Метод Рунге для уравнений 4-й степени: элементарный подход

Н. Н. Осипов

В статье предлагается элементарный способ решения диофантовых уравнений 4-й степени с двумя неизвестными, удовлетворяющих условиям применимости метода Рунге.

Введение

Начальным стимулом для написания этой статьи послужила одна из задач Санкт-Петербургской математической олимпиады 2005 года. Вот её формулировка (см. задачу 05.59 в книге [5]).

Задача (А. Храбров). Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^3 - x = 2(y^3 - y). \tag{$*$}$$

Без условия взаимной простоты x и y уравнение $(*)$ вряд ли можно решить школьными методами, а самый простой способ воспользоваться этим условием — это заметить, например, что разность $x^2 - 1$ должна делиться на y. Если теперь записать $x^2 - 1 = ky$ и затем исключить x из системы

$$x^2 - 1 = ky, \quad 2(y^2 - 1) = kx,$$

то получим уравнение

$$4y^4 - k^3y - 8y^2 - k^2 + 4 = 0. \tag{$**$}$$

Нетрудно понять, как от уравнения $(**)$ вернуться к уравнению $(*)$. Действительно, имеем

$$(2(y^2 - 1))^2 = 4y^4 - 8y^2 + 4 = k^3y + k^2 = k^2(ky + 1),$$

откуда следует, что $2(y^2 - 1)$ делится на k. Положив $2(y^2 - 1) = kx$ и избавившись от k, мы получим уравнение $(*)$.

Получается, что решение нашей задачи эквивалентно решению уравнения (∗∗) в натуральных числах. Но сама задача, очевидно, решаема каким-то элементарным методом, иначе её не стали бы предлагать на школьной олимпиаде. Следовательно, есть такой метод и для уравнения (∗∗). Но какой?

Автору захотелось разобраться в этой ситуации. После того как уравнение (∗∗) было решено элементарными средствами, захотелось «посмотреть по сторонам» — понять, для какого класса *диофантовых уравнений*

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

4-й степени пригоден найденный подход. Как выяснилось, в этот класс входят все уравнения 4-й степени, к которым применим *метод Рунге* (по версии из книги [10, с. 262]). Изложению обнаруженной *элементарной версии* метода Рунге для уравнений 4-й степени и посвящена данная статья.

Фактически мы продолжим тему, начатую в статье [4], где элементарным способом изучались кубические диофантовы уравнения (1) в условиях применимости метода Рунге. Приводимый там пример семейства уравнений

$$2y^3 - x^2y - x - c = 0$$

показывает, что элементарный подход иногда может конкурировать с неэлементарным по качеству получаемых с их помощью результатов.

Чтобы читатель имел возможность сравнить разные подходы, мы расскажем про оригинальную идею метода Рунге в её наиболее простой форме. Поскольку в любых версиях этого метода ключевую роль играют оценки, необходимо рассказать о *методе Ньютона* разложения в ряд по степеням переменной x неявной функции $y = \Psi(x)$, определяемой уравнением (1). Разумеется, все эти вопросы интересны сами по себе, но в рамках данной статьи мы ограничимся их кратким освещением и ссылками на литературу.

§ 1. О методе Рунге

В работе [11] Рунге получил первую общую теорему о конечности множества целых точек на алгебраических кривых из достаточно широкого класса. Более того, его метод позволяет эффективно найти границы, в пределах которых эти целые точки обязаны находиться. В дальнейшем метод Рунге неоднократно подвергался различным обобщениям и модификациям (см., например, статью [9] и библиографию в ней).

Немецкий математик Карл Рунге (1856–1927) более известен своими работами в области вычислительной математики. Прежде всего следует упомянуть хрестоматийный *метод Рунге — Кутты* численного интегрирования дифференциальных уравнений, а также *теорему Рунге* о приближении аналитических функций многочленами. Помимо чистой и прикладной математики, К. Рунге занимался также спектроскопией, геодезией и астрофизикой (один из кратеров на Луне назван его именем).

Метод Рунге можно отнести к алгебро-аналитическим методам, поскольку он требует разложения всех вещественных ветвей *алгебраической функции* $y = \Psi(x)$ в ряд по степеням x в окрестности бесконечно удалённой точки.

В качестве примера рассмотрим кубическое уравнение

$$y^3 - 2x^2y - x + 1 = 0.$$

Здесь при больших x имеем три вещественных ветви $y = \Psi_i(x)$, и для каждой из них можно получить явное аналитическое выражение с помощью *формулы Кардано*. Например:

$$\Psi_1(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, x \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{9\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{x-1}{x^3}\right)\right).$$

Можно предположить, что любые действия с таким громоздким выражением будут сопряжены со значительными вычислительными трудностями, поэтому для разложения в ряд разумно применить какой-то другой метод.

В данном конкретном случае нас выручит *система компьютерной алгебры* типа Maple, и мы сможем получить искомый ряд «в лоб», комбинируя известные разложения для элементарных функций. Однако в общем случае рассчитывать на наличие принципиально простых, пусть и громоздких, аналитических выражений не приходится.

Кроме умения разлагать в ряды, для успешного применения метода Рунге в общем случае требуется знание основ теории *алгебраических чисел*. Это связано с тем, что, как правило, коэффициенты получаемых рядов будут алгебраическими иррациональностями и одними рациональными числами обойтись не удастся. Так, в нашем примере все коэффициенты ряда

$$\Psi_1(x) = \sqrt{2}\, x + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2} - \frac{3\sqrt{2}}{64x^3} + \frac{3\sqrt{2}}{32x^4} + \ldots$$

принадлежат полю $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ — квадратичному расширению поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Идея Рунге состоит в том, чтобы, манипулируя подобными разложениями, для больших x сконструировать дополнительное к (1) уравнение и решать уже систему из двух уравнений. Однако эту идею удаётся реализовать не всегда, а лишь при выполнении некоторого условия, которое в простейшем варианте формулируется так: старшая однородная часть многочлена $f(x, y)$ разложима над $\mathbb{Q}$, но её разложение не содержит кратных неприводимых сомножителей.

