Восстановление треугольника по заданным точкам

С. А. Беляев

§ 1. Постановка задачи

В треугольнике отметили некоторые точки, а потом треугольник стёрли. Как восстановить (с помощью циркуля и линейки) треугольник по отмеченным точкам?

Наверняка такие задачи были известны ещё в Древней Греции. Однако первой печатной работой на эту тему, скорее всего, была статья [9] Л. Эйлера «Лёгкое решение одной трудной геометрической задачи». В ней Эйлер поставил вопрос о восстановлении треугольника по ортоцентру H, центроиду M, инцентру I и центру описанной окружности O. Ясно, что если эти точки совпадают, то треугольник является правильным. Если же эти точки не совпадают, то треугольник по ним определяется однозначно. Другое дело, что треугольник, будучи однозначно определённым, может быть, тем не менее, непостроимым. Так например, не всегда с помощью циркуля и линейки решается задача о трисекции угла.

§ 2. Список Верника

2.1. История вопроса

В [9] Эйлер ограничился минимальным набором точек, зато каких! Тот факт, что три из этих точек (O, M и H) лежат на одной прямой (она сейчас называется *прямой Эйлера*) явилось побочным результатом, которому Эйлер не придал большого значения. Основным результатом своей статьи он считал установление того факта, что если две из перечисленных четырёх точек совпадают, то все четыре совпадают и треугольник является правильным. Кроме того, довольно значительная часть его статьи посвящена вычислению расстояний между замечательными точками треугольника. Как известно, эти расстояния выражаются через длины сторон треугольника, полупериметр и радиусы вписанной и описанной окружности не самым простым образом. Более того, Эйлер делает это не самым коротким путём и не в самых удобных обозначениях. Можно только диву даваться, как после страниц непростых выкладок и нетривиальных преобразований Эйлер называет свою статью «Лёгкое решение одной трудной геометрической задачи». С англоязычным изложением этой статьи можно ознакомиться в [12] [1].

Первое обобщение этого труда Эйлера было сделано в 1982 году Вильямом Верником. В своей статье [14] Верник расширяет список точек для восстановления треугольника до следующего:

A, B, C, O — вершины треугольника и центр описанной окружности;

M_1, M_2, M_3 и M — середины сторон BC, CA и AC соответственно и центроид;

H_1, H_2, H_3 и H — основания высот из вершин A, B и C соответственно и ортоцентр;

L_1, L_2, L_3 и I — основания биссектрис из вершин A, B и C соответственно и инцентр.

Конечно, такие задачи встречались и ранее, но Верник первым задался вопросом их полного перечисления и решения. Три точки из 16 можно выбрать $C_{16}^2 = 560$ способами. Из них лишь 139 троек дают принципиально различные, нетривиальные задачи. Верник так или иначе установил тип 90 из этих 139 задач. 49 задач остались нерешёнными или неклассифицированными. Интересно, что после Верника остались нерешёнными задачи, которые позднее получили своё конструктивное решение.

Следующий прорыв через 14 лет, в 1996 году, сделал Майерс в [11], который решил ещё 29 из вышеупомянутых 49 задач и исправил решение Верника 102-й задачи. В статье Майерса есть такие слова:

> It is an interesting challenge to verify the results shown in the table. One sample verification is shown below; the remaining verifications (and extensions!) are left to the interested reader, who may obtain further information from the author.

Увы, заинтересованному читателю не суждено связаться с автором: статья Майерса вышла с редакторским сообщением о внезапной смерти автора в ноябре 1995 года.

Долгое время не была известна судьба оставшихся 20 задач. Существует мнение, что все задачи списка Верника, которые вообще имеют решение, решены Майерсом и остальные задачи решения не имеют (даже если это

[1] В связи с труднодоступностью этой статьи все желающие могут написать автору по адресу `srgblv@ya.ru`, и я вышлю электронную версию этой статьи.

пока не установлено). Майерс же и был первым, кто применил к неразрешимым задачам технику сведения задачи к кубическому уравнению, про которое известно, что его корни являются (в общем случае) непостроимыми с помощью циркуля и линейки. Именно с помощью этой техники позднее было доказано, что некоторые задачи не имеют решения. Для задач 90, 109, 110, 111 это сделал в 2009 году Шпехт [13], а для задач 81, 132, 136, 138 — А. В. Устинов [6] тоже в 2009 году (оба — через 13 лет после Майерса).

На сегодняшний день остались нерешёнными 12 задач. Надеюсь, они будут решены быстрее, чем за 14 лет, разделяющие самые значимые статьи по этому вопросу.

В этой статье решены все 72 разрешимые (на сегодняшний день) задачи. Я не ставил перед собой цели получить новый математический результат и решить все задачи списка Верника. Моей целью было решить все разрешимые задачи этого списка и предоставить учителю удобный справочный материал по способам решения этих задач, популяризируя их включение в учительскую практику.

2.2. Задачи Верника

Как было отмечено выше, существует 139 нетривиальных принципиально различных троек точек, по которым Верник предложил восстановить треугольник. Тройка (A, B, C) является, очевидно, тривиальной, а из трёх вариантов (A, B, M), (B, C, M) и (A, C, M) естественно оставить только один. Список оставшихся задач и составляет так называемый список Верника.

Список Верника

001	A, B, O	L	015	A, O, H_2	S	029	A, M_2, M	S
002	A, B, M_1	S	016	A, O, H	S	030	A, M_2, H_1	L
003	A, B, M_3	R	017	A, O, L_1	S	031	A, M_2, H_2	L
004	A, B, M	S	018	A, O, L_2	S	032	A, M_2, H_3	L
005	A, B, H_1	L	019	A, O, I	S	033	A, M_2, H	S
006	A, B, H_3	L	020	A, M_1, M_2	S	034	A, M_2, L_1	S
007	A, B, H	S	021	A, M_1, M	R	035	A, M_2, L_2	L
008	A, B, L_1	S	022	A, M_1, H_1	L	036	A, M_2, L_3	S
009	A, B, L_3	L	023	A, M_1, H_2	S	037	A, M_2, I	S
010	A, B, I	S	024	A, M_1, H	S	038	A, M, H_1	L
011	A, O, M_1	S	025	A, M_1, L_1	S	039	A, M, H_2	S
012	A, O, M_2	L	026	$A, M_1 L_2$	U	040	A, M, H	S
013	A, O, M	S	027	A, M_1, I	S	041	A, M, L_1	S
014	A, O, H_1	S	028	A, M_2, M_3	S	042	A, M, L_2	U

