1) считать рациональными. Здесь можно получить примеры, когда корни совсем просто выражаются через тригонометрические функции — они являются линейными комбинациями с рациональными коэффициентами косинусов дуг, соизмеримых с окружностью (т. е. чисел вида $\cos(2\pi k_i/m)$ с целыми k_i и фиксированным натуральным m)[1]. Более того, иногда эти линейные комбинации косинусов могут иметь весьма специальный вид — здесь в игру вмешивается уже теория чисел. Рассказать об этом и является основной целью заметки.

Пара известных примеров

Сначала напомним читателю две хорошо известные (и, на первый взгляд, стандартные) алгебраические задачи с совершенно неожиданными решениями и красивыми ответами.

Первый пример — это одна из задач, предлагавшихся на V Соросовской олимпиаде в 1998 году.

Пример 1. Требуется решить уравнение $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = x$.

[1] Как следствие, возникают изящные числовые тождества типа тождеств Рамануджана (см., например, [6]).

Удивительно, но единственным корнем этого иррационального уравнения оказывается число $x = 2\cos(2\pi/9)$.

Проще всего обнаружить это можно с помощью специальной *тригонометрической* замены неизвестного. А именно, так как $0 \leqslant x \leqslant 2$, можно положить

$$x = 2\cos\varphi, \tag{2}$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Тогда

$$\sqrt{2+x} = 2\cos\frac{\varphi}{2},$$
$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}} = 2\sin\frac{\varphi}{4} = 2\cos\frac{2\pi-\varphi}{4},$$
$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = 2\cos\frac{2\pi-\varphi}{8},$$

и наше уравнение примет вид

$$\cos\frac{2\pi-\varphi}{8} = \cos\varphi.$$

Отсюда легко находим $\varphi = 2\pi/9$. □

Тот же трюк с тригонометрической заменой помогает и в следующем примере.

Пример 2. Речь идёт о решении системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y = 2, \\ y^2 - z = 2, \\ z^2 - x = 2. \end{cases}$$

Казалось бы, что здесь необычного? Однако, рассуждая стандартно (т. е. исключая неизвестные), мы получим уравнение восьмой степени:

$$((x^2-2)^2-2)^2 - 2 = x. \tag{3}$$

Снова будем искать корни этого уравнения, имеющие вид (2), где теперь $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Имеем

$$x^2 - 2 = 2\cos 2\varphi, \quad (x^2-2)^2 - 2 = 2\cos 4\varphi,$$
$$((x^2-2)^2-2)^2 - 2 = 2\cos 8\varphi,$$

поэтому уравнение принимает вид $\cos 8\varphi = \cos\varphi$ или, после преобразований,

$$\sin\frac{9\varphi}{2}\sin\frac{7\varphi}{2} = 0.$$

Отсюда находим

$$\varphi \in \Phi = \left\{0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}\right\}.$$

Таким образом, мы нашли восемь различных корней уравнения (3), а значит, это и есть все корни этого уравнения. Теперь все решения исходной системы можно представить в виде

$$(x, y, z) = (2\cos\varphi, 2\cos 2\varphi, 2\cos 4\varphi), \quad \text{где } \varphi \in \Phi. \qquad \square$$

...КОТОРЫЕ ХОТЕЛОСЬ БЫ ОБОБЩИТЬ

Прежде чем перейти к обобщениям, сделаем несколько наблюдений.

Избавление от радикалов в примере 1 также приводит к уравнению (3). Левую часть этого уравнения можно разложить на множители и получить квадратное уравнение и два кубических уравнения:

$$\text{а) } x^3 - 3x + 1 = 0, \quad \text{б) } x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Корни каждого из уравнений а)–б) имеют красивую тригонометрическую форму (2), причём, как можно проверить,

$$\varphi \in \begin{cases} \left\{ \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9} \right\} & \text{для уравнения а),} \\ \left\{ \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} \right\} & \text{для уравнения б).} \end{cases}$$

Кстати, добраться до этой формы в случае уравнения а) можно напрямую — в лоб применив *формулу Кардано*. Уравнение б) более хитрое, здесь нужны дополнительные трюки.

Пример 1 можно было бы дать в более экзотическом виде — как равенство

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots}}}}}} = 2\cos\frac{2\pi}{9},$$

где набор знаков $(+, -, +)$ периодически повторяется. *Бесконечный вложенный радикал* в левой части следует понимать как *предел* последовательности конечных вложенных радикалов[2]. В данном случае этот предел оказывается равным одному из корней уравнения а). Можно указать аналогичное равенство, в котором участвует один из корней уравнения б), например

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots}}}}}} = 2\cos\frac{2\pi}{7}. \tag{4}$$

[2] Вопрос о существовании предела в подобного рода конструкциях заслуживает отдельного внимания и разбирается, например, в брошюре [3]. Мы не будем на этом останавливаться.