В нашем примере с кубическим уравнением это условие выполнено:

$$y^3 - 2x^2y = y(y^2 - 2x^2).$$

Чтобы составить дополнительное уравнение для целых точек ветви $y = \Psi_1(x)$, подберём многочлены $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ с целыми коэффициентами так, чтобы функция

$$\Phi(x) = P_0(x) + P_1(x)\Psi_1(x) + P_2(x)\Psi_1^2(x)$$

удовлетворяла условию

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0.$$

Тогда дополнительным уравнением при больших x будет

$$P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 = 0.$$

Многочлены $P_j(x)$ будем искать методом неопределённых коэффициентов, считая

$$\deg P_j(x) \leqslant h - j,$$

где h следует подобрать так, чтобы однородная линейная система уравнений на неизвестные коэффициенты $P_j(x)$ была нетривиально разрешима. Число неизвестных равно $3h$, а число уравнений равно $h+1$. Поскольку все коэффициенты в разложении $\Psi_1(x)$ принадлежат $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, все уравнения системы можно представить в виде

$$A + B\sqrt{2} = 0,$$

где A и B суть некоторые линейные комбинации неизвестных с рациональными коэффициентами. Каждое такое уравнение следует заменить системой

$$A = B = 0$$

из двух уравнений. В итоге возникает система из $2(h+1)$ линейных уравнений с рациональными коэффициентами относительно $3h$ неизвестных. При $3h > 2(h+1)$ она будет иметь ненулевое решение и искомые многочлены $P_j(x)$ могут быть найдены. Взяв $h = 3$, находим

$$P_0(x) = 4x^3 + 4x^2, \quad P_1(x) = 1, \quad P_2(x) = -2x - 2.$$

Для таких $P_j(x)$ справедлива оценка

$$\Phi(x) = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big), \quad x \to \infty.$$

Следовательно, дополнительным уравнением будет

$$4x^3 + 4x^2 + y - (2x + 2)y^2 = 0.$$

По понятным причинам оно оказалось нелинейным. Отметим, что предложенная в статье [4] элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений гарантирует линейные дополнительные уравнения (см. также § 6, где она воспроизведена в более простом виде).

Более подробно о рассказанной версии метода Рунге читатель может прочитать в книге [7, с. 11–13].

§ 2. Что будет сделано

В принципе метод Рунге можно применять к уравнениям (1) любой степени, поэтому возникает соблазн поискать элементарный подход и в некоторых других частных случаях. Далее мы предложим элементарную версию метода Рунге для уравнений 4-й степени. Предварительно мы продемонстрируем идейную сторону дела на конкретных примерах (§§ 4 и 5) и только потом дадим описание общего алгоритма (§ 6).

О каких именно уравнениях (1) будет идти речь? Предположим, что многочлен

$$f(x, y) = f_4(x, y) + f_{\leqslant 3}(x, y)$$

с целыми коэффициентами является неприводимым над $\mathbb{Q}$, а его старшая однородная часть $f_4(x, y)$ — наоборот, разложима, причём в произведение *взаимно простых* многочленов (по-другому говоря, $f_4(x, y)$ не пропорциональна степени неприводимого многочлена). Это условие мы будем называть *условием Рунге.*

Мы элементарно покажем, что уравнение (1), удовлетворяющее условию Рунге, может иметь лишь конечное множество решений в целых числах, и на примерах объясним, как можно находить все эти решения.

Чтобы упростить изложение, в примерах будем считать неизвестные принимающими только положительные значения. Решение уравнения (1) происходит в два этапа: сначала доказывается, что нет решений (x, y) с большими x (или, как вариант, составляется дополнительное уравнение, которому должны удовлетворять решения с большими x), а затем находятся решения с маленькими x. При любом фиксированном целом x можно, используя какой-нибудь стандартный алгоритм, найти все целые корни уравнения (1) относительно y. Решения с маленькими x мы можем найти полным перебором, для чего лучше привлечь компьютер. При выборе границы, отделяющей маленькие x от больших, мы будем опираться на заранее подготовленные оценки роста функции $y = \Psi(x)$.

Каким образом эти оценки можно получать, будет рассказано в следующем параграфе.

§ 3. О методе Ньютона

Как уже было сказано, уравнение (1) неявно определяет (вообще говоря, многозначную, но в наших примерах, как правило, однозначную) функцию

$$y = \Psi(x),$$

и для обработки больших x нам необходимо уметь оценивать рост этой функции при $x \to \infty$. Покажем на одном примере, как это можно делать.

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$x^2(x^2+6y^2)+2x^3+6xy^2-2y^3+x^2=0. \tag{2}$$

Будем считать $x \geqslant 1$ параметром и запишем левую часть в виде

$$F(y) = -2y^3+(6x^2+6x)y^2+x^4+2x^3+x^2.$$

Исследуем функцию $F(y)$ с помощью производной. Имеем

$$F'(y) = -6y^2+12(x^2+x)y = 6y(2x^2+2x-y),$$

поэтому точки $y=0$ и $y=2x^2+2x$ являются точками минимума и максимума соответственно. Поскольку

$$F(0) = x^2(x+1)^2 > 0,$$

функция $F(y)$ имеет единственный нуль $y = \Psi(x)$, причём

$$\Psi(x) > 2x^2+2x.$$

Но это — грубая оценка, а более точная оценка может быть такой:

$$3x^2+3x < \Psi(x) < 3x^2+3x+1. \tag{3}$$

Действительно, для доказательства достаточно заметить, что

$$F(3x^2+3x) = x^2(x+1)^2 > 0,$$
$$F(3x^2+3x+1) = -17x^4-34x^3-29x^2-12x-2 < 0.$$

Как видно, оценка (3) уже сама по себе позволяет утверждать, что уравнение (2) неразрешимо в натуральных числах. $\square$

Обосновать оценку (3) легко, но как её получить? В общем случае можно воспользоваться *методом Ньютона* (см., например, [8]).