043	A, M, I	S
044	A, H_1, H_2	S
045	A, H_1, H	L
046	A, H_1, L_1	L
047	A, H_1, L_2	S
048	A, H_1, I	S
049	A, H_2, H_3	S
050	A, H_2, H	L
051	A, H_2, L_1	S
052	A, H_2, L_2	L
053	A, H_2, L_3	S
054	A, H_2, I	S
055	A, H, L_1	S
056	A, H, L_2	U
057	A, H, I	S
058	A, L_1, L_2	S
059	A, L_1, I	L
060	A, L_2, L_3	S
061	A, L_2, I	S
062	O, M_1, M_2	S
063	O, M_1, M	S
064	O, M_1, H_1	L
065	O, M_1, H_2	S
066	O, M_1, H	S
067	O, M_1, L_1	L
068	O, M_1, L_2	U
069	O, M_1, I	S
070	O, M, H_1	S
071	O, M, H	R
072	O, M, L_1	U
073	O, M, I	U
074	O, H_1, H_2	U
075	O, H_1, H	S
076	O, H_1, L_1	S
077	O, H_1, L_2	
078	O, H_1, I	
079	O, H, L_1	U
080	O, H, I	U
081	O, L_1, L_2	U
082	O, L_1, I	S
083	M_1, M_2, M_3	S
084	M_1, M_2, M	S
085	M_1, M_2, H_1	S
086	M_1, M_2, H_3	S
087	M_1, M_2, H	S
088	M_1, L_1, L_2	U
089	M_1, M_2, L_3	U
090	M_1, M_2, I	U
091	M_1, M, H_1	L
092	M_1, M, H_2	S
093	M_1, M, H	S
094	M_1, M, L_1	S
095	M_1, M, L_2	U
096	M_1, M, I	S
097	M_1, H_1, H_2	S
098	M_1, H_1, I	L
099	M_1, H_1, L_1	L
100	M_1, H_1, L_2	U
101	M_1, H_1, I	S
102	M_1, H_2, H_3	L
103	M_1, H_2, H	S
104	M_1, H_2, L_1	S
105	M_1, H_2, L_2	S
106	M_1, H_2, L_3	U
107	M_1, H_2, I	U
108	M_1, H, L_1	U
109	M_1, H, L_2	U
110	M_1, H, I	U
111	M_1, L_1, L_2	U
112	M_1, L_1, I	S
113	M_1, L_2, L_3	
114	M_1, L_2, I	U
115	M, H_1, H_2	U
116	M, H_1, H	S
117	M, H_1, L_1	S
118	M, H_1, L_2	
119	M, H_1, I	
120	M, H, L_1	U
121	M, H, I	U
122	M, L_1, L_2	U
123	M, L_1, I	
124	H_1, H_2, H_3	S
125	H_1, H_2, H	S
126	H_1, H_2, L_1	S
127	H_1, H_2, L_3	
128	H_1, H_2, I	
129	H_1, H, L_1	L
130	H_1, H, L_2	U
131	H_1, H, I	S
132	H_1, L_1, L_2	
133	H_1, L_1, I	S
134	H_1, L_2, L_3	
135	H_1, L_2, I	
136	H, L_1, L_2	U
137	H, L_1, I	
138	L_1, L_2, L_3	U
139	L_1, L_2, I	S

2.3. Обозначения в списке

Расшифровка условных обозначений в этой таблице такова.

R (*redundant*) — задачи, в которых положение двух точек определяет положение третьей. Например, такой является тройка (A, B, M_3). Такие задачи не имеют однозначного решения. В списке Верника их 3.

L (*locus dependent*) — задачи, в которых присутствует более слабая зависимость точек друг от друга. Точки не могут располагаться произвольно:

одна из них по отношению к другим должна лежать на каком-либо геометрическом месте. В зависимости от взаимного расположения точек задача может не иметь решения или иметь бесконечно много решений. Задач этого типа — 23.

S (*solvable*) — разрешимые (на сегодняшний день) задачи. Их 72.

U (*unsolvable*) — неразрешимые задачи. Таких 29.

Если соответствующее поле в таблице оставлено пустым, то ответ на сегодняшний день не известен. Пока это относится к 12 задачам.

Задача 102 у Верника значилась как S-задача. Майерс показал, что она является задачей L.

§ 3. Задачи списка

3.1. Разрешимые задачи

Как было сказано выше, доказательство невозможности восстановить треугольник по тем или иным точкам сводится к получению некоторого кубического уравнения, корни которого, как известно, вообще говоря невозможно построить с помощью циркуля и линейки.

Поэтому меня, как учителя, больше интересуют задачи списка Верника, которые имеют решение. Важно понять, как их использовать в учебном процессе и в какой именно момент этого процесса можно давать ту или иную задачу. Для этого, очевидно, их надо все решить. В этом и состоит основное содержание этой статьи. Но не только. Ниже приводится решение всех 72 разрешимых задач списка Верника. Однако для четырёх задач мне известно только алгебраическое решение. Это задачи 57 (A, I, H), 69 (O, M_1, I), 82 (O, L_1, I) и 131 (H_1, H, I). Дорогие читатели, если вы или ваши ученики сможете найти геометрическое решение хотя бы одной из этих задач, напишите, пожалуйста, мне по адресу `srgblv@ya.ru`. Я буду вам очень и очень признателен.

3.2. Организация решений

При решении остальных задач мне пришлось использовать довольно обширный арсенал средств элементарной геометрии. Каждое нижеприведённое решение я снабдил метками (или, как теперь модно говорить, тегами), которые показывают, какова основная идея моего решения. Это, конечно же, не означает, что моё решение оптимально и не существует лучшего. Если вам удастся придумать какое-либо интересное на ваш взгляд решение приведённой здесь задачи, пишите мне по указанному адресу.

Кроме того в последней главе этой статьи вы можете найти своеобразный навигатор, в котором можно найти номера тех задач, которые решаются с помощью указанного в навигаторе метода.

Всюду в этой статье я не провожу исследования количества решений задачи, довольствуясь построением только одного треугольника.

§ 4. Основные обозначения

Я привожу максимально сжатые и схематичные пошаговые построения искомого треугольника. Я старался придерживаться принципа «одна линия = один пункт построения», однако однотипные построения иногда приведены в одном пункте. Помимо вышеприведённых обозначений (см. п. 2.3), составляющих лексикографическую основу построения списка Верника, я применяю обозначения, стандартные в геометрии треугольника.

4.1. Точки

Везде считается, что все три заданные точки различны. Треугольники предполагаются остроугольными, что не принципиально.

Везде считается также, что треугольник построен, если построены его вершины A, B и C. При этом в треугольнике ABC вершина A всегда сверху, B — справа, C — слева, причём везде[2)] $\angle B > \angle C$.

Запись $M_1 = \frac{1}{2}[BC]$ означает, что строится точка M_1, середина отрезка BC.

Запись типа $C = AM_2 \cap BM_1$ обозначает, что точка C получена как пересечение прямых AM_2 и BM_1.

Запись типа $MM_1 = \frac{1}{2}AM$ означает необходимость продлить отрезок AM на половину его длины и получить точку M_1.

4.2. Отрезки и прямые

Далее a, b, c — стороны; m_a, m_b, m_c — медианы; l_a, l_b, l_c — биссектрисы; h_a, h_b, h_c — высоты; m_1, m_2, m_3 — медиатрисы[3)] (= серединные перпендикуляры) сторон треугольника; $m_x(XY)$ — медиатриса (= серединный перпендикуляр) отрезка XY.

[2)] Это принципиально важно только в одном месте. Угол между высотой и биссектрисой, исходящими из одной вершины, как известно, равен $|\angle B - \angle C|/2$. Чтобы не возиться с перебором случаев ввиду этого модуля, в этой статье везде $\angle B > \angle C$.

[3)] Мне очень нравится этот старинный и уже почти совсем забытый термин. Так, например, биссектриса — это луч, но не всякий луч — биссектриса. Так мы называем лишь особый луч. Точно так же медиатриса — это серединный перпендикуляр, но не всякий серединный перпендикуляр — медиатриса, а лишь серединный перпендикуляр к стороне треугольника. Почему же не вернуть этот весьма удачный термин обратно в школу? Заведомо он не хуже всяких там «апофем»!

Прямая, содержащая тот или иной отрезок, обозначается той же буквой с прибавлением нижнего индекса x, например, a_x — прямая, содержащая сторону $BC = a$, h_{a_x} — прямая, содержащая высоту $AH_1 = h_a$, и т. д.

Запись $h_{a_x} = AH$ означает, что прямая, содержащая высоту h_a треугольника, проведена через точки A и H.

Запись $a_x \perp h_{a_x}$ означает, что прямая a_x, содержащая сторону BC треугольника, проведена перпендикулярно прямой h_{a_x}.

Запись $\angle CAL_1 = \angle BAL_1$ обозначает, что нужно отложить угол $\angle CAL_1$, равный уже построенному углу $\angle BAL_1$.

4.3. Окружности

Ω — описанная окружность, R — её радиус; иногда, чтобы подчеркнуть, какая точка определяет описанную окружность, используется запись вида $\Omega(O, OA)$ — это означает, что построена описанная окружность с центром в точке M радиуса OA.

