

---

---

# Наш семинар: математические сюжеты

---

---

## Точки на прямых, шнурки и доминошки

К. П. Кохась, А. И. Храбров

В 2014 г. на Санкт-Петербургской олимпиаде школьников по математике была предложена следующая задача Н. Филонова.

*На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.) Докажите, что число способов это сделать меньше  $3^{39}$ .*

Последовательность, возникающая в этой задаче, обладает богатыми комбинаторными реализациями, их разнообразие просто изумляет. Конечно, число их (пока ещё?) не столь велико, как у чисел Каталана, но и сама последовательность на добрую сотню лет моложе.

В этой статье мы приводим обзор известных (и неизвестных) реализаций этой последовательности.

### ТРЕУГОЛЬНИК $a_{k,n}$

Рассмотрим следующую комбинаторную конструкцию. Пусть даны две параллельные прямые, на одной отмечено  $k$  точек, на другой  $n$  точек. Отмеченные точки разбивают на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке. Полученную картинку



Таким образом, выполнено замечательное рекуррентное соотношение:

$$a_{k+1,n+1} = a_{k,n} + a_{k-1,n+1} + a_{k+1,n-1} - a_{k-1,n-1}. \quad (2)$$

Так, число 11, расположенное в нижней строке числового треугольника (1), равно сумме  $4 + 5 + 4 - 2$ . Если какие-то из индексов отрицательны, то мы считаем соответствующее число равным нулю, и поэтому соотношение (2) справедливо также и для чисел на краю треугольника.

Докажем ещё одно рекуррентное соотношение для нашей последовательности  $a_{k,n}$ :

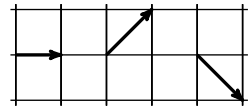
$$a_{k,n} = a_{k-2,n} + (a_{k-1,n-1} + a_{k-1,n-3} + a_{k-1,n-5} + \dots). \quad (3)$$

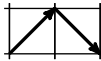
Слагаемое  $a_{k-2,n}$  равно числу конфигураций, содержащих ребро  $A_1A_2$ . Все остальные конфигурации содержат отрезок, выходящий из точки  $A_1$  на нижнюю прямую, — эти конфигурации учтены в сумме, написанной в скобках. Действительно, точка  $A_1$  может быть в паре лишь с точками  $B_3, B_5, \dots$  (иначе точки, лежащие ниже прямой  $A_1B_k$ , не удастся разбить на пары). Если точка  $A_1$  соединена с  $B_{2i+1}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , то эта конфигурация обязательно содержит отрезки  $B_1B_2, \dots, B_{2i-1}B_{2i}$ , поэтому число таких конфигураций равно  $a_{k-1,n-2i-1}$ .

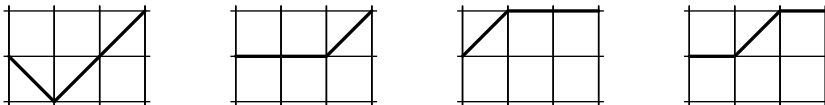
Пользуясь рекуррентным соотношением (3) и симметрией  $a_{k,n} = a_{n,k}$ , нетрудно проверить по индукции, что в каждой строке числа  $a_{k,n}$  возрастают при движении от краёв к центру.

## БЕСПИКОВЫЕ ПУТИ МОЦКИНА

*Путь Моцкина* — это (ориентированная) ломаная на координатной плоскости, у которой все звенья идут в направлениях, показанных на рисунке справа. Обычно считают, что начало пути находится в точке  $(0, 0)$ . *Беспиковым* путём Моцкина будем называть путь Моцкина, в котором нет ни одного «пика»,



т. е. фрагмента вида . Количество беспиковых путей Моцкина, идущих из точки  $(0, 0)$  в точку  $(k, n)$ , обозначим через  $m_{k,n}$ . Очевидно, мы можем считать в этом определении, что  $-k \leq n \leq k$ , так как в других точках с абсциссой  $k$  путь Моцкина оканчиваться не может. Ниже изображены всевозможные беспиковые пути Моцкина из точки  $(0, 0)$  в точку  $(3, 1)$ , значит,  $m_{3,1} = 4$ .



ТЕОРЕМА 1.  $m_{k,n} = a_{k-n,k+n}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каким образом беспиковый путь Моцкина может прийти в точку  $(k, n)$ ? Очевидно, либо из точки  $(k-1, n-1)$ , либо из  $(k-1, n)$ , либо из  $(k-1, n+1)$ . В последнем случае путь не должен иметь пика в точке  $(k-1, n+1)$ , т. е. он не должен приходить в точку  $(k-1, n+1)$  из точки  $(k-2, n)$ . Таким образом, получаем рекуррентное соотношение  $m_{k,n} = m_{k-1,n-1} + m_{k-1,n} + m_{k-1,n+1} - m_{k-2,n}$ . Оно в точности соответствует соотношению (2).  $\square$

### СУММА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть числа  $k$  и  $n$  одинаковой чётности. Возьмём конфигурацию из  $k$  точек на верхней прямой и  $n$  точек на нижней прямой и сотрём отрезки, концы которых лежат на разных прямых. Оставшийся набор горизонтальных отрезков однозначно определяет исходное разбиение точек на пары (рис. 2). Действительно, самая левая из оставшихся точек на верхней прямой должна быть соединена с самой левой из оставшихся точек на нижней прямой, вторая слева точка на верхней прямой должна быть соединена со второй слева точкой на нижней прямой и т. д., поскольку в противном случае отрезки будут пересекаться.

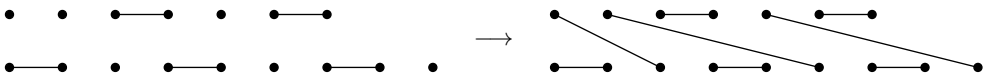
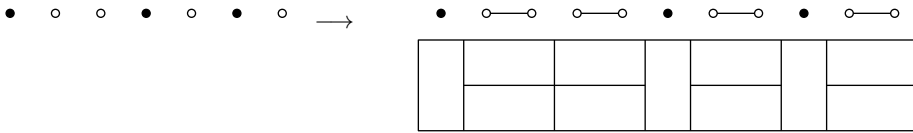


Рис. 2. Горизонтальные отрезки однозначно задают разбиение точек на пары

Решим вспомогательную задачу. Назовём  $(j, \ell)$ -конфигурацией на прямой набор из  $\ell$  непересекающихся отрезков и ещё  $j$  точек, не лежащих на этих отрезках. Будем считать, что концы отрезков — белые точки, а остальные точки — чёрные. Найдём, сколько существует различных  $(j, \ell)$ -конфигураций на прямой. Чтобы нарисовать конфигурацию, сначала нарисуем на прямой  $j + \ell$  точек, выберем  $\ell$  из них и покрасим их в белый цвет. Затем справа от каждой белой точки нарисуем ещё одну белую точку и соединим их отрезком (рис. 3). Ясно, что для разных способов выбора  $\ell$  белых точек будут получаться разные конфигурации. Таким образом, количество конфигураций равно количеству способов выбора белых точек, т. е.  $C_{j+\ell}^{\ell}$ .