Предположим, что

$$\Psi(x) \sim \alpha x^{\varepsilon} \quad (x \to \infty), \tag{4}$$

где параметры $\alpha \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ подлежат определению. Имеем

$$F(\Psi(x)) = F(\alpha x^{\varepsilon} + o(x^{\varepsilon})) = -2\alpha^3 x^{3\varepsilon} + 6\alpha^2 x^{2\varepsilon+2} + x^4 + o(x^{\mu}),$$

где $\mu = \max\{3\varepsilon, 2\varepsilon + 2, 4\}$. Если среди чисел 3ε, $2\varepsilon + 2$, 4 лишь одно равно μ, то при больших x имеет место условие

$$-2\alpha^3 x^{3\varepsilon} + 6\alpha^2 x^{2\varepsilon+2} + x^4 + o(x^{\mu}) \neq 0.$$

Поэтому хотя бы два из указанных чисел должны быть равны μ.

Вариант $\mu = 3\varepsilon = 2\varepsilon + 2 \geqslant 4$ приводит к $\varepsilon = 2$. В этом случае также должно выполняться равенство $-2\alpha^3 + 6\alpha^2 = 0$ (иначе опять получим противоречие при больших x), откуда $\alpha = 3$.

Вариант $\mu = 3\varepsilon = 4 \geqslant 2\varepsilon + 2$ невозможен.

Наконец, последний вариант $\mu = 2\varepsilon + 2 = 4 \geqslant 3\varepsilon$ даёт $\varepsilon = 1$, однако в этом случае ещё одно необходимое равенство $6\alpha^2 + 1 = 0$ не выполняется ни при каком вещественном α.

Итак, приходим к единственно возможной оценке

$$\Psi(x) \sim 3x^2 \quad (x \to \infty).$$

Эту оценку можно уточнить, записав

$$\Psi(x) - 3x^2 \sim \alpha_1 x^{\varepsilon_1} \quad (x \to \infty)$$

и проделав аналогичные вычисления. В результате получим

$$\Psi(x) - 3x^2 \sim 3x \quad (x \to \infty).$$

Несколько иным выражением этого факта и является оценка (3).

Методом Ньютона можно сколь угодно точно оценить при $x \to \infty$ все ветви неявно заданной уравнением (1) функции $y = \Psi(x)$, разложив их в так называемый *ряд Пюизо* (ряд по дробным степеням переменной x). Для единственной вещественной ветви функции из примера 1 мы получим частный случай этого ряда — *ряд Лорана*:

$$\Psi(x) = 3x^2 + 3x + \frac{1}{18} - \frac{1}{486x^2} + \frac{1}{486x^3} + \ldots$$

Во всех следующих примерах нам будет достаточно оценок типа (4), которые мы будем, как правило, конкретизировать, превращая их в оценки типа (3). Доказательство этих оценок мы предоставим читателю в качестве полезного упражнения. Отметим, что метод Ньютона имеет геометрическую интерпретацию, связанную с понятием *многоугольника Ньютона* (популярное изложение можно найти, например, в статье [2]).

§ 4. Уравнения вида $(a_1x + b_1y)(a_2x^3 + b_2x^2y + c_2xy^2 + d_2y^3) + \ldots = 0$

Здесь мы рассмотрим примеры уравнений, старшая однородная часть которых разлагается так, как указано в заголовке параграфа. Именно к этому типу уравнений относится уравнение $(**)$.

Пример 2. Покажем, что уравнению

$$x(2x^3 - y^3) + x^2y - y^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

удовлетворяет только одна пара натуральных чисел $(x, y) = (1, 1)$.

При $x \geqslant 2$ уравнение (5) определяет функцию $y = \Psi(x)$, для которой справедлива оценка

$$2^{1/3}x < \Psi(x) < 2^{1/3}x + 1. \tag{6}$$

Из уравнения (5) следует, что $y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{x}$. Положив $y^2 + 1 = lx$, где l — некоторое целое число, получим $x(2x^3 - y^3) + x^2y - lx = 0$. Сократив на x и снова перейдя к сравнению по модулю x, будем иметь $l \equiv -y^3 \pmod{x}$. Но $-y^3 = -y \cdot y^2 \equiv y \pmod{y^2 + 1}$, поэтому $-y^3 \equiv y \pmod{x}$ и в итоге $l \equiv y \pmod{x}$. Значит, $l = y + mx$ для некоторого целого m. Это m можно выразить через x следующим образом:

$$m = \frac{l - y}{x} = \frac{y^2 - xy + 1}{x^2} = \frac{\Psi(x)^2 - x\Psi(x) + 1}{x^2}.$$

Теперь воспользуемся оценкой (6), из которой, в частности, следует, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 2^{1/3}.$$

Как следствие, получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Psi(x)^2 - x\Psi(x) + 1}{x^2} = 2^{2/3} - 2^{1/3} \approx 0{,}32.$$

Но это значит, что при достаточно больших x мы будем иметь противоречие с целочисленностью m. Формально можно рассуждать следующим образом: пусть, например, $x > 100$, тогда из оценки (6) следуют неравенства $0 < m < 1$, так что m не может быть целым числом. Поэтому уравнение (5) может иметь решения только при $x \leqslant 100$, и завершить доказательство можно компьютерным перебором этих значений x. $\square$

Хотя это и не принципиально, при желании завершающий перебор можно сократить, но ценой решения некоторой дополнительной задачи.