ω (без индексов) — вписанная окружность, r — её радиус;

ω_9 — окружность девяти точек;

$\omega(X, \rho)$ — окружность с центром в точке X радиусом ρ;

$s(XY, A)$ — сегмент, вмещающий угол A = геометрическое место точек, из которых отрезок XY виден под углом A;

$t(X, \pi)$ — касательная из точки X к окружности π.

4.4. Углы

Углы треугольника обозначаются A, B и C, то есть обозначение величины угла треугольника совпадает с обозначением его вершины. В результате этого путаница не возникает, так как такую вольность я допускаю лишь для углов треугольника. Например, ниже широко используется угол $\angle BIC = 90^\circ + A/2$. Обозначение $\angle BIC = 90^\circ + \angle BAC/2$ на мой взгляд более громоздко и менее наглядно.

§ 5. Решения

Перейдём теперь к решениям задач из списка Верника (нумерация как раз и идёт по этому списку). После номера задачи в круглых скобках указана её (примерная) сложность — конечно, субъективно.

Задача 2 (1). (A, B, M_1)

Идея. Медиана делит сторону пополам.

1) $CM_1 = BM_1$.

Задача 4 (1). (A, B, M)

Идея. Медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

1) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 2) $MM_2 = \frac{1}{2}BM$; 3) $C = AM_2 \cap BM_1$.

Задача 7 (1). (A, B, H)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам.

1) $h_{a_x} = AH$, $h_{b_x} = BH$; 2) $a_x \perp h_{a_x}$, $b_x \perp h_{b_x}$; 3) $C = a_x \cap b_x$.

Задача 8 (1). (A, B, L_1)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $a_x = BL_1$; 2) $\angle CAL_1 = \angle BAL_1$.

Задача 10 (1). (A, B, I)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $\angle CAI = \angle BAI$; 2) $\angle CBI = \angle ABI$.

Задача 11 (1). (A, O, M_1)

Идея. O — точка пересечения медиатрис.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $\Omega(O, OA)$; 3) $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 13 (1). (A, O, M)

Идея. O — точка пересечения медиатрис. Медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

1) Ω; 2) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 3) $b_x \perp OM_1$; 4) $b_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 14 (1). (A, O, H_1)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам.

1) Ω; 2) $a_x \perp AH_1$; 3) $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 15 (1). (A, O, H_2)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам.

1) Ω; 2) $b_x = AH_2$, $b_x \cap \Omega = C$; 3) $h_{b_x} \perp b_x$, $h_{b_x} \cap \Omega = B$.

Задача 16 (2). (A, O, H)

Идея. $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

1) Ω; 2) $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, $OM_1 \parallel AH$; 3) $a_x \perp OM_1$, $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 17 (2). (A, O, L_1)

Идея. Точка W[4)].

[4)] Имеется в виду факт, что биссектриса угла треугольника и медиатриса противоположной стороны пересекаются на описанной окружности. Многочисленные работы И. А. Кушнира и его коллег из Киева (прежде всего Г. Б. Филипповского) сделали обозначение этой точки de facto стандартным — эта точка называется точкой W.

1) Ω; 2) $l_{a_x} = AL_1$, $l_{a_x} \cap \Omega = W_1$; 3) OW_1; 4) окружность λ на L_1W_1 как на диаметре, $\lambda \cap OW_1 = M_1$; 5) $a_x \perp OM_1$, $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 18 (2). (A, O, L_2)

Идея. Сегмент.

1) Ω; 2) $b_x = AL_2$, $b_x \cap \Omega = C$; 3) $M_2 = \frac{1}{2}[AC]$, $\angle COM_2 = B$; 4) $s_1(AL_2, B/2)$, $s_2(CL_2, B/2)$; 5) $s_1 \cap s_2 \cap \Omega = B$.

Задача 19 (2). (A, O, I)

Идея. Теорема трилистника[5].

1) Ω; 2) $l_{a_x} = AL_1$, $l_{a_x} \cap \Omega = W_1$; 3) $\omega(W_1, W_1I)$, $\omega \cap \Omega = B, C$.

Задача 20 (1). (A, M_1, M_2)

Идея. Медианы делят стороны пополам.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $BM_1 = CM_1$.

Задача 23 (2). (A, M_1, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $b_x = AH_2$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega \cap b_x = C$; 3) $BM_1 = CM_1$.

Задача 24 (2). (A, M_1, H)

Идея. $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

1) $h_{a_x} = AH$; 2) $a_x = M_1H_1 \perp h_{a_x}$; 3) $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, $OM_1 \parallel AH$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 25 (2). (A, M_1, L_1)

Идея. Точка W.

1) $a_x = M_1L_1$, $l_{a_x} = AL_1$; 2) m_1, $m_1 \cap l_{a_x} = W_1$; 3) $m_x(AW_1) \cap m_1 = O$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 27 (3). (A, M_1, I)

Идея. IM_1 высекает r на высоте h_a.

1) $MA = \frac{2}{3}AM_1$.

После этого задача сводится к задаче 43 (A, M, I).

Задача 28 (1). (A, M_2, M_3)

Идея. Медианы делят стороны пополам.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $BM_3 = AM_3$.

Задача 29 (1). (A, M_2, M)

Идея. Медианы делят стороны пополам.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $BM = 2MM_2$.

---

[5] Точка пересечения медиатрисы с описанной окружностью равноудалена от концов данной стороны и центров вписанной и соответствующей вневписанной окружностей.

Задача 33 (1). (A, M_2, H)

Идея. Медиана делит сторону пополам.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $a_x \perp h_{a_x} = AH$; 3) $c_x \perp h_{c_x} = CH$; 4) $a_x \cap c_x = B$.

Задача 34 (1). (A, M_2, L_1)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $c_x\colon \angle CAL_1 = \angle BAL_1$; 3) $a_x = CL_1$; 4) $a_x \cap c_x = B$.

Задача 36 (1). (A, M_2, L_3)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $a_x\colon \angle ACL_3 = \angle BCL_3$; 3) $c_x = AL_3$, $c_x \cap a_x = B$.

Задача 37 (1). (A, M_2, I)

Идея. Касательная.

1) $CM_2 = AM_2 = b_x$; 2) $IK_2 \perp b_x \Rightarrow r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $t(A, \omega) \cap t(C, \omega) = B$.

Задача 39 (2). (A, M, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $b_x = AH_2$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 3) $\omega(M_1, M_1H_2)$; 4) $\omega \cap b_x = C$, $\omega \cap h_{b_x} = B$.

Задача 40 (2). (A, M, H)

Идея. Прямая Эйлера. Свойства медиан.

1) $OM = \frac{1}{2}MH$; 2) Ω; 3) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 4) $a_x \perp OM_1$, $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 41 (2). (A, M, L_1)

Идея. Точка W.

1) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 2) $a_x = M_1L_1$, $l_{a_x} = AL_1$; 3) m_1, $m_1 \cap l_{a_x} = W_1$; 4) $m(AW_1) \cap m_1 = O$; 5) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 43 (3). (A, M, I)

Идея. IM_1 высекает r на высоте h_a.

Для решения этой задачи нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, интересное само по себе.

В треугольнике ABC через середину M_1 стороны BC и центр вписанной окружности проведена прямая, которая пересекает высоту AH_1 в точке E. Тогда $AE = r$.

Доказательство. Пусть описанная окружность пересекает биссектрису AI_1 в точке W_1. Дуги BW_1 и W_1C равны и $W_1M \perp BC$. Тогда треугольники AEI и W_1MI подобны и верно равенство

$$\frac{AE}{AI} = \frac{M_1W_1}{IW_1}.$$

Из точки I проведём перпендикуляр IT к стороне AC. Треугольники AIT и CW_1M_1 подобны, поэтому

$$\frac{AI}{CW_1} = \frac{r}{W_1M_1}.$$

По теореме трилистника $CW_1 = IW_1$. Из последних двух подобий получим:

$$\frac{AE}{M_1W_1} = \frac{AI}{IW_1} = \frac{AI}{CW_1} = \frac{r}{W_1M_1},$$

то есть $AE = r$. □

Построение:

1) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 2) $AT \parallel IM_1$, $AT = IM_1$; 3) окружность ω_1 на AT как на диаметре; 4) $\omega_1 \cap (IM_1) = P$, $AP = r$ (!); 5) $\omega(I, r)$; 6) $t(A, \omega) \cap t(M_1, \omega) = B, C$.