Если обозначить через  $k$  общее количество чёрных и белых точек  $(j, \ell)$ -конфигурации, т. е.  $k = j + 2\ell$ , то это же самое число конфигураций можно записать в виде  $C_{\frac{k+j}{2}}^{\frac{k-j}{2}}$  или  $C_{\frac{k+j}{2}}^j$ . Возвращаясь к исходной задаче о точках, расположенных на двух прямых, мы получаем, что количество



$$11 = 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2$$

$$12 = 1 + (2 + 2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) = 1 + 5 + 3 + 3$$

Рис. 3. Раскраска точек в два цвета однозначно определяет горизонтальные отрезки, разбиения на домино и композиции

способов выбрать несколько горизонтальных отрезков на верхней прямой ( $k$  точек, из них  $j$  одиночных) равно  $C_{\frac{k+j}{2}}^j$ , а на нижней прямой ( $n$  точек, из них  $j$  одиночных) —  $C_{\frac{n+j}{2}}^j$ , при этом напомним, что числа  $k$  и  $n$  имеют одинаковую чётность, а для того чтобы неодионые точки распались на пары, нужно, чтобы число  $j$  имело ту же чётность. Таким образом, мы получаем явную формулу для  $a_{k,n}$ :

$$a_{k,n} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq \min\{k,n\} \\ j \equiv k \pmod{2}}} C_{\frac{k+j}{2}}^{\frac{k-j}{2}} C_{\frac{n+j}{2}}^{\frac{n-j}{2}} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq \min\{k,n\} \\ j \equiv k \pmod{2}}} C_{\frac{k+j}{2}}^j C_{\frac{n+j}{2}}^j.$$

При  $k = n$  формула заметно проще, поскольку в этом случае  $\frac{n-j}{2} = \frac{k-j}{2} = \ell$  и  $\frac{n+j}{2} = \frac{k+j}{2} = k - \ell$ , и значит,

$$a_{n,n} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (C_{n-\ell}^{\ell})^2.$$

### ДОМИНОШКИ

Обозначим через  $d_{k,n}$  число способов замостить доминошками два прямоугольника —  $2 \times k$  и  $2 \times n$  — так, чтобы замощения содержали одинаковое число вертикальных домино.

Например, в следующей таблице приведены разбиения прямоугольников  $2 \times 3$  и  $2 \times 5$ , содержащие 1 или 3 вертикальных домино. Рассматривая таблицу, мы приходим к выводу, что  $d_{3,5} = 6 + 4 = 10$ .

$j$	$2 \times 3$	$2 \times 5$	Число вариантов
1			$2 \cdot 3 = 6$
3			$1 \cdot 4 = 4$

ТЕОРЕМА 2.  $d_{k,n} = a_{k,n}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО есть в предыдущем разделе. Нужно вместо слов « $(j, \ell)$ -конфигурация» читать «замоещение прямоугольника  $2 \times (j + 2\ell)$ », вместо слов «горизонтальный отрезок» читать «пара горизонтальных домино», а вместо слов «чёрная точка» — «вертикальное домино» (см. рис. 3).  $\square$

### ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Обозначим через  $f_m$  сумму чисел в  $m$ -й строке нашего треугольника (1), т. е.

$$f_m = a_{2m,0} + a_{2m-1,1} + a_{2m-2,2} + \dots + a_{1,2m-1} + a_{0,2m}.$$

Просуммируем соотношения (2) по всем  $k$  и  $n$ , сумма которых равна  $2m + 2$ . В левой части получим сумму всех элементов  $(m + 1)$ -й строки. В правой части со знаком плюс получим утроенную сумму всех элементов  $m$ -й строки, а со знаком минус сумму всех элементов  $(m - 1)$ -й строки. Таким образом,  $f_{m+1} = 3f_m - f_{m-1}$ . Но такому же рекуррентному соотношению удовлетворяют числа Фибоначчи  $F_{2m}$ :

$$F_{2m+2} = F_{2m+1} + F_{2m} = 2F_{2m} + F_{2m-1} = 2F_{2m} + (F_{2m} - F_{2m-2}) = 3F_{2m} - F_{2m-2}.$$

Поскольку суммы чисел в первых двух строках равны  $F_2 = 1$  и  $F_4 = 3$ , получаем соотношение  $f_m = F_{2m}$ . Таким образом, сумма чисел в  $m$ -й строке равна  $2m$ -му числу Фибоначчи.

Из этого наблюдения следует, что для чисел  $a_{k,n}$  выполнена оценка  $a_{k,n} \leq F_{n+k}$ . Ей можно придать более конкретный вид благодаря тому, что для чисел Фибоначчи известна явная формула — формула Бине:

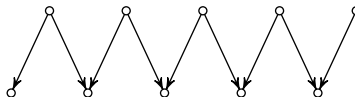
$$F_m = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{\sqrt{5}}.$$

Второе слагаемое в числителе мало по модулю. Если при чётном  $m$  его отбросить, это лишь слегка увеличит правую часть. Значит,

$$a_{k,n} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+k}. \quad (4)$$

### «ЗАБОРЫ»

Рассмотрим двудольный ориентированный граф  $Z_{2n}$  — «забор», доли которого содержат по  $n$  вершин.



Набор вершин  $A$  этого графа назовём *замкнутым*, если из него нельзя выйти по стрелочкам, т. е. выполнено свойство: если  $x \rightarrow y$  — ребро нашего графа и  $x \in A$ , то  $y \in A$ . Пусть  $z_{2n,k}$  — это количество всевозможных замкнутых наборов вершин графа  $Z_{2n}$ , состоящих из  $k$  вершин ( $0 \leq k \leq 2n$ ). Замкнутые наборы графа  $Z_4$  изображены на рис. 4.

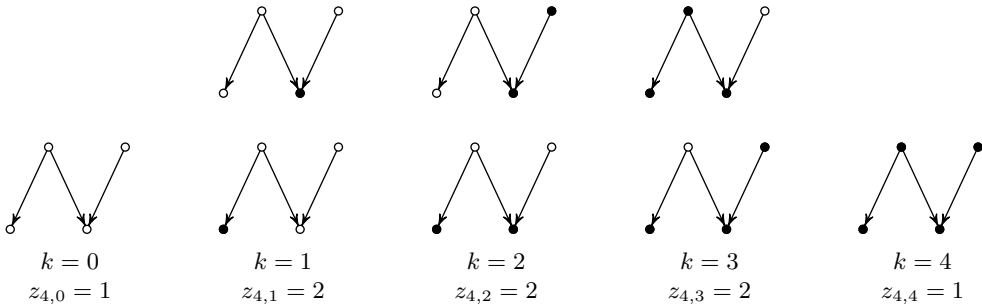
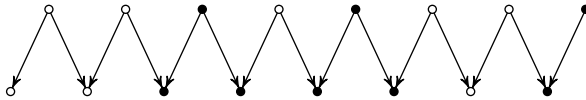


Рис. 4. Замкнутые наборы графа  $Z_4$

ТЕОРЕМА 3.  $z_{2n,k} = a_{2n-k,k}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. рис. 5. □



Пройдём вдоль забора, отмечая вершины, принадлежащие и не принадлежащие замкнутому множеству.