Пример 3. Докажем, что уравнение

$$x(x^3 - 5y^3) + 2x^2 + y^2 + 1 = 0. \tag{7}$$

имеет единственное решение $(x, y) = (1, 1)$ в натуральных числах.

Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, получим, что число

$$m = \frac{y^2 + 5xy + 1}{x^2} = \frac{\Psi(x)^2 + 5x\Psi(x) + 1}{x^2}$$

должно быть целым. Здесь $y = \Psi(x)$ — функция, задаваемая уравнением (7) при $x \geqslant 1$. Для этой функции справедлива оценка

$$5^{-1/3}x < \Psi(x) < 5^{-1/3}x + 1, \tag{8}$$

с помощью которой следует оценить число m в зависимости от x. В качестве ориентира можно взять

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)^2 + 5x\Psi(x) + 1}{x^2} = 5^{-2/3} + 5^{2/3} \approx 3{,}26.$$

Применение оценки (8) будет тем эффективней, чем больше нижняя граница рассматриваемых значений x. Если считать $x > 100$, то мы получим настолько тесные границы для m, что возникнет противоречие с целочисленностью m. Если же считать, например, $x > 10$, то границы окажутся более размытыми и допускающими значение $m = 4$. Однако дальнейшие рассуждения ясны: теперь мы можем добавить к уравнению (7) ещё одно уравнение, и нам останется решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - 5xy^3 + 2x^2 + y^2 + 1 = 0, \\ y^2 + 5xy + 1 - 4x^2 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

что является стандартной алгебраической задачей. Так, исключив неизвестное y с помощью результанта, получим уравнение

$$674x^4 - 3412x^2 - 361 = 0,$$

которое не имеет решений в целых числах.

Поясним для тех, кто не знаком с понятием *результанта многочленов* (см., например, учебник [1, п. 6.2.5]), как можно получить последнее уравнение. Рассмотрим левые части уравнений системы (9) как многочлены от y и поделим один на другой с остатком:

$$x^4 - 5xy^3 + 2x^2 + y^2 + 1 = (y^2 + 5xy + 1 - 4x^2)(25x^2 - 5xy + 1) + x^2(101x^2 - 145xy - 19).$$

Из этого тождества и системы (9) следует ещё одно уравнение

$$101x^2 - 145xy - 19 = 0.$$

Выразив отсюда y через x и затем подставив во второе уравнение системы (9), после упрощения получим указанное уравнение.

Впрочем, решение системы (9) также сопряжено с довольно громоздкими вычислениями, поэтому такая концовка доказательства — дело вкуса. $\square$

Благодаря случайному стечению обстоятельств уравнение (7) можно решить совершенно «левым» способом.

Заметим, что число $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ делится на y^2, а значит, $x^2 + 1$ кратно y. Кроме того, $y^2 + 1$ делится на x. Поскольку x и y взаимно просты, $x^2 + y^2 + 1$ делится на xy, т. е. для некоторого натурального k имеем

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy.$$

Но хорошо известно (см., например, [6, с. 8, упр. 36в]), что последнее равенство возможно только при $k = 3$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} x^4 - 5xy^3 + 2x^2 + y^2 + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 3xy + 1 = 0. \end{cases}$$

После исключения y получим уравнение

$$x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0,$$

откуда $x = 1$. Тогда $y = 1$, и задача решена.

В следующем примере первый шаг — переход к сравнению — необходимо модифицировать подходящим образом.

Пример 4. Докажем, что уравнение

$$x(2x^3 - y^3) - y^3 + y^2 = 0 \tag{10}$$

неразрешимо в натуральных числах.

Здесь следует перейти к сравнению по модулю $x + 1$, чтобы избавиться от неудобного слагаемого y^3 в левой части. Это даст равенство

$$y^2 + 2 = l(x + 1)$$

с некоторым целым l. Теперь имеем

$$2x^4 - (x + 1)y^3 + l(x + 1) - 2 = 0.$$

После сокращения на $x + 1$ это равенство примет вид

$$2(x^3 - x^2 + x - 1) - y^3 + l = 0.$$

Снова переходя к сравнению по модулю $x + 1$, получим

$$l + 2y - 8 \equiv 0 \pmod{x + 1},$$

откуда $l + 2y - 8 = m(x+1)$ для некоторого целого m. Тогда

$$m = \frac{y^2 + 2(x+1)y - 8x - 6}{(x+1)^2} = \frac{\Psi(x)^2 + 2(x+1)\Psi(x) - 8x - 6}{(x+1)^2},$$

где $y = \Psi(x)$ — функция, задаваемая уравнением (10) при $x \geqslant 1$. Теперь нужно перейти к оценке m, опираясь на предварительно полученную оценку

$$2^{1/3}x - 1 < \Psi(x) < 2^{1/3}x.$$

Как это делать, мы уже показали в предыдущих примерах. □

Альтернативный вариант решения уравнения (10) состоит в его предварительном упрощении следующим образом. Пусть $d = \gcd(x, y)$ и $x_1 = x/d$, $y_1 = y/d$. Имеем

$$2d^2x_1^4 - d^2x_1y_1^3 - dy_1^3 + y_1^2 = 0,$$

откуда следует, что $2d^2$ делится на y_1^2. Но тогда d делится на y_1, т. е. $d = ky_1$ для некоторого натурального k. После подстановки и сокращения на y_1^2 получим

$$2k^2x_1^4 - k^2x_1y_1^3 - ky_1^2 + 1 = 0.$$

Ясно, что $k = 1$, и мы приходим к уравнению, более простому по сравнению с исходным:

$$x_1(2x_1^3 - y_1^3) - y_1^2 + 1 = 0.$$

Читателю предлагается завершить решение.