Примечание. Это самая сложная задача на построение из списка Верника!

Задача 44 (1). (A, H_1, H_2)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам треугольника.

1) $h_{a_x} = AH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$; 2) $C = a_x \cap AH_2$; 3) $h_{b_x} \perp b_x$, $h_{b_x} \cap a_x = B$.

Задача 47 (3). (A, H_1, L_2)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла.

1) $h_{a_x} = AH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$; 2) окружность ω с центром L_2, касающуюся a_x; 3) $c_x = t(A, \omega)$, $c_x \cap a_x = B$; 4) $AL_2 \cap a_x = C$.

Примечание. Эта задача тождественна задаче 53.

Задача 48 (1). (A, H_1, I)

Идея. Касательная.

1) $h_{a_x} = AH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $t(A, \omega) \cap a_x = B, C$.

Задача 49 (1). (A, H_2, H_3)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам треугольника.

1) $b_x = AH_2$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) $c_x = AH_3$, $h_{c_x} \perp c_x$; 3) $h_{b_x} \cap c_x = B$, $h_{c_x} \cap b_x = C$.

Задача 51 (1). (A, H_2, L_1)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $b_x = AH_2$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) c_x: $\angle BAL_1 = \angle H_2AL_1$, $c_x \cap h_{b_x} = B$; 3) $a_x = BL_1$, $a_x \cap b_x = C$.

Задача 53 (3). (A, H_2, L_3)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла.

1) $b_x = AH_2$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) $c_x = AL_3$, $c_x \cap h_{b_x} = B$; 3) окружность ω с центром L_3, касающаяся b_x; 4) $t(B, \omega) \cap b_x = C$.

Примечание. Эта задача тождественна задаче 47.

Задача 54 (2). (A, H_2, I)

Идея. Касательная.

1) $b_x = AH_1$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) $IK_2 \perp b_x$, $IK_2 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $t(A, \omega) \cap h_{b_x} = B$; 5) $t(B, \omega) \cap h_{b_x} = C$.

Задача 55 (3). (A, H, L_1)

Идея. Угол $\varphi = (\angle B - \angle C)/2$.

1) $\varphi = \angle L_1AH = (B - C)/2$; 2) $h_{a_x} = AH$, $a_x \perp h_{a_x}$ (через L_1); 3) N_1 симметрична H относительно a_x; 4) $\angle ABN_1 = B + 90^\circ - C = 90^\circ + 2\varphi$, $s(AN_1, 90^\circ + 2\varphi)$, $s \cap a_x = B$; 5) $\angle N_1BH_1 = 90^\circ - C$, b_x: отложить от AH_1 $\angle H_1AC = 90^\circ - C$; 6) $b_x \cap a_x = C$.

Задача 57 (3). (A, I, H)

Идея. Алгебраический метод.

В этой задаче, как и в других, которые решаются алгебраическим методом, я не буду подробно описывать процесс построения — читатель сможет его легко восстановить. Я же ограничусь лишь анализом. Всё, что необходимо здесь, так это понимание возможности построения корней квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки.

Предположим, что задача решена и обозначения выбраны так, как на рис. 1.

Докажем, что треугольники IDW и M_1IW подобны. В самом деле, у них есть общий угол $\angle AWD = \angle IAH = \varphi = (B - C)/2$. Покажем, что их

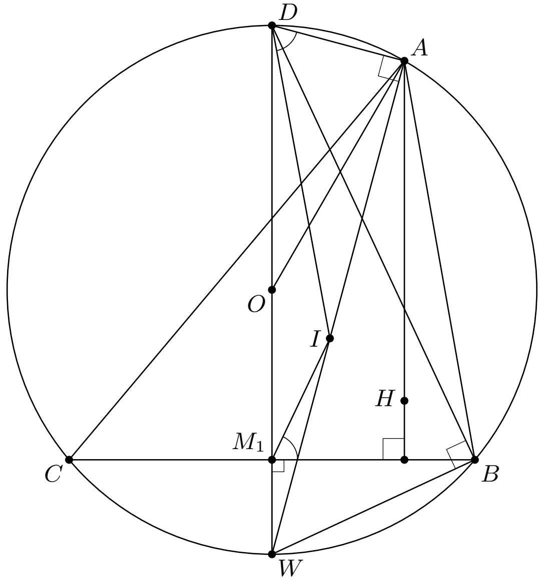

Рис. 1

стороны пропорциональны. В прямоугольном треугольнике BDW с проведённой высотой BM_1 воспользуемся тем, что квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу. Имеем $BW^2 = WD \cdot WM_1$. По теореме трилистника $BW = IW$. Тогда $IW^2 = WD \cdot WM_1$. Последнее соотношение означает пропорциональность сторон треугольников IDW и M_1IW, а в совокупности с указанным равенством углов это доказывает их подобие.

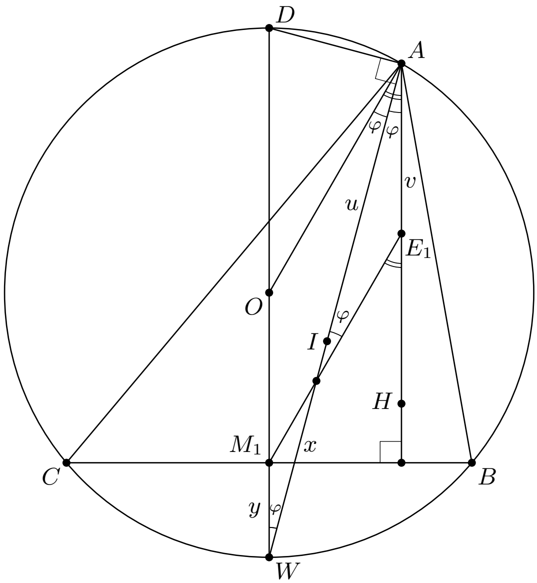

Рис. 2

Обозначим теперь длины отрезков так: $AI = u$, $AE_1 = v = AH/2$, $IW = x$, $WM_1 = y$. Тогда отрезок AW, с одной стороны, равен $x + u$. С другой стороны, он равен сумме длин оснований равнобедренных треугольников[6], образованных пересечением прямых AW и M_1E_1. Значит,

$$x + u = 2y\cos\varphi + 2v\cos\varphi.$$

Откуда

$$WM_1 = y = \frac{x+u}{2\cos\varphi} - v.$$

Так как из прямоугольного треугольника AWD следует, что

$$WD = z = \frac{x+u}{\cos\varphi},$$

[6] Треугольники равнобедренные в силу известного факта, что AOM_1E_1 — параллелограмм.

указанное выше подобие запишется в виде

$$x^2 = yz = \left(\frac{x+u}{2\cos\varphi} - v\right) \cdot \frac{x+u}{\cos\varphi}.$$

Корень x этого квадратного уравнения строится с помощью циркуля и линейки. После этого восстановить треугольник не составляет труда.

Задача 58 (3). (A, L_1, L_2)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла.

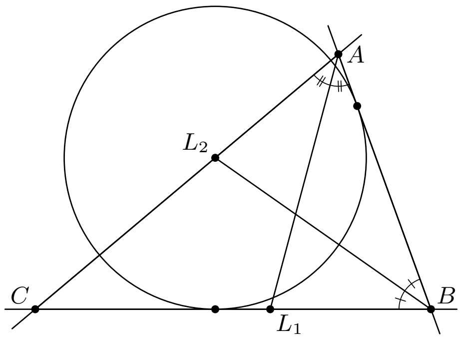

Рис. 3

1) $b_x = AL_2$; 2) c_x симметрична b_x относительно $l_{a_x} = AL_1$; 3) окружность ω с центром L_2, касающаяся c_x; 4) $t(l_1, \omega) = a_x$; 5) $a_x \cap c_x = B$, $a_x \cap b_x = C$.