«Разнесём» вершины на две параллельные прямые. На верхней прямой первая (возможно, пустая) группа всегда чётная, остальные — нечётные. На нижней прямой наоборот.



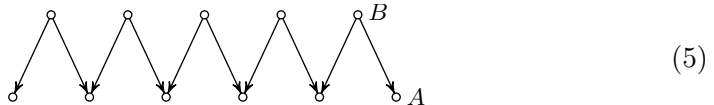
Последнюю вершину в каждой нечётной группе на нижней прямой соединим с первой вершиной следующей нечётной группы на верхней прямой. Остальные вершины в группах разобьём на пары.

Рис. 5. Биекция между замкнутыми множествами графа  $Z_{2n}$  и разбиениями точек на пары

## ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ С НЕЧЁТНЫМИ НОМЕРАМИ

Внимательного читателя уже, должно быть, некоторое время беспокоит вопрос: почему суммы строк треугольника (1) задаются числами Фибоначчи только с чётными номерами? Куда же делись числа Фибоначчи с нечётными номерами? А вот куда.

Рассмотрим нечётный забор  $Z_{2n+1}$ , у которого верхняя доля содержит  $n$  вершин, а нижняя —  $n + 1$ .



Определение замкнутого множества вершин для такого забора не требует никаких изменений. Пусть  $z_{2n+1,k}$  — это количество всевозможных замкнутых наборов вершин графа  $Z_{2n+1}$ , состоящих из  $k$  вершин ( $0 \leq k \leq 2n+1$ ). Отметим, что числа  $z_{2n+1,k}$ , вообще говоря, не обладают свойством симметрии, т. е., как правило,  $z_{2n+1,k} \neq z_{2n+1,2n+1-k}$ .

Нетрудно проверить, что выполнены рекуррентные соотношения

$$z_{2n,k} = z_{2n-1,k} + z_{2n-2,k-2}, \quad z_{2n+1,k} = z_{2n,k-1} + z_{2n-1,k}.$$

Например, проверим второе соотношение. Пусть  $A$  и  $B$  — две последние вершины забора  $Z_{2n+1}$  (как на диаграмме (5)). Рассмотрим произвольное замкнутое множество с  $k$  вершинами. Если вершина  $A$  принадлежит этому замкнутому множеству, то, удалив её, получим замкнутое множество забора  $Z_{2n}$  с  $k - 1$  вершинами. Если же вершина  $A$  не принадлежит этому замкнутому множеству, то вершина  $B$  тоже не принадлежит и, удаляя обе вершины, мы получим замкнутое множество забора  $Z_{2n-1}$ , содержащее  $k$  вершин. Нетрудно видеть, что обе операции удаления реализуют биекции между соответствующими семействами замкнутых множеств, откуда и следует доказываемая формула.

Объединив последовательности  $z_{n,k}$  для чётных и нечётных  $n$ , можно расположить их в виде треугольника, как это делают с биномиальными коэффициентами (рис. 6). Рекуррентные соотношения, написанные выше, проиллюстрированы равенствами  $10 = 7 + 3$  и  $5 = 4 + 1$  для чисел в рамочках.

Рассуждая, как в разделе «Числа Фибоначчи», мы сразу приходим к выводу, что суммы чисел в строках удовлетворяют рекуррентному соотношению (и начальным данным) для чисел Фибоначчи:  $f_{m+1} = f_m + f_{m-1}$ .

Похожая картина будет иметь место, если мы рассмотрим нечётные заборы, у которых верхняя доля содержит  $n + 1$  вершину, а нижняя —  $n$  вершин.



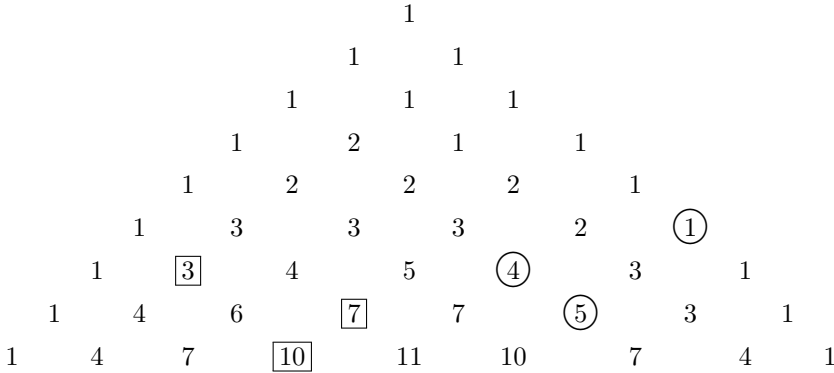


Рис. 6. Треугольник  $z_{n,k}$

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$F(x, y) = \sum_{k,n} a_{k,n} x^k y^n.$$

Рекуррентное соотношение (2) означает, что для функции  $F(x, y)$  выполнено тождество

$$(1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2 - xy)F(x, y) = 1.$$

Отсюда мы можем найти  $F$ :

$$F(x, y) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - y^2) - xy}. \tag{6}$$

КОМПОЗИЦИИ

Пусть фиксировано множество  $S$ , состоящее из натуральных чисел. *Композицией* числа  $n$  называется разложение числа  $n$  в сумму нескольких слагаемых, каждое из которых принадлежит  $S$ . Разложения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными. Например,  $(j, \ell)$ -конфигурацию на прямой или замощение полоски  $2 \times n$  доминошками можно интерпретировать как композицию числа  $n$  со слагаемыми из множества  $\{1, 2\}$  или как композицию числа  $n + 1$  с нечётными слагаемыми (см. рис. 3).

Это наблюдение позволяет переформулировать теорему 2, построив ещё пару реализаций последовательности  $a_{n,k}$  в терминах композиций.

**ТЕОРЕМА 2'.** Число  $a_{k,n}$  равно количеству пар композиций числа  $k$  и числа  $n$  со слагаемыми из множества  $\{1, 2\}$ , в которых количества единиц одинаковы.

ТЕОРЕМА 2''. Число  $a_{k,n}$  равно количеству пар композиций числа  $k + 1$  и числа  $n + 1$ , в которых поровну слагаемых и все слагаемые нечётны.

Приведём родственную конструкцию, связь которой с конфигурациями и доминошками не столь прозрачна.

**Наблюдение.** Количество композиций числа  $n$  со слагаемыми из множества  $\{1, 2\}$ , содержащих  $\ell$  двоек ( $\ell = 0, 1, \dots$ ), равно количеству композиций числа  $n + 2$  со слагаемыми из множества  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ , содержащих  $\ell + 1$  слагаемое. Например, для числа 5 существует 4 композиции первого вида, содержащих одну двойку; в то же время для числа 7 существует 4 композиции второго вида, состоящих из двух слагаемых:

$$5 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1,$$

$$7 = 2 + 5 = 5 + 2 = 3 + 4 = 4 + 3.$$

Наблюдение обосновывается тем, что количество и тех, и других композиций задаётся формулой  $C_{n-\ell}^\ell$ . Докажите!

С помощью этого наблюдения мы можем подменить вид композиций в теореме 2'.