Отметим, что кубический сомножитель старшей однородной части совсем не обязан быть неприводимым над $\mathbb{Q}$, как это было в примерах 2–4.

Пример 5. Покажем, что уравнение

$$xy^3 - x^3 - y^3 + y^2 = 0 \tag{11}$$

имеет единственное решение $(x, y) = (1, 1)$ в натуральных числах.

Здесь для соответствующей функции $y = \Psi(x)$ при $x \geqslant 2$ справедлива вот такая оценка:

$$x^{2/3} < \Psi(x) < x^{2/3} + 1. \tag{12}$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, получим в итоге, что число

$$m = \frac{y^2 + (x-1)y - 3x + 2}{(x-1)^2} = \frac{\Psi(x)^2 + (x-1)\Psi(x) - 3x + 2}{(x-1)^2}$$

должно быть целым. Однако $0 < m < 1$ при $x > 100$, как это следует из оценки (12). Перебор значений $2 \leqslant x \leqslant 100$ показывает, что решений нет. □

Уравнение (11) можно свести к уравнению

$$x_1^5y_1 - x_1^3 - y_1^3 + 1 = 0, \tag{13}$$

при этом $x = x_1^2 y_1$, $y = x_1^3$. В самом деле, пусть $d = \gcd(x, y)$ и $a = x/d$, $b = y/d$. Тогда

$$d^2 ab^3 - da^3 - db^3 + b^2 = 0,$$

откуда b^2 делится на d, а также da^3 делится на b^2. Поскольку $\gcd(a, b) = 1$, последнее означает, что d делится на b^2. Таким образом, $d = b^2$, и после сокращения на b^2 получим

$$ab^5 - a^3 - b^3 + 1 = 0.$$

С точностью до обозначений неизвестных это и есть уравнение (13).

А дальше можно рассуждать различными способами.

I. Пусть $x_1 \geqslant 2$. Здесь получаем оценку

$$x_1^{5/2} - 1 < y_1 < x_1^{5/2}. \tag{14}$$

Если удастся показать, что из равенства (13) вытекает двойное неравенство

$$0 < x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7 < 1,$$

то будет получено противоречие с тем, что $x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7$ — целое число. Сделаем это.

Поделим $x_1^5 y_1 - x_1^3 - y_1^3 + 1$ на $x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7$ с остатком как многочлены от y_1:

$$x_1^5 y_1 - x_1^3 - y_1^3 + 1 = (x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7)\frac{1 - x_1^2 y_1}{x_1^4} + \frac{x_1^4 - y_1}{x_1^4}.$$

В силу равенства (13) отсюда следует равенство

$$x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7 = \frac{x_1^4 - y_1}{x_1^2 y_1 - 1}.$$

Теперь достаточно убедиться в том, что

$$0 < \frac{x_1^4 - y_1}{x_1^2 y_1 - 1} < 1.$$

Но это легко следует из оценки (14). Действительно, левое неравенство справедливо, так как $y_1 < x_1^{5/2} < x_1^4$, а правое вытекает из неравенства $y_1 > x_1^2$, которое, в свою очередь, является следствием неравенства $y_1 > x_1^{5/2} - 1$ при ограничении $x_1 \geqslant 2$.

Чтобы объяснить читателю, откуда взялось загадочное выражение

$$\Phi(x_1, y_1) = x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7,$$

нужно обратиться к оригинальной версии метода Рунге, использующей разложения в ряды. Имеем

$$y_1 = x_1^{5/2} - \frac{1}{2x_1^2} + \frac{1}{2x_1^5} + \ldots$$

(разложение в ряд Пюизо), откуда, возводя в квадрат, получим

$$y_1^2 = x_1^5 - x_1^{1/2} + \frac{1}{x_1^{5/2}} + \ldots$$

Скомбинируем эти разложения так, чтобы справа не осталось «иррациональных» слагаемых с положительными показателями. Видно, что комбинация

$$x_1^2 y_1^2 + y_1 = x_1^7 + \frac{1}{x_1^{1/2}} + \ldots$$

обладает этим свойством. Отправив x_1^7 в левую часть, окончательно получим

$$\Phi(x_1, y_1) = \frac{1}{x_1^{1/2}} + \ldots$$

Теперь ясно, почему при больших x_1 значения выражения $\Phi(x_1, y_1)$ должны оказаться в интервале $(0; 1)$.

II. Это рассуждение не такое экзотическое, как предыдущее, но тоже неожиданное. Перепишем равенство (13) в виде

$$x_1^3(x_1^2 y_1 - 1) = y_1^3 - 1.$$

Отсюда видно, что $y_1^3 - 1$ делится на $ky_1 - 1$, где $k = x_1^2$. Оказывается, мы можем определить, для каких пар (y_1, k) натуральных чисел эта делимость имеет место. Не вдаваясь в детали (см., например, [3]), приведём лишь ответ: $k = 1$ или $y_1 = k^2$. Дальнейшее очевидно.

После всего сказанного уже как-то неинтересно возвращаться к уравнению (**), с которого всё началось. Пусть читатель решит его самостоятельно, ориентируясь на очень похожий пример 3. Впрочем, некоторая интрига здесь есть — все выкладки желательно провести вручную, ведь на реальной математической олимпиаде компьютером пользоваться нельзя. По мнению автора, чисто спортивная составляющая не так важна, как простой и естественный общий подход, но читатель может придерживаться иной точки зрения.