Задача 60 (2). (A, L_2, L_3)

Идея. Сегмент.

1) $b_x = AL_2$, $c_x = AL_3$, $\angle(b_x, c_x) = A$; 2) $s(L_2L_3, 90^\circ + A/2)$; 3) l_{a_x}, $l_{a_x} \cap \omega = I$; 4) $L_2I \cap c_x = B$, $L_3I \cap b_x = C$.

Задача 61 (1). (A, L_2, I)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $b_x = AL_2$, $l_{b_x} = IL_2$, $l_{a_x} = AI$; 2) $c_x\colon \angle BAI = \angle L_2AI$, $B = c_x \cap l_{b_x}$; 3) $a_x\colon \angle ABI = \angle CBI$; 4) $a_x \cap b_x = C$.

Задача 62 (1). (O, M_1, M_2)

Идея. Свойства медиан.

Первое решение.

1) $BM_1 = M_1C, AM_2 = M_2C$.

Второе решение.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $b_x \perp OM_2$, $a_x \cap b_x = C$; 3) $\Omega = \Omega(O, C)$; 4) $a_x \cap \Omega = B$, $b_x \cap \Omega = A$.

Задача 63 (1). (O, M_1, M)

Идея. Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $AM = 2MM_1$; 3) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 65 (2). (O, M_1, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega \cap a_x = B, C$; 3) $b_x = CH_2$; 4) Ω, $\Omega \cap b_x = A$.

Задача 66 (2). (O, M_1, H)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $OM = \frac{1}{2}MH$; 3) $AM = 2MM_1$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 69 (2). (O, M_1, I)

Идея. Алгебраический метод.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $d = OI$, формула Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow R = r + \sqrt{r^2 + d^2}$. Этот отрезок строится. После этого строится $\Omega = \Omega(O, R)$, $\Omega \cap a_x = B, C$; 5) $t(B, \omega) \cap t(C, \omega) = A$.

Примечание. Редкий случай, когда алгебраические решение эстетично. Синтетическое решение явно будет сложнее, но и его интересно найти. Эта задача оставляется вам, читатель.

Задача 70 (2). (O, M, H_1)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $MH = 2OM$; 2) $h_{a_x} = HH_1$; 3) $a_x \perp h_{a_x}$; 4) $OM_1 \perp a_x$; 5) $MA = 2MM_1$; 6) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 75 (2). (O, H_1, H)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $h_{a_x} = HH_1$; 2) $a_x \perp h_{a_x}$; 3) $OM_1 \perp a_x$; 4) $OM = \frac{1}{2}MH$; 5) $m_a = MM_1 \cap$ $\cap\, h_{a_x} = A$; 6) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 76 (3). (O, H_1, L_1)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла.

1) $a_x = H_1L_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) $\omega(L_1, L_1H_1)$; 3) $t(O, \omega)$, $t \cap h_{a_x} = A$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 82 (3). (O, I, L_1)

Идея. Алгебраический метод.

Пусть T — основание перпендикуляра из точки O на прямую IL_1. Пусть также $AT = WT = x$, $IT = d$, $L_1T = l$. Так как точка L_1 лежит на общей хорде BC описанной окружности Ω и окружности $\omega(W, WI)$, степень этой точки относительно каждой из этих окружностей одинакова (прямая BC является их радикальной осью). Значит, $L_1W \cdot L_1A = L_1I \cdot L_1W'$, где

W' — точка, диаметрально противоположная I относительно W. Получаем $(x-l)\cdot(x+l)=(l-d)\cdot(2x-d-l)$. Построив решение x этого квадратного уравнения, легко восстановить требуемый треугольник.

Задача 83 (1). (M_1, M_2, M_3)

Идея. Треугольник Евклида.

1) Провести три прямые Евклида — прямые, параллельные сторонам серединного треугольника $M_1M_2M_3$. Эти три прямые пересекутся в вершинах исходного треугольника.

Задача 84 (1). (M_1, M_2, M)

Идея. Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

1) $AM = 2MM_1$, $BM = 2MM_2$; 2) $AM_2 \cap BM_1 = C$.

Задача 85 (2). (M_1, M_2, H_1)

Идея. Свойства медиан.

1) $a_x = M_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) перпендикуляр l из M_2 к h_{a_x}; 3) $P = l \cap h_{a_x}$, $AP = PH_1$; 4) $C = a_x \cap AM_2$, $BM_1 = M_1C$.

Задача 86 (2). (M_1, M_2, H_3)

Идея. Свойства медиан.

1) $c_x \parallel M_1M_2$ через H_3; 2) $h_{c_x} \perp c_x$ через H_3; $P = h_{c_x} \cap M_1M_2$; $CP = PH_3$; 3) $A = CM_2 \cap c_x$; $B = CM_1 \cap c_x$.

Задача 87 (3). (M_1, M_2, H)

Долгое время в этой задаче мне было известно лишь алгебраическое решение. Я приведу его здесь, чтобы ярче подчеркнуть блестящее геометрическое решение, найденное моим учеником[7)].

1 способ. Идея. Алгебраический метод.

Пусть T — точка пересечения CH и M_1M_2. Ясно, что $CT \perp M_1M_2$. Пусть $M_1T = u$, $M_2T = v$, $HT = d$, $CT = x$. Понятно, что построив на прямой $h_{c_x} = HT \perp M_1M_2$ точку C на расстоянии x от прямой M_1M_2, мы легко сможем восстановить треугольник ABC.

Предположим, что задача решена и требуемый треугольник построен. Тогда по теореме Пифагора $CM_1^2 = x^2 + u^2$, $CM_2^2 = x^2 + v^2$, далее $BC = 2\sqrt{x^2+u^2}$, $AC = 2\sqrt{x^2+v^2}$. По теореме о средней линии $BH_3 = 2u$, $AH_3 = 2v$. Кроме того, $TH_3 = x$, $HH_3 = x-d$. Тогда $BH^2 = 4u^2 + (x-d)^2$.

Так как $AH \perp BC$, получаем, что $CH^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2$. Имеем

$$(x+d)^2 - 4a^2 - (x-d)^2 = 4(x^2+v^2) - 4(u+vb)^2.$$

7) Ярославом Колотиловым, учеником 9 класса школы № 1199 «Лиги Школ».

После упрощения получаем квадратное уравнение $x^2 - xd - 2uv = 0$, корни которого легко строятся.

Построение:

1) $h_{c_x} = HT \perp M_1M_2$, $M_1T = u$, $M_2T = v$, $HT = d$; 2) $C \in HT$: $CT = x = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + uv}$; 3) $AC = 2CM_2$.

2 способ. (!) (Идея. Свойства медиан.)

Пусть точка D симметрична точке M_2 относительно точки M_3. Тогда BCM_2D — параллелограмм. Так как прямая BH перпендикулярна стороне CM_2 этого параллелограмма, она перпендикулярна и другой его стороне BD. Значит, треугольник HBD прямоугольный и середина O_1 отрезка HD является центром его описанной окружности. Отразим теперь точку O_1 относительно точки M_3, чтобы получить точку O_2. Из равенства треугольников BO_1M_3 и AO_2M_3 (по двум сторонам $M_3O_1 = M_3O_2$, $BM_3 = AM_3$ и углу между ними) следует, что отрезок AO_2 равен BO_1, то есть половине уже построенного отрезка HD. Следовательно, точка A лежит на окружности с центром в точке O_2 и радиусом $\frac{1}{2}HD$.