ТЕОРЕМА 2'''. Пусть для определённости  $n \geq k$  и числа  $n$  и  $k$  одинаковой чётности, положим  $s = \frac{1}{2}(n - k)$ . Число  $a_{k,n}$  равно количеству пар композиций числа  $k + 2$  и числа  $n + 2$  со слагаемыми из множества  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ , в которых композиции числа  $n + 2$  содержат на  $s$  слагаемых больше, чем композиции числа  $k + 2$ .

## ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ КОМПОЗИЦИЙ

Пусть фиксировано множество  $S$ , состоящее из натуральных чисел. Обозначим количество композиций числа  $n$  через  $t_n$ , а производящую функцию этой последовательности — через  $T(x)$ . Оказывается, для производящей функции последовательности  $t_n$  есть очень простая формула:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n x^n = \frac{1}{1 - \sum_{m \in S} x^m}. \quad (7)$$

Действительно, воспользуемся формулой суммы прогрессии

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

Взяв  $q = \sum_{m \in S} x^m$ , получаем

$$\frac{1}{1 - \sum_{m \in S} x^m} = 1 + \left( \sum_{m \in S} x^m \right) + \left( \sum_{m \in S} x^m \right)^2 + \left( \sum_{m \in S} x^m \right)^3 + \dots$$



Раскрывая скобки, читатель с лёгкостью обнаружит биекцию между композициями числа  $n$  и различными способами появления слагаемого  $x^n$  в этой сумме, что и доказывает формулу (7).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y}.$$

Напишем для неё аналогичное разложение:

$$\frac{1}{1 - x - y} = 1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3 + \dots$$

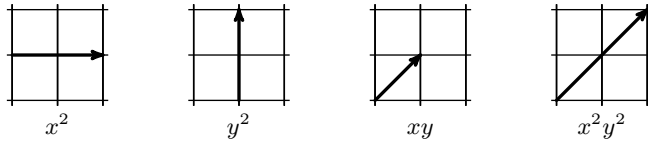
Раскрывая здесь скобки, мы будем получать одночлены вида  $x^k y^m$ . Если не пользоваться формулами бинома, а раскрывать скобки непосредственно, не приводя подобные члены и не переставляя сомножители в одночленах, каждый такой одночлен будет записан в виде «слова», состоящего из букв  $x$  и  $y$ . Например  $x^3 y^2$  может получиться из произведений  $xxxyy$ ,  $xyyxx$  и т. д. Каждое такое произведение можно интерпретировать как «векторную композицию», для этого нарисуем на клетчатой плоскости ломаную, где букве  $x$  соответствует звено , а букве  $y$  — звено . Тогда всевозможным одночленам  $x^k y^m$  будут соответствовать ломаные на клетчатой плоскости, идущие из точки  $(0, 0)$  в точку  $(k, m)$  (каждое звено такой ломаной направлено вправо или вверх). Иначе говоря, мы представили вектор  $(k, m)$  в виде всевозможных сумм, где каждое слагаемое — это вектор  $(1, 0)$  или  $(0, 1)$ . Это и есть векторные композиции. Очевидно, число таких композиций равно  $C_{k+m}^k$ . Поэтому рассмотренная функция  $f(x, y)$  — это производящая функция для биномиальных коэффициентов:

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y} = \sum_{k, m=0}^{+\infty} C_{m+k}^k x^k y^m.$$

ПРИМЕР 2. Посмотрим на производящую функцию (6):

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2 + xy - x^2 y^2)} = \sum_k (x^2 + y^2 + xy - x^2 y^2)^k.$$

Не будем пока обращать внимание на знак минус перед  $x^2 y^2$ . Тогда мы можем истолковать раскрытие скобок в правой части как построение векторной композиции. Возьмём в правой части произвольный одночлен  $x^k y^m$ . Он получается при раскрытии скобок как произведение множителей, каждый из которых — это  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $xy$  или  $x^2 y^2$ . Каждому из этих множителей сопоставим звено ломаной, как показано на рисунке ниже. С помощью этого сопоставления одночлен будет изображаться некоторой ломаной.



В результате число  $a_{k,n}$  будет равно «количеству» ломаных с указанными звеньями, ведущих из начала координат в точку  $(k, n)$ . Слово *количество* заключено в кавычки, поскольку из-за минуса, на который мы до сих пор не обращали внимания, ломаные, содержащие, скажем,  $m$  звеньев вида  $x^2y^2$ , должны засчитываться со знаком  $(-1)^m$ .

Чтобы избавиться от этих минусов, сгруппируем некоторые ломаные парами. Каждой ломаной  $A$ , содержащей хотя бы одно звено  $x^2y^2$ , поставим в соответствие ломаную  $B$ , отличающуюся лишь тем, что вместо первого звена  $x^2y^2$  она имеет пару звеньев — сначала  $x^2$ , потом  $y^2$ . Если в ломаной первым встречается звено  $x^2y^2$ , она относится к типу  $A$ , а если пара звеньев  $x^2, y^2$  — то к типу  $B$ . Очевидно, разным ломаным  $A$  будут соответствовать разные ломаные  $B$ , и каждая ломаная  $B$ , в которой есть последовательные звенья  $x^2, y^2$ , поставлена в соответствие некоторой ломаной  $A$ . При этом знаки, с которыми засчитываются эти ломаные, противоположны, и значит, каждая такая пара даёт нулевой вклад в суммарное «количество».

Таким образом,  $a_{k,n}$  равно числу «непарных» ломаных с указанными звеньями, ведущими из начала координат в точку  $(k, n)$ . Очевидно, непарными ломаными являются лишь те, в которых вообще нет звеньев вида  $x^2y^2$  и у которых не встречаются подряд звенья  $x^2, y^2$ . Эти ломаные находятся в очевидном взаимно однозначном соответствии с беспиковыми путями Моцкина.

### 0-1-2 СУММЫ

Будем называть 0-1-2 суммой сумму, в которой порядок слагаемых фиксирован, каждое слагаемое равно 0, 1 или 2, и при этом следующее после каждой двойки слагаемое не должно быть нулём.

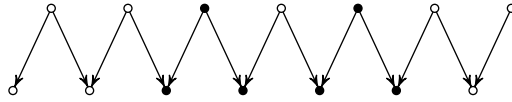
Пусть  $s_{n,k}$  — это число 0-1-2 сумм, состоящих из таких  $n$  слагаемых, что значение суммы при этом равно  $k$  ( $0 \leq k \leq 2n$ ). Например,  $s_{3,3} = 5$ , поскольку получить сумму 3 с помощью трёх слагаемых 0, 1, 2 и запрета «после двойки не ноль» можно лишь следующими способами:

$$3 = 1 + 1 + 1 = 0 + 1 + 2 = 0 + 2 + 1 = 1 + 0 + 2 = 2 + 1 + 0.$$

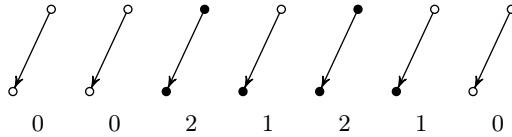
ТЕОРЕМА 4.  $s_{n,k} = z_{n,k}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. рис. 7. □

Предъявим ещё одну биекцию для 0-1-2 сумм.