§ 5. Уравнения вида $(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2)(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + \ldots = 0$

Идею решения уравнений этого типа можно описать следующим образом: нужно «расфасовать» кубическую часть уравнения и привести его к виду

$$XY = Z, \tag{15}$$

где X, Y и Z — многочлены от x и y не выше 2-й степени. Затем следует воспользоваться ограниченностью одного из отношений Z/Y или Z/X при больших x. В итоге появится дополнительное уравнение вида

$$Z = mY \tag{16}$$

(или $Z = mX$), где целочисленный параметр m может принимать лишь конечное множество значений, которое можно указать явно, опираясь на заранее полученную оценку для функции $y = \Psi(x)$, задаваемой исходным уравнением. Таким образом, задача сводится к решению при больших x системы уравнений (15), (16) для каждого из указанных значений m и перебору оставшихся маленьких x.

Пример 6. Покажем, как можно было бы решить уравнение

$$(y^2-2x^2)(y^2+2x^2)-2y^3+2xy^2-4x^2y-1=0 \tag{17}$$

в натуральных числах.

Пусть мы догадались переписать уравнение в виде

$$(y^2-2x^2+x-2y)(y^2+2x^2+x)=x^2-2xy+1,$$

т. е. обеспечили вид (15) при

$$X=y^2-2x^2+x-2y, \quad Y=y^2+2x^2+x, \quad Z=x^2-2xy+1.$$

Теперь заметим, что в нашем случае

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Psi(x)}{x}=2^{1/2}.$$

Это влечёт ограниченность отношения Z/Y, ибо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Z}{Y}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x\Psi(x)+1}{\Psi(x)^2+2x^2+x}=\frac{1-2^{3/2}}{4}\approx-0{,}46.$$

Отсюда при достаточно больших x (например, при $x>100$) следует неравенство $|Z|<|Y|$. Значит, $Z=0$, т. е.

$$x^2-2xy+1=0$$

— ещё одно уравнение, которому должны удовлетворять целочисленные решения уравнения (17) с большими x. $\square$

Конечно, нет никакой нужды в угадывании подходящего перераспределения кубической части уравнения, можно просто воспользоваться методом неопределённых коэффициентов.

Пример 7. Рассмотрим уравнение

$$xy(y^2-2x^2)+y^3-xy^2-x+1=0, \tag{18}$$

которое по-прежнему будем решать в натуральных числах.

Попробуем подобрать коэффициенты A, B, C, D так, чтобы после раскрытия скобок в выражении

$$(xy+Ax+By)(y^2-2x^2+Cx+Dy)$$

его кубическая часть совпала с y^3-xy^2. Получим систему уравнений

$$-2A=0, \quad C-2B=0, \quad A+D=-1, \quad B=1,$$

откуда найдём $A=0$, $B=1$, $C=2$, $D=-1$. Тогда вид (15) для уравнения (18) достигается при

$$X = xy + y, \quad Y = y^2 - 2x^2 + 2x - y, \quad Z = -y^2 + 2xy + x - 1.$$

Как и в предыдущем примере, здесь

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 2^{1/2},$$

но ограниченным теперь будет отношение Z/X, так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Z}{X} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\Psi(x)^2 + 2x\Psi(x) + x - 1}{x\Psi(x) + \Psi(x)} = \frac{2^{3/2} - 2}{2^{1/2}} \approx 0.59.$$

В частности, при $x > 100$ можно получить двойное неравенство

$$0 < Z < X,$$

которое будет противоречить равенству (15). На этом исследование больших значений x завершено. □

I. К уравнению (18) применим также метод из предыдущего параграфа. Переходя к сравнению по модулю $x+1$, получим

$$y^2 + 2y + 2 - l(x+1) = 0 \tag{19}$$

для некоторого целого l. Из (18) и (19) следует ещё одно равенство:

$$(2x - 2x^2 + lx + l + 2)y + 5 - 2l - 3lx = 0$$

(чтобы его получить, нужно левую часть (18) разделить с остатком на левую часть (19) и затем остаток сократить на $x+1$). Снова перейдём к сравнению по модулю $x+1$, что даст

$$l - 2y + 5 = m(x+1)$$

для некоторого целого m. Имеем

$$m = \frac{\Psi(x)^2 - 2x\Psi(x) + 5x + 7}{(x+1)^2} \to 2 - 2^{3/2} \approx -0{,}82$$

при $x \to +\infty$. Таким образом, при больших x число m не может быть целым.

II. Ещё раз рассмотрим уравнение (2), которое подпадает под метод этого параграфа. Это уравнение удобно представить в несколько ином, чем (15), виде

$$U^2 = V^2 + W, \tag{20}$$

где в данном случае имеем

$$U = 3x^2 + 9y^2 + 3x, \quad V = 9y^2 + y, \quad W = -y^2.$$

Видно, что V и W зависят только от y. Это случайное обстоятельство позволяет быстрее понять, почему равенство (20) невозможно. Действительно, число

$$V^2 + W = (9y^2 + y)^2 - y^2$$

оказывается «зажатым» между двумя последовательными квадратами в силу неравенств

$$(9y^2+y-1)^2 < (9y^2+y)^2 - y^2 < (9y^2+y)^2$$

при любом натуральном y.

В заключение рассмотрим пример, в котором функция $y = \Psi(x)$ оказывается многозначной и нужно обрабатывать каждую ветвь отдельно.

Пример 8. Дано уравнение

$$x^2(y^2-2x^2) - y^3 - x = 0, \tag{21}$$

и нас интересуют его решения в натуральных числах.

При $x \geqslant 5$ это уравнение определяет две функции $y = \Psi_i(x)$, при этом

$$x^2 - 3 < \Psi_1(x) < x^2 - 2, \quad 2^{1/2}x + 1 < \Psi_2(x) < 2^{1/2}x + 2.$$

Первая из этих оценок показывает, что пара $(x, \Psi_1(x))$ не может состоять из целых чисел, а вот относительно пары $(x, \Psi_2(x))$ это предстоит выяснить.