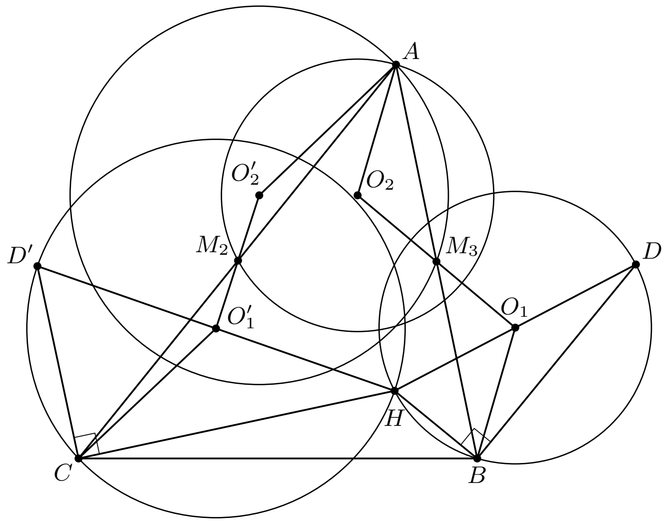

Рис. 4

Построив аналогичную конструкцию, отражая точку M_3 относительно M_2, получим, что точка A лежит на окружности с центром в точке O_2' и радиусом $\frac{1}{2}HD'$ (обозначения см. на рис. 4). Таким образом, можно найти точку A как точку пересечения двух окружностей и окончательно восстановить треугольник.

Построение:

1) $DM_3 = M_2M_3$, $D'M_2 = M_2M_3$; 2) $O_1 = \frac{1}{2}[HD]$, $O_2 = \frac{1}{2}[HD']$; 3) $M_3O_2 = M_3O_1$, $M_3O_2' = M_3O_1'$; 4) $\omega_1\left(O_2, \frac{1}{2}HD\right)$, $\omega_2\left(O_2', \frac{1}{2}HD'\right)$; 5) $\omega_1 \cap \omega_2 = A$; 6) $CM_2 = AM_2$, $BM_3 = AM_3$.

Задача 92 (2). (M_1, M, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $AM = 2MM_1$; 2) $b_x = AH_2$: $h_{b_x} = \perp b_x$; 3) $\omega(M_1, M_1H_2)$; 4) $\omega \cap h_{b_x} = B$; 5) $BM_1 \cap \omega = C$.

Задача 93 (2). (M_1, M, H)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $AM = 2MM_1$; 2) $OM = \frac{1}{2}MH$; 3) Ω; 4) $a_x \perp h_{a_x} = AH$; 5) $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 94 (2). (M_1, M, L_1)

Идея. Точка W.

1) $AM=2MM_1$; 2) $l_{a_x}=AL_1$, $a_x=M_1L_1$, $a_x \cap l_{a_x}=W_1$; 3) $m_1 \cap m(AW_1)=O$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 96 (3). (M_1, M, I)

Идея. IM_1 высекает r на высоте h_a.

1) $AM = 2MM_1$; 2) После этого задача свелась к задаче 43 (A, M, I).

Задача 97 (2). (M_1, H_1, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $a_x = M_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega \cap a_x = B, C$; 3) $CH_2 \cap h_{a_x} = A$.

Задача 101 (3). (M_1, H_1, I)

Идея. IM_1 высекает r на высоте h_a.

1) $a_x = M_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $IM_1 \cap h_{a_x} = T$, $AT = r$; 4) $\omega(I, r)$; 5) $t(A, \omega) \cap a_x = B, C$.

Задача 103 (2). (M_1, H_2, H)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $\omega(M_1, M_1H_2)$; 2) $HH_2 \cap \omega = B$, $BM_1 \cap \omega = C$; 3) $b_x = CH_2 \perp BH_2$; 4) $h_{a_x} = HH_1 \perp BC$; 5) $b_x \cap h_{a_x} = A$.

Задача 104 (2). (M_1, H_2, L_1)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$ (см. рис. 5).

1) $a_x = M_1L_1$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega \cap a_x = B, C$; 3) окружность ω_1 с центром L_1, касающаяся $b_x = CH_2$; 4) $t(B, \omega_1) \cap b_x = A$.

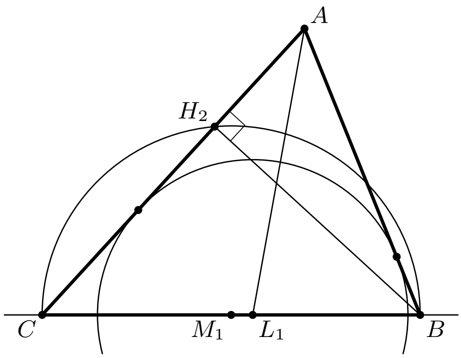

Рис. 5

Задача 105 (2). (M_1, H_2, L_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $b_x = L_2H_2$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega \cap b_x = C$; 3) $CM_1 \cap \omega = B$; 4) $\angle CBL_2 = \angle L_2BA$.

Задача 112 (2). (M_1, L_1, I)

Идея. Точка W. Теорема трилистника.

1) $a_x = M_1L_1$, $l_{a_x} = IL_1$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) m_1, $m_1 \cap l_{a_x} = W_1$; 5) $\omega_1(W_1, IW_1) \cap a_x = B, C$; 6) $t(B, \omega) \cap l_{a_x} = A$.

Задача 116 (2). (M, H_1, H)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $OM = \frac{1}{2}MH$; 2) $h_{a_x} = HH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$; 3) $OM_1 \perp a_x$; 4) $MA = 2MM_1$; 5) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 117 (2). (M, H_1, L_1)

Идея. Свойства медиан. Точка W.

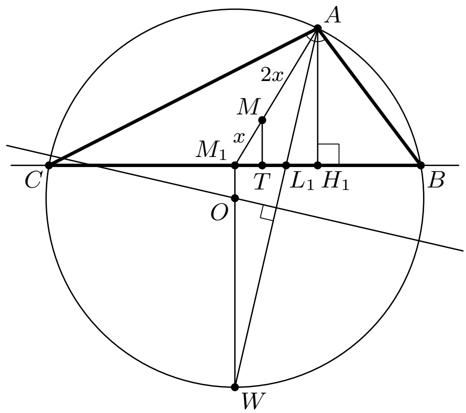

Рис. 6

1) $a_x = L_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) $MT \perp a_x$, $TM_1 = \frac{1}{2}H_1T$; 3) $MM_1 \cap h_{a_x} = A$; 4) $l_{a_x} = AL_1$; 5) $m_1 \cap l_{a_x} = W_1$; 6) $m_1 \cap m(AW_1) = O$; 7) $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 124 (2). (H_1, H_2, H_3)

Идея. $H = I_H$.

1) Построить биссектрисы ортотреугольника и провести к ним перпендикуляры.

Задача 125 (1). (H_1, H_2, H)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам.

1) $a_x \perp HH_1$; 2) $b_x \perp HH_2$; 3) $C = a_x \cap b_x$, $A = b_x \cap HH_1$, $B = a_x \cap HH_2$.

Задача 126 (3). (H_1, H_2, L_1)

Идея. Сегмент.

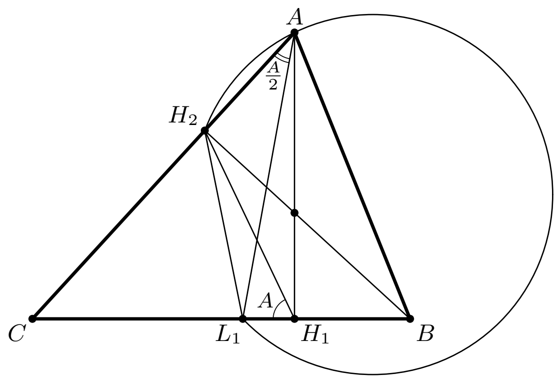

Рис. 7

1) $a_x = L_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$, $\angle H_2H_1L_1 = A$; 2) $s(H_2L_1, A/2) \cap h_{a_x} = A$; 3) $b_x = AH_2$, $b_x \cap a_x = C$; 4) $c_x \colon \angle(c_x, b_x) = A$, $c_x \cap a_x = B$.

Задача 131 (3). (H_1, H, I)

Идея. Алгебраический метод (см. рис. 8).