Отметим вершины, принадлежащие и не принадлежащие замкнутому множеству.



Оставим только рёбра, параллельные первому ребру, под каждым ребром напомним, сколько у него чёрных вершин.

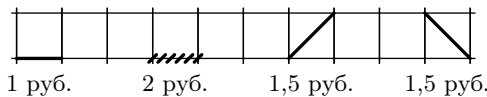
Рис. 7. Биекция между замкнутыми множествами графа  $Z_{2n}$  и 0-1-2 суммами

ТЕОРЕМА 5.  $m_{n,k-n} = s_{n,k}$ .

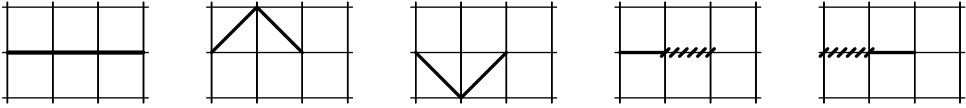
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что перемещение по звену  изменяет сумму координат на 2, перемещение по звену  изменяет сумму координат на 1, а перемещение по звену  не изменяет сумму координат. Рассмотрим беспиковую ломаную Моцкина, ведущую из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, k - n)$ . В ней  $n$  звеньев, а изменение суммы координат при движении вдоль этой ломаной равно  $k$ . Заменим звено  на 2, звено  на 1, а звено  на 0. Поскольку фрагмент  запрещён, после 2 не может идти 0. Таким образом, мы получим 0-1-2 сумму, состоящую из  $n$  слагаемых, значение которой равно  $k$ . Ясно, что из 0-1-2 суммы беспиковая ломаная однозначно восстанавливается, поэтому мы построили биекцию между беспиковыми ломаными, ведущими из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, k - n)$ , и 0-1-2 суммами, состоящими из  $n$  слагаемых, значения которых равны  $k$ . Стало быть,  $m_{n,k-n} = s_{n,k}$ .  $\square$

### ПУТИ С ВЕСОМ

Будем рисовать пути Моцкина, при этом назначим «цену» за прорисовку каждого звена. Наклонные восходящее и нисходящее звенья будут стоить 1,5 рубля, а горизонтальные рёбра будем рисовать двумя способами — «дешёвым» за 1 рубль и «дорогим» за 2 рубля.

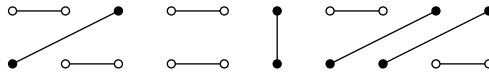


Через  $r_k$  обозначим количество ломаных стоимостью  $k$  рублей, у которых начальная и конечная точка лежат на одной горизонтали. Например,  $r_3 = 5$ , как показывает следующая картинка.

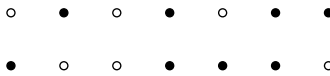


ТЕОРЕМА 6.  $r_k = a_{k,k}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим разбиению на пары конфигурацию из горизонтальных отрезков. Каждую свободную точку изобразим на рисунке чёрной точкой, а каждый горизонтальный отрезок — белой точкой, и расположим эти точки на прямых равномерно. После этого каждой вертикальной паре точек сопоставим звено ломаной (рис. 8): паре  $\bullet \circ$  сопоставим дешёвое горизонтальное звено, каждой паре  $\circ \circ$  сопоставим дорогое горизонтальное звено, каждой паре  $\bullet \circ$  сопоставим звено  $\nearrow$ , а каждой паре  $\circ \bullet$  — звено  $\searrow$ .  $\square$



Заменяем горизонтальные отрезки белыми точками



Каждой вертикальной паре точек сопоставим звено

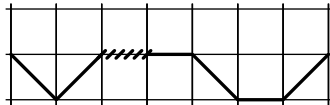


Рис. 8. Биекция между разбиением точек на пары и ломаными с весом

### СИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ХОРД

Зафиксируем число  $n$  и какое-нибудь натуральное число  $\ell > 2$ . Разобьём окружность на  $\ell$  равных секторов и рассмотрим вершины правильного  $\ell n$ -угольника. В каждом секторе будет расположено по  $n$  вершин. Некоторые вершины соединим между собой хордами. Нас будут интересовать симметричные конфигурации хорд, удовлетворяющие следующим свойствам:

- 1) конфигурация обладает симметрией  $\ell$ -го порядка, т. е. переходит в себя при повороте на угол  $2\pi/\ell$ ;

- 2) хорды не имеют общих точек;
- 3) хорда не должна соединять соседние точки, лежащие в одном секторе.

Из этих условий, в частности, следует, что если хорда соединяет точки, лежащие в разных секторах, то эти сектора — соседние. Поэтому конфигурация определяется картинкой, которую мы видим в одном секторе, и количество конфигураций не зависит от  $\ell$ . Пример конфигурации для  $n = 10$ ,  $\ell = 3$  изображён на рис. 9.

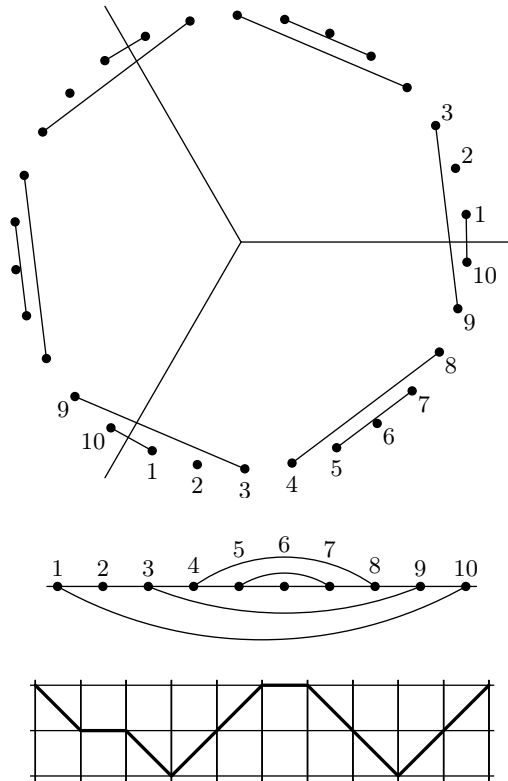


Рис. 9. Конфигурация хорд с симметрией третьего порядка, её дуговая диаграмма и соответствующий беспиковый путь Моцкина

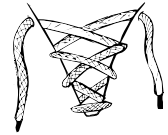
**ТЕОРЕМА 7.** *Количество симметричных хордовых конфигураций равно  $a_{n,n}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмём дугу окружности в одном из секторов и «выпрямим» её. Получится отрезок, на котором отмечено  $n$  точек. Хорды, соединявшие точки в этом секторе, изобразим в виде дуг, расположенных выше этого отрезка. Хорду, соединяющую точки соседних секторов,

скажем  $p$ -ю точку рассматриваемого сектора и  $q$ -ю точку предыдущего, изобразим в виде дуги, соединяющей на нашем отрезке  $p$ -ю точку с  $q$ -й и расположенной ниже отрезка (рис. 9). Теперь мы с лёгкостью можем закодировать эту дуговую диаграмму с помощью  $n$ -звенного беспикового пути Моцкина. Для этого просмотрим последовательно все точки: если из данной точки выходит дуга вверх или же в эту точку приходит дуга снизу — рисуем восходящее звено, если точка изолированная — рисуем горизонтальное звено, если же выходит дуга вниз или же в эту точку приходит дуга сверху — рисуем нисходящее звено.  $\square$

### ШНУРОВКИ

Подсчитаем количество способов зашнуровать ботинок, у которого с каждой стороны по  $n$  дырочек для продевания шнурков. Примем следующие ограничения:



- 1) шнуровка должна начинаться и заканчиваться в верхней паре дырочек;
- 2) шнурок проходит ровно один раз через каждую дырочку;
- 3) из каждой дырочки есть переход на противоположную сторону (для верхних дырочек это требование выполняется автоматически, когда мы завяжем узел);
- 4) не будем учитывать, как переплетаются шнурки между дырочками и с какой стороны (сверху или снизу) они вдеваются в дырочки.