Есть ли другие примеры подобных равенств? Что за тригонометрические выражения могут оказаться в правой части и можно ли выявить какие-нибудь закономерности?

В этой связи вспомним одно хрестоматийное равенство: если $a > 0$, то

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Здесь правая часть есть корень квадратного уравнения $x^2 - x - a = 0$. Если a рационально, то этот корень при желании также можно записать в тригонометрической форме. Это делается на основе формулы для значения *квадратичной суммы Гаусса*

$$g(p) = \sum_{k=0}^{p-1}\Bigl(\cos\frac{2\pi k^2}{p} + i\sin\frac{2\pi k^2}{p}\Bigr),$$

где p — нечётное простое число (см. [1, стр. 98]): $g(p) = \sqrt{p}$ при $p \equiv 1 \pmod 4$ и $g(p) = i\sqrt{p}$ при $p \equiv -1 \pmod 4$[3]. Так, например, при $a = 1$ получим

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5},$$

однако при других a тригонометрическое выражение справа будет довольно громоздким и не сможет конкурировать с простым алгебраическим выражением $(1+\sqrt{1+4a})/2$.

В случае корней кубических уравнений такой альтернативы нет. Так, если уравнение б) решать по формуле Кардано, то в правой части равенства (4) появится малосимпатичное выражение типа

$$\frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\left(\frac{\arccos(\sqrt{7}/14)}{3}\right) - \frac{1}{3}$$

с обратными тригонометрическими функциями.

Новые примеры

Возьмём целое число $a \geqslant 2$ и рассмотрим бесконечный вложенный радикал

$$R(a, e_1, e_2, e_3) = \sqrt{a + e_1\sqrt{a + e_2\sqrt{a + e_3\sqrt{a + e_1\sqrt{a + e_2\sqrt{a + e_3\sqrt{\ldots}}}}}}}$$

[3] На самом деле эта формула справедлива для любого нечётного натурального числа p, но основная трудность в доказательстве содержится именно в случае простого p.

с повторяющимся набором (e_1, e_2, e_3) знаков $e_i \in \{+, -\}$. Будем считать, что этот набор отличен от $(+,+,+)$ и $(-,-,-)$. Число $R(a, e_1, e_2, e_3)$ является единственным корнем уравнения

$$x = \sqrt{a + e_1\sqrt{a + e_2\sqrt{a + e_3 x}}}.$$

Очевидно, этот корень находится среди корней уравнения

$$((x^2 - a)^2 - a)^2 - (a + e_3 x) = 0.$$

Обозначим $t = e_3 x$. Имеем

$$((t^2 - a)^2 - a)^2 - (a + t) = (t^2 - t - a)F(t),$$

где *дискриминант* многочлена $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ равен

$$D(F) = (16a^2 - 4a + 7)^2(4a - 7)^3.$$

Число $D(F)$ будет точным квадратом при $a = a_n$, где

$$a_n = n^2 - n + 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для $a = a_n$ многочлен $F(t)$ допускает разложение

$$F(t) = f_n(t)g_n(t),$$

где кубические многочлены $f_n(x)$ и $g_n(x)$ имеют вид

$$f_n(t) = t^3 + nt^2 - (n^2 - 2n + 3)t - n^3 + 2n^2 - 3n + 1,$$
$$g_n(t) = t^3 - (n - 1)t^2 - (n^2 + 2)t + n^3 - n^2 + 2n - 1.$$

Поскольку $g_n(t) = f_{1-n}(t)$, можно рассматривать только семейство многочленов $f_n(t)$. Таким образом,

$$R(a_n, e_1, e_2, e_3) = e_3 t^*,$$

где t^* — корень либо $f_n(t)$, либо $f_{1-n}(t)$. Более точно, при $n \geqslant 1$ набор чисел

$$R(a_n, -, -, +), \quad -R(a_n, -, +, -), \quad -R(a_n, +, -, -)$$

является набором корней $f_n(t)$, а набор чисел

$$-R(a_n, +, +, -), \quad R(a_n, +, -, +), \quad R(a_n, -, +, +)$$

есть набор корней $f_{1-n}(t)$.

Теорема 1. *При любом $n \in \mathbb{Z}$ многочлен $f_n(t)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что уравнение

$$t^3 + nt^2 - (n^2 - 2n + 3)t - n^3 + 2n^2 - 3n + 1 = 0$$

неразрешимо в целых числах t, n. Поскольку старшая однородная часть

$$t^3 + nt^2 - n^2 t - n^3 = (t - n)(t + n)^2$$

разлагается на множители, можно было бы применить *метод Рунге* [5]. Но здесь ещё проще: легко видеть, что левая часть уравнения всегда нечётна. □

Имеем

$$D(f_n) = (4n^2 - 6n + 9)^2,$$

поэтому *группа Галуа* кубического многочлена $f_n(t)$ есть A_3 [4, стр. 227], а значит, является *абелевой*. По *теореме Кронекера — Вебера* (см., например, [2, стр. 357]) корни многочлена $f_n(t)$ могут быть выражены через косинусы дуг, соизмеримых с окружностью. Но при каких условиях эти выражения можно указать явно? Ниже мы предъявим некоторую серию значений n, для которых это возможно.