Естественны начальные шаги построения: $h_{a_x} = HH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$, $IK_1 \perp a_x$; $IK_1 = r$. Пусть T — основание перпендикуляра из точки I на прямую $HH_1 = h_{a_x}$. Обозначим $IT = d$, $AH_1 = x$. Пусть теперь прямая IM_1 пересекает прямую h_{a_x} в точке N. Известно, что $AN = r$ (см. решение задачи 43). Обозначая, как обычно, $\varphi = \angle IAH$, имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{IT}{AT} = \frac{q}{h_a - r}.$$

Пусть теперь E_1 — середина отрезка AH. Тогда $AN = IK_1 = TH_1 = r$, $NH_1 = h_a - r$, $NT = h_a - 2r$, $E_1H_1 = h_a - x/2$. Из подобия треугольников

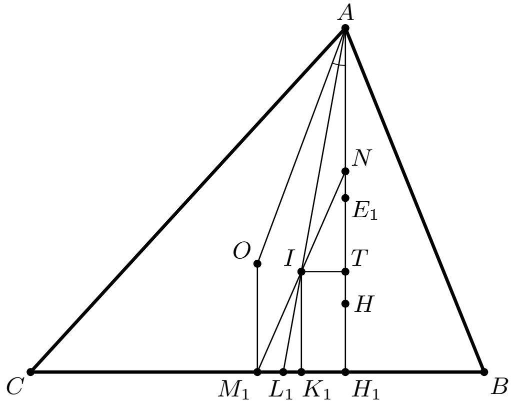

Рис. 8

INT и M_1NH_1 получаем

$$\frac{H_1M_1}{IT} = \frac{NH_1}{NT} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{H_1M_1}{q} = \frac{h_a - r}{h_a - 2r},$$

откуда

$$H_1M_1 = q\frac{h_a - r}{h_a - 2r}.$$

С другой стороны, так как $AO \parallel M_1E_1$, то $\angle M_1E_1H_1 = 2\varphi = B - C$, и из треугольника $M_1E_1H_1$ получаем $H_1M_1 = H_1E_1 \operatorname{tg} 2\varphi$. Тогда

$$H_1M_1 = H_1E_1 \operatorname{tg} 2\varphi = \left(h_a - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Приравнивая два полученных выражения для H_1M_1 и подставляя найденное выше значение для $\operatorname{tg} \varphi$, получаем:

$$q \cdot \frac{h_a - r}{h_a - 2r} = \left(h_a - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{2\frac{q}{h_a - r}}{1 - \left(\frac{q}{h_a - r}\right)^2}.$$

Это уравнение линейно относительно $x = AH$. Следовательно, этот отрезок строится циркулем и линейкой. Построив точку A, строим N, M_1 и $\Omega(O, OA)$ и получаем точки B и C.

Задача 133 (2). (H_1, L_1, I)

Идея. Касательная.

1) $a_x = L_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $L_1I \cap h_{a_x} = A$; 5) $t(a, \omega) \cap a_x = B, C$.

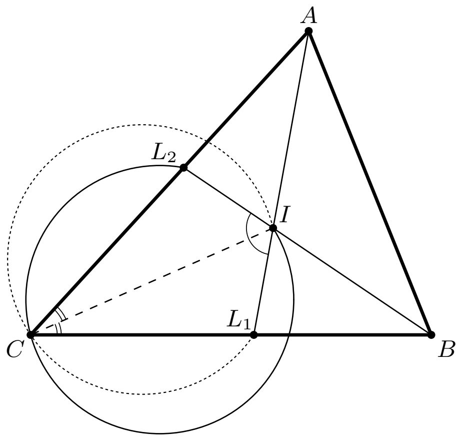

Рис. 9

Задача 139 (3). (I, L_1, L_2)

Идея. Сегмент.

1) $\angle L_1IL_2 = 90^\circ + C/2 \Rightarrow C/2$; 2) $s_1(IL_1, C/2)$, $s_2(IL_2, C/2)$, $s_1 \cap s_2 = C$; 3) $l_{a_x} = IL_1$, $l_{b_x} = IL_2$,; 4) $CL_1 = a_x$, $CL_2 = b_x$; 5) $a_x \cap l_{b_x} = B$, $b_x \cap l_{a_x} = A$.

§ 6. Навигатор

В этом разделе собраны идеи, которые я применял при решении задач списка Верника. Удивительно, но такие простые по постановке задачи обладают широчайшим диапазоном сложности применяемых методов. Некоторые из них настолько просты, что соответствующие решения совсем не нуждаются ни в каких пояснениях и являются простыми упражнениями. Некоторые потребовали применения, например, теоремы Эйлера. Наконец, есть несколько задач, в которых необходимо знание типично олимпиадной тематики, например задача 43 и к ней примыкающие. Я потратил много часов на их решение, но это были счастливые часы.

6.1. Навигатор по номеру

№	Задача	Трудность	Идея
2	A, B, M_1	1	Медиана делит сторону пополам
4	A, B, M	1	Медианы делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины
7	A, B, H	1	Высоты перпендикулярны сторонам

№	Задача	Трудность	Идея
8	A, B, L_1	1	Симметрия относительно биссектрисы
10	A, B, I	1	Симметрия относительно биссектрисы
11	A, O, M_1	1	O — точка пересечения медиатрис
13	A, O, M	1	O — точка пересечения медиатрис. Медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины
14	A, O, H_1	1	Высоты перпендикулярны сторонам
15	A, O, H_2	1	Высоты перпендикулярны сторонам
16	A, O, H	2	$OM_1 = \frac{1}{2}AH$
17	A, O, L_1	2	Точка W
18	A, O, L_2	2	Сегмент
19	A, O, I	2	Теорема трилистника
20	A, M_1, M_2	1	Медианы делят стороны пополам
23	A, M_1, H_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
24	A, M_1, H	2	$OM_1 = \frac{1}{2}AH$
25	A, M_1, L_1	2	Точка W
27	A, M_1, I	3	IM_1 высекает r на высоте h_a
28	A, M_2, M_3	1	Медианы делят стороны пополам
29	A, M_2, M	1	Медианы делят стороны пополам
33	A, M_2, H	1	Медианы делят стороны пополам
34	A, M_2, L_1	1	Симметрия относительно биссектрисы
36	A, M_2, L_3	1	Симметрия относительно биссектрисы
37	A, M_2, I	1	Касательная
39	A, M, H_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
40	A, M, H	2	Прямая Эйлера. Свойства медиан

№	Задача	Трудность	Идея
41	A, M, L_1	2	Точка W
43	A, M, I	3	IM_1 высекает r на высоте h_a
44	A, H_1, H_2	1	Высоты перпендикулярны сторонам треугольника
47	A, H_1, L_2	3	Биссектриса равноудалена от сторон угла
48	A, H_1, I	1	Касательная
49	A, H_2, H_3	1	Высоты перпендикулярны сторонам треугольника
51	A, H_2, L_1	1	Симметрия относительно биссектрисы
53	A, H_2, L_3	3	Биссектриса равноудалена от сторон угла
54	A, H_2, I	2	Касательная
55	A, H, L_1	3	Угол $\varphi = \dfrac{B-C}{2}$
57	A, H, I	3	Алгебраический метод
58	A, L_1, L_2	3	Биссектриса равноудалена от сторон угла
60	A, L_2, L_3	2	Сегмент
61	A, L_2, I	1	Симметрия относительно биссектрисы
62	O, M_1, M_2	1	Свойства медиан
63	O, M_1, M	1	Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины
65	O, M_1, H_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
66	O, M_1, H	2	Прямая Эйлера
69	O, M_1, I	2	Алгебраический метод
70	O, M, H_1	2	Прямая Эйлера
75	O, H_1, H	2	Прямая Эйлера