Шнуровки, удовлетворяющие этим ограничениям, будем называть *правильными* (рис. 10).



Рис. 10. Две правильных (слева) и две неправильных (справа) шнуровки

Для подсчёта правильных шнуровок рассмотрим сначала несамопересекающиеся шнуровки, начинающиеся в левой верхней, а заканчивающиеся в правой нижней дырочке. Каждая из этих шнуровок полностью определяется набором своих вертикальных фрагментов, соединяющих пары соседних дырочек на одной стороне ботинка. Действительно, если такой



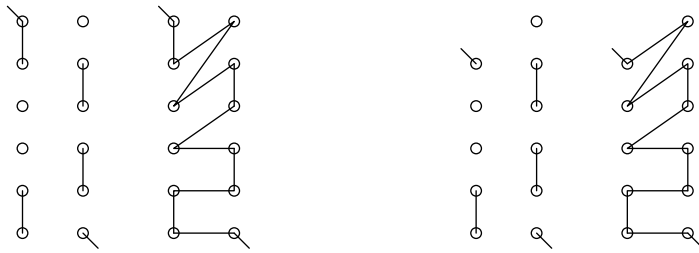


Рис. 11. Конфигурация точек и отрезков полностью определяет несамопересекающуюся шнуровку, в том числе на бракованном ботинке

набор задан, то оставшиеся соединения устроены так: верхние «свободные» дырочки соединены между собой (рис. 11, слева), следующие сверху «свободные» дырочки также соединены между собой и т. д. Но количество способов выбрать такие вертикальные отрезки мы уже считали, оно равно  $a_{n,n}$ . Таким образом, число несамопересекающихся шнуровок тоже равно  $a_{n,n}$ .

Из каждой несамопересекающейся шнуровки можно получить  $(n!)^2$  новых шнуровок, произвольно переставляя дырочки на каждой стороне; в таких шнуровках начало и конец шнурка могут быть в произвольных местах на разных сторонах ботинка. И наоборот, из произвольной шнуровки, переставляя дырочки на сторонах, можно единственным способом получить несамопересекающуюся: это будет та шнуровка, для которой, двигаясь по шнурку на противоположную сторону, мы всегда попадаем в самую верхнюю из свободных дырочек.

Таким образом, количество шнуровок без ограничения на начальную и конечную дырочки равно  $(n!)^2 a_{n,n}$ . Правильные шнуровки получаются, если дополнительно потребовать, чтобы начало и конец шнуровки приходились на верхние дырочки, поэтому число правильных шнуровок равно  $((n-1)!)^2 a_{n,n}$ .

### БРАКОВАННЫЙ БОТИНОК

Рассмотрим теперь шнуровки «бракованного» ботинка, у которого с одной стороны  $k$  дырочек, а с другой —  $n$  дырочек. Будем считать, что шнуровка по-прежнему удовлетворяет условиям 1–4. Как и в предыдущем разделе, инвертируем порядок дырочек на одной стороне так, чтобы шнуровка начиналась в левой верхней и заканчивалась в правой нижней дырочке.

Для начала рассмотрим несамопересекающиеся правильные шнуровки. Каждая такая шнуровка определяет конфигурацию из точек и отрезков на сторонах ботинка (рис. 11, справа). Каждый элемент конфигурации — точку или отрезок — будем называть *объектом*. От каждого объекта можно перейти на противоположную сторону ботинка двумя способами — двига-

				1					
				0	0				
			0	1	0				
		0	0	1	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	0			
		0	0	0	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	0		
	0	0	0	2	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	0	0		
	0	0	1	5	1	0	0		
	0	0	0	5	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	0	0	0	
0	0	0	3	11	3	0	0	0	
$b_{0,8}$	$b_{1,7}$	$b_{2,6}$	$b_{3,5}$	$b_{4,4}$	$b_{5,3}$	$b_{6,2}$	$b_{7,1}$	$b_{8,0}$	

Рис. 12. Треугольник  $b_{k,n}$  и его рекуррентное соотношение.

ясь по шнурку «вперёд» или «назад». Поэтому у любой конфигурации, которая получена из шнуровки, количество объектов на сторонах ботинка должно быть одинаковым. И наоборот: любая конфигурация с равным числом объектов однозначно задаёт несамопересекающуюся шнуровку.

В связи с этим введём в рассмотрение ещё одну комбинаторную последовательность. Пусть даны две прямые, на одной из которых отмечено  $k$  точек, а на другой —  $n$  точек. Некоторые соседние точки, лежащие на одной прямой, могут быть соединены отрезками, при этом отрезки не должны пересекаться. Обозначим через  $b_{k,n}$  число всевозможных конфигураций такого вида, у которых количество объектов на прямых одинаково. Зададим также «вырожденные» значения чисел  $b_{k,n}$  для целых  $k$  и  $n$ : положим  $b_{0,0} = 1$  и  $b_{k,n} = 0$ , если  $(k, n) \neq (0, 0)$ , но среди чисел  $k, n$  есть неположительные.

Начальные значения последовательности  $b_{k,n}$  перечислены в треугольнике на рис. 12. Верхняя единица — это  $b_{0,0}$ , нумерация элементов нижней строки подписана для удобства. Как и с последовательностью  $a_{k,n}$ , откидывая в конфигурации по одному крайнему объекту с каждой стороны, получаем рекуррентное соотношение

$$b_{k,n} = b_{k-1,n-1} + b_{k-1,n-2} + b_{k-2,n-1} + b_{k-2,n-2}.$$

Это соотношение верно для всех  $n$  и  $k$ , кроме  $(k, n) = (0, 0)$ . Пользуясь этим соотношением, находим производящую функцию

$$B(x, y) = \sum_{k,n} b_{k,n} x^k y^n = \frac{1}{1 - (xy + x^2y + xy^2 + x^2y^2)} - 1. \quad (8)$$

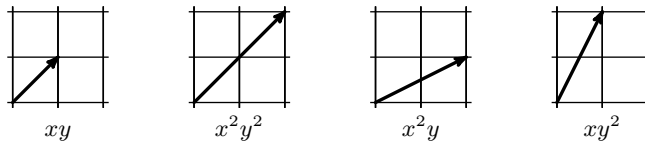
Прямо по определению последовательности  $b_{k,n}$  получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8.  $a_{n,n} = b_{n,n}$ .