Уравнение (21) можно переписать в виде (15), где

$$X = x^2 - y, \quad Y = y^2 - 2x^2 - 2y, \quad Z = 2y^2 + x.$$

Если $y = \Psi_2(x)$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Z}{X} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\Psi_2(x)^2 + x}{x^2 - \Psi_2(x)} = 4.$$

Отсюда при $x > 100$ следует, что $Z = 4X$, т. е.

$$2y^2 + x = 4(x^2 - y).$$

Это ещё одно уравнение, которое следует добавить к уравнению (21) и решить получившуюся систему. □

Тем же способом, которым уравнение (11) было сведено к уравнению (13), уравнение (21) сводится к уравнению

$$x_1^5(y_1^2 - 2x_1^4) - y_1^3 - 1 = 0,$$

где $x = x_1^3$ и $y = x_1 y_1$. Для наиболее проблемной ветви многозначной функции, определяемой этим уравнением, при $x_1 \geqslant 2$ имеем

$$2^{1/2}x_1^2 < y_1 < 2^{1/2}x_1^2 + 1.$$

Читатель, освоивший разложение в ряды, без труда составит волшебное выражение (см. первый способ решения уравнения (13)), значения которого заключены в интервале $(0; 1)$. К примеру, можно взять

$$x_1 y_1^2 - 2y_1 - 2x_1^5 = \frac{y_1(y_1^3+1)}{x_1^9} + \frac{1}{x_1^4}$$

и получить желаемый результат, начиная с $x_1 = 5$.

После рассмотрения конкретных примеров уравнений 4-й степени, удовлетворяющих условию Рунге, перейдём к описанию и обоснованию общего элементарного алгоритма их решения.

§ 6. Общий алгоритм

Для удобства читателя сначала опишем этот алгоритм для более простого случая кубических уравнений, удовлетворяющих условию Рунге:

$$(a_1x+b_1y)(a_2x^2+b_2xy+c_2y^2)+\ldots=0,$$

где многочлены a_1x+b_1y и $a_2x^2+b_2xy+c_2y^2$, в произведение которых разлагается старшая однородная часть, предполагаются взаимно простыми.

Сделав линейную замену неизвестных, можно считать, что $a_1=1$ и $b_1=0$ (и, следовательно, $c_2\neq 0$ в силу взаимной простоты сомножителей). Запишем уравнение в виде

$$x(a_2x^2+b_2xy+c_2y^2)+xL_{\leqslant 1}(x,y)+Ay^2+By+C=0 \tag{22}$$

и заметим, что в оценке его решения

$$y=\Psi(x)\sim\alpha x^{\varepsilon}\quad(x\to\infty), \tag{23}$$

где $\alpha\neq 0$, показатель роста $\varepsilon>0$ не может быть больше единицы. Это следует из метода Ньютона: при $\varepsilon>1$ слагаемое

$$c_2xy^2=c_2x\Psi(x)^2\sim c_2\alpha^2x^{2\varepsilon+1}\quad(x\to\infty)$$

в левой части уравнения (22) превосходило бы по порядку все остальные слагаемые, и тождества не получалось бы при достаточно больших x.

Далее в уравнении (22) можно считать $A=0$, так как этого можно добиться заменой c_2x+A на новое x. Тогда $By+C\equiv 0 \pmod{x}$, т. е. число

$$m=\frac{By+C}{x}$$

должно быть целым. Но при больших x число m находится в малой окрестности предельного значения, равного $B\alpha$ при $\varepsilon=1$ и 0 при $\varepsilon<1$. Это значит, что при больших x у нас появляется дополнительное уравнение вида

$$mx-By-C=0,$$

где целочисленный параметр m принимает лишь конечное множество значений, которое можно явно указать.

Для уравнений из § 4 можно рассуждать аналогичным образом, но на один шаг длиннее. Как и выше, мы можем считать $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, а $d_2 \neq 0$. Имеем уравнение

$$x(a_2x^3 + b_2x^2y + c_2xy^2 + d_2y^3) + xQ_{\leqslant 2}(x, y) + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0.$$

Легко видеть, что показатель ε в оценке (23) его решения также не превышает единицы (в противном случае слагаемое d_2xy^3 после подстановки этого решения оказалось бы единственным максимальным по порядку).

Опять можно считать $A = 0$, иначе заменим $d_2x + A$ новым x (или, как мы это делали в примерах, будем далее рассматривать сравнения не по модулю x, а по модулю $d_2x + A$). Тогда $By^2 + Cy + D \equiv 0 \pmod{x}$, т. е. число

$$l = \frac{By^2 + Cy + D}{x}$$

должно быть целым. Если $B = 0$, то l в силу оценки (23) с $\varepsilon \leqslant 1$ может принимать лишь конечное множество значений, и возникает конечное число дополнительных линейных уравнений. При $B \neq 0$ имеем

$$a_2x^3 + b_2x^2y + c_2xy^2 + d_2y^3 + Q_{\leqslant 2}(x, y) + l = 0,$$

откуда $l \equiv d_2y^3 + q_{\leqslant 2}(y) \pmod{x}$. Далее разделим многочлен

$$B^2(d_2y^3 + q_{\leqslant 2}(y))$$

на многочлен $By^2 + Cy + D$ с остатком:

$$B^2(d_2y^3 + q_{\leqslant 2}(y)) = (My + N)(By^2 + Cy + D) + C_1y + D_1$$

(множитель B^2 гарантирует, что коэффициенты M, N, C_1, D_1 окажутся целыми числами). Перейдя в этом тождестве к сравнению по модулю x, получим

$$B^2l \equiv C_1y + D_1 \pmod{x}.$$

Таким образом, число

$$m = \frac{B^2l - C_1y - D_1}{x} = \frac{B^2(By^2 + Cy + D) - C_1xy - D_1x}{x^2}$$

должно быть целым. При больших x в силу оценки (23) это число должно находиться в малой окрестности предельного значения, равного $B^3\alpha^2 - C_1\alpha$ при $\varepsilon = 1$ и 0 при $\varepsilon < 1$. Таким образом, и в этом случае появляется конечное число дополнительных уравнений, но уже вида

$$mx^2 - B^2(By^2 + Cy + D) + C_1xy + D_1x = 0.$$

В обоих случаях получаемые системы уравнений будут иметь конечное множество решений, причём даже в вещественных числах. Действительно, если составить результант левых частей уравнений системы по переменной y, то получится ненулевой многочлен относительно x (поскольку левая часть исходного уравнения по предположению неприводима, а каждое из дополнительных уравнений имеет меньшую степень). Значит, существует лишь конечное число значений x и, как следствие, конечное число значений y.