№	Задача	Трудность	Идея
76	O, H_1, L_1	3	Биссектриса равноудалена от сторон угла
82	O, L_1, I	3	Алгебраический метод. Степень точки относительно окружности
83	M_1, M_2, M_3	1	Треугольник Евклида
84	M_1, M_2, M	1	Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины
85	M_1, M_2, H_1	2	Свойства медиан
86	M_1, M_2, H_3	2	Свойства медиан
87	M_1, M_2, H	3	Алгебраический метод. Свойства медиан
92	M_1, M, H	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
93	M_1, M, H	2	Прямая Эйлера
94	M_1, M, L_1	2	Точка W
96	M_1, M, I	3	IM_1 высекает r на высоте h_a
97	M_1, H_1, H_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
101	M_1, H_1, I	3	IM_1 высекает r на высоте h_a
103	M_1, H_2, H	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
104	M_1, H_2, L_1	2	Биссектриса равноудалена от сторон угла. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
105	M_1, H_2, L_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
112	M_1, L_1, I	2	Точка W. Теорема трилистника
116	M, H_1, H	2	Прямая Эйлера
117	M, H_1, L_1	2	Свойства медиан. Точка W

№	Задача	Трудность	Идея
124	H_1, H_2, H_3	2	$H = I_H$
125	H_1, H_2, H	2	Высоты перпендикулярны сторонам
126	H_1, H_2, L_1	3	Сегмент
131	H_1, H, I	3	Алгебраический метод
133	H_1, L_1, I	2	Касательная
139	I, L_1, L_2	3	Сегмент

6.2. Навигатор по трудности

Я различаю здесь трудность и сложность задачи. Трудность понимается как наличие в задаче содержательных геометрических идей. Сложность понимается как «сложенность», то есть наличие в задаче нескольких шагов, не обязательно трудных. В какой-то мере представление о сложности задачи даёт количество пунктов построения. Разумеется, приведённая классификация является субъективной.

Трудность	Задачи	Примечание
1. Простые построения	2, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 28, 29, 33, 34, 36, 37, 44, 48, 49, 51, 61, 62, 63, 83, 84	Построения в этих задачах просты и естественны. Каждая линия логично влечёт следующую. Эти задачи можно рекомендовать для первоначального знакомства
2. Задачи средней трудности	16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 39, 40, 41, 54, 60, 65, 66, 69, 70, 75, 85, 86, 92, 93, 94, 97, 103, 104, 105, 112, 116, 117, 124, 125, 133	Имеется в виду нормальная трудность для выпускника хорошего физико-математического класса
3. Трудные задачи	27, 43, 47, 53, 55, 57[8], 58, 76, 82, 87, 96, 101, 126, 131, 139	Задачи повышенной трудности, иногда содержащие факты олимпиадной тематики

[8] Задачи 57, 82, 87 и 131 ждут своего геометрического решения.

6.3. Навигатор по идеям

При решении задач списка Верника я применял многие факты элементарной геометрии. Не все они входят в стандартный школьный курс. Я не ставил перед собой целью доказать здесь их все: это непомерно увеличило бы объём статьи. Заинтересованный читатель может найти доказательства в разнообразной литературе. Например, заведомо всё есть в классическом сборнике В. В. Прасолова [5]. Интересная подборка задач и обсуждение того факта, что прямая IM_1 высекает на высоте AH_1 отрезок, равный радиусу описанной окружности, можно найти в замечательной статье Г. Б. Филипповского и А. В. Карлюченко «Блестящие свойства прямой M_1I в треугольнике!» в сборнике [7]. Часть терминологии я позаимствовал из книг И. А. Кушнира [3], [4], [2] (точка W, треугольник Евклида[9]).

Идея	Задачи	Примечание
Алгебраический метод	57, 69, 82, 87, 131	Построение отрезка по формуле
Биссектриса равноудалена от сторон угла	47, 53, 58, 76, 104	Простой факт, широко применяемый в задачах на восстановление треугольника
Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1, H_2)$	23, 39, 65, 92, 97, 103, 104, 105	Так как $\angle BH_2C = \angle BH_3C = 90°$, четыре точки B, C, H_2 и H_3 лежат на одной окружности с диаметром BC и центром M_1
Высоты перпендикулярны сторонам	7, 14, 15, 44, 49, 125	В этих задачах этот факт является единственно используемым, и поэтому они довольно просты
Касательная	37, 48, 54, 133	Линия получается как касательная к уже проведённой окружности.
Прямая Эйлера	40, 66, 70, 75, 93, 116	Точки O, M и H лежат на одной прямой, причём $HM = 2OM$.

[9] Мне хотелось бы защитить этот термин. При доказательстве первой теоремы евклидовой (в отличие от аффинной!) геометрии — теоремы о сумме углов треугольника мы проводим как раз прямую Евклида. Кроме того, проведение трёх прямых Евклида позволяет доказать теорему Эйлера. В книге Ефремова «Новая геометрия треугольника»[1] этот треугольник называется *удвоенным треугольником*. Кстати, именно у Ефремова я позаимствовал термин *медиатриса*.

Идея	Задачи	Примечание
Свойства медиан	2, 4, 13, 20, 28, 29, 33, 40, 62, 63, 84, 85, 86, 87, 117	Медианы делят стороны пополам и делятся в отношении $2:1$, считая от вершины
Сегмент	18, 60, 126, 139	Сегмент, вмещающий данный угол, — ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом
Симметрия относительно биссектрисы	8, 10, 34, 36, 51, 61	Стороны угла симметричны относительно биссектрисы этого угла
Теорема трилистника	19, 112	$CW_1 = IW_1 = BW_1$
Точка W	17, 25, 41, 94, 112, 117	Биссектриса угла треугольника и медиатриса противоположной стороны пересекаются на описанной окружности (в точке W)
Треугольник Евклида	83	Треугольник, образованный прямыми, параллельными сторонам данного треугольника и проходящими через его вершины
Угол $\varphi = \dfrac{B-C}{2}$	55	$\angle(h_a, l_a) = \dfrac{B-C}{2}$
$H = I_H$	124	Ортоцентр треугольника является инцентром его ортотреугольника
IM_1 высекает r на высоте h_a	27, 43, 96, 101	Олимпиадный факт
O — точка пересечения медиатрис	11, 13	Известный факт
$OM_1 = \frac{1}{2}AH$	16, 24	Расстояние от вершины до ортоцентра вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до противоположной стороны

Список литературы

[1] *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. Одесса, Типография Бланкоиздательства М. Шпенцера, д. № 64, 1902.

[2] *Кушнир И. А.* Геометрия на баррикадах 2. Киев: Знання Украины, 2011.

[3] *Кушнир И. А.* Геометрия на баррикадах. Киев: Факт, 2009.

[4] *Кушнир И. А.* Геометрия. Поиск и вдохновение. М.: МЦНМО, 2013.

[5] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006.

[6] *Устинов А. В.* Можно ли построить треугольник по основаниям биссектрис? // «Потенциал»: Математика, Физика, Информатика. 2013. Т. 10. С. 41–50.

[7] Учим математике 4 (материалы открытой школы-семинара учителей математики) / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. М.: МЦНМО, 2014.

[8] *Фурсенко В. В.* Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника // Математика в школе. 1937. Т. 5. С. 4–30; 1937. Т. 6. С. 21–45.

[9] *Euler L.* Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum // Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. 1767. V. 11. P. 103–123.

[10] *Marinković V., Janičić P.* Towards understanding triangle construction problems // Intelligent Computer Mathematics. 2012. V. 7362. P. 127–142.

[11] *Meyers L. F.* Update on William Wernick's «triangle constructions with three located points» // Mathematics Magazine. 1996. V. 69, № 1. P. 46–49.

[12] *Sandifer E.* How Euler did it. The Euler line // MAA Online. 2009.

[13] *Specht E.* Wernicks liste, `http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/wernick/`.

[14] *Wernick W.* Triangle constructions with three located points // Mathematics Magazine. 1982. V. 55. P. 227–230.

С. А. Беляев, Русская математическая школа,
Фрамингем, Массачусетс (США)

`srgblv@ya.ru, sergey.belyaev@metrowestschool.com`