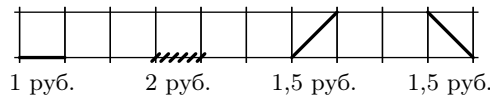
Рассуждая, как в разделе, посвящённом обычным шнуровкам, находим, что последовательность  $b_{k,n}$  позволяет перечислить шнуровки любого ботинка: количество правильных шнуровок равно  $(k-1)!(n-1)!b_{k,n}$ , а количество «произвольных» шнуровок —  $k!n!b_{k,n}$ . Заодно получаем, что функция (8) есть экспоненциальная производящая функция числа произвольных шнуровок.

Опишем ещё несколько комбинаторных реализаций последовательности  $b_{k,n}$ .

Поскольку производящая функция (8) последовательности  $b_{k,n}$  похожа на производящую функцию последовательности  $a_{k,n}$ , мы можем продублировать рассуждения из примера 2. Получится, что  $b_{k,n}$  равно количеству ломаных со звеньями четырёх видов, указанных на следующем рисунке, ведущих из начала координат в точку  $(k, n)$ .



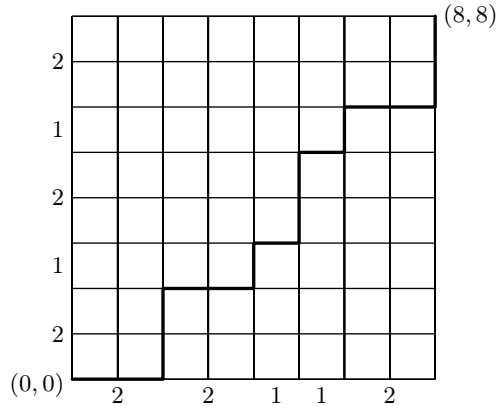
Теперь, мысленно повернув голову на  $45^\circ$  (и приняв диагональ квадрата за единицу), читатель с лёгкостью убедится, что  $b_{k,n}$  равно числу «платных» путей Моцкина, встречавшихся нам ранее, ведущих из начала координат в точку  $\left(\frac{k+n}{2}, \frac{k-n}{2}\right)$ , причём цены из «прейскуранта» — это в точности длины проекций звеньев на прямую  $y = x$ .



В частности, мы ещё раз убедились в том, что  $b_{k,k} = r_k$ .

Напоследок отметим, что прямо по определению  $b_{k,n}$  равно числу пар «композиция числа  $k$  — композиция числа  $n$ » с одинаковым числом слагаемых, где все слагаемые — это единицы или двойки. Такие композиции можно изображать в виде «лестниц», идущих из точки  $(0, 0)$  в точку  $(k, n)$ . Лестница — это ломаная, в которой чередуются вертикальные и горизонтальные звенья, первое звено горизонтально, последнее — вертикально, и длины всех звеньев равны 1 или 2. Например пара композиций

$8 = 2 + 2 + 1 + 1 + 2 = 2 + 1 + 2 + 1 + 2$ , уже встречавшаяся нам на рис. 5, задаёт следующую лестницу.



### ДИАГОНАЛЬ

В этом и следующем разделах мы используем технику теории функций комплексной переменной. Читатель, ещё не изучивший курс ТФКП, может посмотреть подробности, например, в [3].

Мы уже знаем формулу для производящей функции нашей последовательности  $a_{n,k}$ :

$$F(x, y) = \sum_{k,n} a_{k,n} x^k y^n = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2 + xy - x^2 y^2)}.$$

В силу оценки (4), этот ряд сходится при  $|x| < \varphi^{-1}$ ,  $|y| < \varphi^{-1}$ , где  $\varphi$  — золотое сечение.

Найдём теперь производящую функцию «диагонали»:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,k} x^k.$$

Это делается следующим стандартным трюком. Зафиксируем достаточно малое по модулю значение  $x$ , можно считать его вещественным, и рассмотрим функцию

$$H(s) = F\left(\sqrt{s}, \frac{x}{\sqrt{s}}\right) = \frac{-s}{s^2 - s(x^2 - x + 1) + x^2}.$$

Она представляет собой ряд Лорана

$$\sum_{k,n} a_{k,n} s^k \left(\frac{x}{s}\right)^n$$

по степеням  $s$  (и по неотрицательным степеням  $x$ ). Этот ряд заведомо сходится в кольце  $|x|^2\varphi^2 < |s| < \varphi^{-2}$ , а сама функция  $H(s)$  рациональная и задана во всей комплексной плоскости. Как нетрудно видеть,  $g(x)$  — это коэффициент при нулевой степени  $s$  в этом ряде. Этот коэффициент вычисляется с помощью интегральной теоремы Коши:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=\rho} \frac{H(s) ds}{s} = \sum \operatorname{Res} \frac{H(s)}{s},$$

где интегрирование ведётся по любой окружности, лежащей в кольце сходимости, а вычеты берутся по особым точкам, попавшим внутрь окружности.

В нашем случае у функции  $H(s)$  дискриминант знаменателя равен

$$(x^2 - x + 1)^2 - 4x^2 = 1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4.$$

Это выражение близко к 1 при малых  $x$ , поэтому из двух особых точек функции  $H(s)$  одна расположена вблизи 1, а другая — вблизи нуля, это точка

$$s_0 = \frac{1 - x + x^2 - \sqrt{1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4}}{2}.$$

Вычет в этой точке (стандартное несложное вычисление) равен

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4}}.$$

### РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ

ДЛЯ ДИАГОНАЛИ  $r_n = a_{n,n}$

Воспользуемся найденной производящей функцией диагонали. Заметим, что

$$g'(x) = \frac{1 + x + 3x^2 - 2x^3}{(1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4)^{3/2}}.$$

Поэтому

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 + x + 3x^2 - 2x^3}{1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4}.$$

Следовательно,

$$(1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4)g'(x) = (1 + x + 3x^2 - 2x^3)g(x).$$

Поскольку

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k r_k x^{k-1},$$

приравняв коэффициенты при  $x^{n-1}$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} nr_n - 2(n-1)r_{n-1} - (n-2)r_{n-2} - 2(n-3)r_{n-3} + (n-4)r_{n-4} = \\ = r_{n-1} + r_{n-2} + 3r_{n-3} - 2r_{n-4}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$nr_n - (2n-1)r_{n-1} - (n-1)r_{n-2} - (2n-3)r_{n-3} + (n-2)r_{n-4} = 0.$$

### АСИМПТОТИКА ДИАГОНАЛИ

С помощью метода Дарбу (см. [1, § 4.3]) установим асимптотическую формулу для  $r_n$ .

Суть метода Дарбу состоит в следующем. Функция  $g(z) = \sum r_n z^n$  задаётся рядом, который автоматически является её рядом Тейлора в точке  $z = 0$ . Радиус сходимости этого ряда равен расстоянию от 0 до ближайшей к нулю особой точки, обозначим её  $z_1$ . Если подобрать «достаточно простую» функцию  $h(z) = \sum h_n z^n$ , у которой в точке  $z_1$  «такая же» особенность, то разность  $g(z) - h(z) = \sum (r_n - h_n) z^n$  может вообще не иметь особенности в точке  $z_1$ . Тогда радиус сходимости ряда  $\sum (r_n - h_n) z^n$  будет больше, чем у ряда  $\sum r_n z^n$ . Это возможно, лишь если коэффициенты второго ряда сильно меньше коэффициентов первого, т. е.  $r_n - h_n = o(r_n)$  при  $n \rightarrow +\infty$ . И тогда  $r_n \sim h_n$ .