Для простого числа $p \equiv 1 \pmod 3$ рассмотрим *кубическую сумму Гаусса*

$$G(p, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos \frac{2\pi\varepsilon k^3}{p}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $n \equiv \pm 1 \pmod 3$. Предположим, что число*

$$p_n = 4n^2 - 6n + 9$$

является простым. Тогда все корни $f_n(t)$ суть числа

$$\frac{\pm G(p_n, \varepsilon_n^j) - n}{3}, \quad j = 0, 1, 2,$$

где ε_n — кубический невычет по модулю p_n.

Доказательство. Воспользуемся следующим утверждением (см. [1, стр. 164]): если для простого $p \equiv 1 \pmod 3$ имеет место представление

$$4p = A^2 + 27B^2, \tag{5}$$

где $A \equiv 1 \pmod 3$, то числа $G(p, \varepsilon^j)$ ($j = 0, 1, 2$), где ε — кубический невычет по модулю p, являются корнями уравнения

$$x^3 - 3px - Ap = 0.$$

I. Пусть $n \equiv 1 \pmod 3$. В этом случае для $p = p_n$ имеем представление (5) при $A = 4n - 3$, $B = 1$. Осталось заметить, что при $x = 3t + n$ верно тождество $x^3 - 3px - Ap = 27f_n(t)$.

II. Пусть $n \equiv -1 \pmod 3$. В этом случае для $p = p_n$ справедливо представление (5) при $A = -4n + 3$, $B = 1$. Теперь при $x = -3t - n$ верно тождество $x^3 - 3px - Ap = -27f_n(t)$. □

Теорема 3. *В условиях предыдущей теоремы можно взять $\varepsilon_n = 2$.*

Доказательство. Применим следующий факт (см. [1, стр. 148]): число 2 является кубическим вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда справедливо представление

$$p = C^2 + 27D^2. \tag{6}$$

Кроме того, известно, что в представлении (5) числа $|A|$ и $|B|$ определены однозначно. Для $p = p_n$ число $|A| = |4n - 3|$ нечётно, поэтому представление (6) невозможно. □

Продемонстрируем примеры равенств, которые можно получить с помощью доказанных теорем для значений $n = -4$ и $n = 5$:

$$\sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 + \sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 + \ldots}}}}}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{96} \cos\frac{2\pi k^3}{97},$$

$$\sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 - \sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 - \ldots}}}}}} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{78} \cos\frac{2\pi k^3}{79}.$$

...И НОВЫЕ ЗАДАЧИ

Во-первых, в условиях теоремы 2 хотелось бы установить, какому именно бесконечному вложенному радикалу $R(a_n, e_1, e_2, e_3)$ соответствует каждый корень $f_n(t)$. По-видимому, это сложный вопрос, связанный с *проблемой Куммера* (см. [1, стр. 164]).

Во-вторых, было бы интересно найти ещё какие-нибудь серии значений n, для которых корни $f_n(t)$ допускают явные выражения через косинусы. Вероятно, при поиске таких серий нужно учитывать разложение дискриминанта $D(f_n)$ на простые сомножители (мы рассмотрели случай, когда дискриминант есть квадрат простого числа). Здесь могут быть полезны компьютерные эксперименты. Например, следующее равенство ($n = 631$), найденное с помощью компьютера, можно попытаться правильно сформулировать и затем обобщить:

$$\sqrt{397532+\sqrt{397532-\sqrt{397532-\sqrt{397532+\sqrt{397532-\sqrt{397532-\ldots}}}}}}=$$
$$=190+610\cos\frac{\pi}{7}-488\cos\frac{3\pi}{7}.$$

Здесь дискриминант равен $(7\cdot 61^3)^2$.

Во-третьих, можно ставить подобные задачи для других «периодических» бесконечных вложенных радикалов.

Некоторые правдоподобные гипотезы и интересные примеры по теме статьи заинтересованный читатель может найти по ссылке [7].

Список литературы

[1] *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.

[2] *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.

[3] *Вавилов В. В.* Итерации радикалов. М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, «Самообразование», 2000.

[4] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.

[5] *Осипов Н. Н.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // Математика в школе. 2012. №1. С. 64–69.

[6] *Прасолов В. В.* Тождества Рамануджана // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 104–107.

[7] `http://dxdy.ru/topic78185.html`.

Н. Н. Осипов, Сибирский федеральный университет (Красноярск)

`nnosipov@rambler.ru`