Что касается метода решения уравнений из § 5, то здесь в обосновании нуждаются следующие моменты.

I. Нужно объяснить, почему перезапись уравнения в виде (15) всегда возможна. Пусть $p_i(x, y) = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2$. Тогда задача отыскания коэффициентов A, B, C, D, при которых произведение

$$(p_1(x, y) + Ax + By)(p_2(x, y) + Cx + Dy)$$

будет иметь заданную кубическую часть, сводится к решению системы линейных уравнений. Её определитель Δ в точности равен результанту

$$\operatorname{Res}(p_1, p_2) = \det \begin{pmatrix} a_2 & 0 & a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & c_1 & b_1 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

а значит, отличен от нуля, поскольку $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$ взаимно просты. Домножив при необходимости левую часть уравнения на Δ^2, мы можем считать найденные коэффициенты A, B, C, D целыми.

II. Требуется показать, что одно из отношений Z/X или Z/Y, где

$$X = p_1(x, y) + Ax + By, \quad Y = p_2(x, y) + Cx + Dy,$$

а Z — какой-нибудь многочлен от x и y не выше 2-й степени, ограничено при больших x, поскольку будет иметь конечный предел при $x \to \infty$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 1$ в оценке (23). Тогда при $c_1 \neq 0$ конечный предел имеет отношение Z/X, а при $c_2 \neq 0$ — отношение Z/Y, при этом оба коэффициента c_i не могут быть одновременно нулевыми. Аналогично рассматривается случай $\varepsilon < 1$.

Если же $\varepsilon = 1$, то при $p_1(1, \alpha) \neq 0$ отношение Z/X будет иметь конечный предел, а при $p_2(1, \alpha) \neq 0$ — отношение Z/Y. Осталось заметить, что числа $p_i(1, \alpha)$ одновременно не равны нулю: это опять вытекает из взаимной простоты многочленов $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$.

Сделаем несколько заключительных замечаний.

Во-первых, строго говоря, в алгоритме необходимо предусмотреть исследование «тривиальных» ситуаций, когда решение $y = \Psi(x)$ данного уравнения имеет конечный предел при $x \to \infty$ или оно вообще существует только на конечном интервале. Так, например, кривая, заданная уравнением

$$(x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2) - x^3 - 6xy + 1 = 0,$$

будет ограниченной, и это нужно выяснять отдельно.

Во-вторых, случай, когда старшая однородная часть уравнения пропорциональна степени неприводимого многочлена, небезнадёжен в плане применения идей метода Рунге. Вот простой пример: если в уравнении

$$x^4 - x^2y - xy^2 - y^2 + 1 = 0$$

дважды перейти к сравнениям по модулю $x + 1$, то получим, что число

$$m = \frac{y + 4x + 2}{(x + 1)^2}$$

должно быть целым, при этом $y = \Psi_i(x) \sim \pm x^{3/2}$ при $x \to +\infty$. Как следует модифицировать условие Рунге, в принципе известно (см., например, [9]), но здесь также хотелось бы обойтись элементарными средствами.

В-третьих, нужно понимать, что требование типа разложимости старшей однородной части уравнения является сильным ограничением метода Рунге. Даже для кубических диофантовых уравнений весьма простого вида могут потребоваться существенно более сложные и заведомо неэлементарные методы исследования. В качестве классических примеров можно привести *уравнение Морделла*

$$y^2 - x^3 = k$$

и (кубическое) *уравнение Туэ*

$$f_3(x, y) = k,$$

где $k \neq 0$ — целое число, а $f_3(x, y)$ — неприводимый однородный кубический многочлен с целыми коэффициентами. Эти уравнения также имеют конечное множество решений в целых числах, но указать эффективные границы для них очень непросто (см. монографии [10] и [7]).

Список литературы

[1] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2009.

[2] *Кушниренко А.* Многоугольник Ньютона // Квант. 1977. №6. С. 19–24.

[3] *Осипов Н. Н.* Решение задачи М1787 // Квант. 2002. №2. С. 14.

[4] *Осипов Н. Н.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // Математика в школе. 2012. №1. С. 64–69.

[5] Петербургские олимпиады школьников по математике. 2003–2005 / Сост.: Иванов С. В., Кохась К. П., Храбров А. И. и др. СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2006.

[6] *Спивак А. В.* Уравнения Пелля // Квант. 2002. № 4. С. 5–11.

[7] *Спринджук В. Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М.: Наука, 1982.

[8] *Чеботарев Н. Г.* Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики // Собр. соч. Т. 3. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 47–80.

[9] *Hilliker D. L.* An algorithm for solving a certain class of diophantine equations // Math. Comput. 1982. V. 38, № 158. P. 611–626.

[10] *Mordell L. J.* Diophantine equations. Academic Press, 1969.

[11] *Runge C.* Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen // J. reine und angew. Math. 1887. V. 100. P. 425–435.

Н. Н. Осипов, Сибирский федеральный университет, Красноярск

nnosipov@rambler.ru