В случае нашей функции  $g(z)$  эта схема осложняется тем, что ближайшая к нулю особая точка есть точка ветвления, и её не удаётся полностью «сократить». Поэтому потребуются чуть более аккуратные рассуждения.

Разложим на множители подкоренное выражение в формуле для  $g(z)$ :

$$1 - 2z - z^2 - 2z^3 + z^4 = (1 - \varphi^2 z)(1 - \varphi^{-2} z)(1 + z + z^2),$$

где  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  — золотое сечение. Пусть

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^{-2} z} \sqrt{1 + z + z^2}}.$$

Функция  $g(z)$  эквивалентна  $\frac{f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1 - \varphi^2 z}}$  при  $z \rightarrow \varphi^{-2}$ , и разность этих функций вблизи точки  $z = \varphi^{-2}$  ограничена:

$$g(z) - \frac{f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1 - \varphi^2 z}} = \frac{f(z) - f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1 - \varphi^2 z}} = \sqrt{1 - \varphi^2 z} h(z), \quad (9)$$

где функция  $h(z)$  имеет особые точки  $\varphi^2$  и  $e^{\pm 2\pi i/3}$ .

ЛЕММА. Пусть

$$(1-t)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{p,n} t^n$$

— разложение функции  $(1-t)^p$  по формуле Тейлора в точке  $t=0$ . Тогда

$$\lambda_{-1/2,n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \quad \text{и} \quad \lambda_{1/2,n} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Для доказательства воспользуйтесь биномом Ньютона и формулой Стирлинга.

ТЕОРЕМА 9.  $r_n = \frac{\varphi^{2n+2}}{2\sqrt[4]{5}\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\right)$ , где  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  — золотое сечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (9) число  $r_n$  равно сумме коэффициентов при  $z^n$  в разложении функций  $\frac{f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1-\varphi^2 z}}$  и  $\sqrt{1-\varphi^2 z} h(z)$ .

Рассмотрим коэффициент при  $z^n$  в разложении функции  $\sqrt{1-\varphi^2 z} h(z)$ . Функция  $h(z)$  имеет особые точки  $\varphi^2$  и  $e^{\pm 2\pi i/3}$ . Поэтому она раскладывается в ряд Тейлора  $h(z) = \sum \alpha_n z^n$ , сходящийся в любом круге радиуса  $\rho < 1$  с центром в нуле. Отсюда следует, что  $|\alpha_n| < c/\rho^n$  (иначе при  $z = (\rho+1)/2$  члены ряда стремились бы к бесконечности и он не мог бы быть сходящимся). Таким образом, коэффициент при  $z^n$  в разложении функции  $\sqrt{1-\varphi^2 z} h(z)$  равен

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \varphi^{2k} \lambda_{1/2,k} \alpha_{n-k} &= \alpha_n + \sum_{k=1}^{[n/2]} \dots + \sum_{k=[n/2]+1}^n \dots = \\ &= O\left(\frac{1}{\rho^n}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^{n/2}}\right) \sum_{k=1}^{[n/2]} \varphi^{2k} \lambda_{1/2,k} + O\left(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\right) \sum_{k=[n/2]+1}^n \alpha_{n-k} = \\ &= O\left(\frac{1}{\rho^n}\right) + O\left(\frac{\varphi^n}{\rho^{n/2}}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\right) O\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = O\left(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

В этих равенствах значки «О большое» с полужелтыми степенями получились в результате применения леммы, в третьем равенстве сумма  $\alpha_{n-k}$  оценена сверху суммой сходящейся геометрической прогрессии.

Для доказательства утверждения теоремы осталось лишь заметить, что коэффициент при  $z^n$  в разложении функции  $\frac{f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1-\varphi^2 z}}$  существенно крупнее, он равен

$$f(\varphi^{-2}) \varphi^{2n} \lambda_{-1/2,n} = \frac{f(\varphi^{-2}) \varphi^{2n}}{\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\right) = \frac{\varphi^{2n+2}}{2\sqrt[4]{5}\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\right). \quad \square$$

Если выписать дальше разложение  $g(z)$  по полуцелым степеням  $1 - \varphi^2 z$ , а затем рассуждать аналогично с использованием формулы (2.2) из статьи [7] (это уточнение нашей леммы), то можно получить асимптотическое разложение с точностью до  $O(\varphi^{2n}/n^{m+1/2})$  для любого фиксированного натурального  $m$ . Весьма громоздкий второй коэффициент этого разложения найден иным способом в работе [8, формула (24)].

## ССЫЛКИ

Последовательности, о которых шла речь, конечно же, упоминаются в Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей Слоана [10]: числовой треугольник  $a_{k,n}$  (точнее говоря,  $z_{n,k}$ ) — это последовательность A079487, треугольник  $b_{k,n}$  — A125250, диагональ  $a_{n,n}$  — A051286, шнуровки — A078698. Там же приведены краткие сведения, включающие упоминание об основных комбинаторных реализациях. Последовательность  $a_{k,n}$  подробно изучена в [9] на языке порядковых идеалов частично упорядоченного множества, мы назвали эту реализацию «заборы», применяется также термин «числа Уитни второго рода». Реализация с помощью симметричных конфигураций хорд дана в [8]. Пути с весом и композиции встречаются в [5]. Композиции и доминошки мы нашли также в [4], а шнуровки — в [6]. Упрощённая версия этой статьи опубликована в [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Грин Д., Кнут Д. Математические методы анализа алгоритмов. М.: Мир, 1987.
- [2] Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 2014. М.: МЦНМО, 2014.
- [3] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985.
- [4] Banderier C., Hitczenko P. Enumeration and asymptotics of restricted compositions having the same number of parts // arxiv:1201.6116v1.
- [5] Bóna M., Knopfmacher A. On the probability that certain compositions have the same number of parts // Ann. Comb. 2010. V. 14. P. 291–306.
- [6] Duisenberg K. Ken's puzzle of the week. <http://ken.duisenberg.com/potw/archive/arch07/070904sol.html>.
- [7] Flajolet P., Odlyzko A. M. Singularity analysis of generating functions // SIAM J. Discr. Math. 1990. V. 3. P. 216–240.
- [8] Hofacker I. L., Reidys C. M., Stadler P. F. Symmetric circular matchings and RNA folding // Discr. Math. 2012. V. 312. P. 100–112.



- [9] *Munarini E., Zagaglia Salvi N.* On the rank polynomial of the lattice of order ideals of fences and crowns // *Discr. Math.* 2002. V. 259. P. 163–177.
- [10] The on-line Encyclopedia of integer sequences, A051286, A078698, A079487, A125250. <https://oeis.org/>.

---

К. П. Кохась, Санкт-Петербургский государственный университет  
kpk@arbital.ru

А. И. Храбров, Санкт-Петербургский государственный университет  
aikhrabrov@mail.ru