Преподавание и популяризация математики

О концепции учебника геометрии А. В. Погорелова

Э. Б. Винберг

Эта статья была написана в 2002 г. по заказу И. Ф. Шарыгина. Предполагалась её публикация в газете «Первое сентября». Однако в связи с кончиной А. В. Погорелова, а затем и И. Ф. Шарыгина, она не была опубликована в то время. В 2012 г. она вошла в сборник статей «О математике: проблемы преподавания» (М., изд-во «Знак»). Ниже она перепечатывается с небольшими изменениями, учитывающими улучшения, сделанные в последних (посмертных) изданиях учебника.

Очевидными целями школьного курса геометрии являются развитие представлений о геометрии окружающего мира и обучение решению некоторых стандартных задач. Но не менее важно, что этот курс может предоставить прекрасный материал для творчества и способствовать пониманию таких духовных ценностей, как истина и красота. Успех в достижении всех этих целей зависит от учебника (и, конечно, от учителя, но это другая тема).

Начиная с 1983 г. большинство школьников России изучало геометрию по учебнику А. В. Погорелова. В настоящей статье даётся анализ концепции этого учебника[1)].

[1)] Ссылки на пункты учебника даются по изданиям: *Погорелов А. В.* Геометрия 7–9. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014; *Погорелов А. В.* Геометрия 10–11. 13-е изд. М.: Просвещение, 2014.

1. По-видимому, ни у кого не вызывает сомнений, что школьный курс геометрии должен (явно или неявно) строиться на базе аксиоматики типа Евклида — Гильберта. Однако здесь возможны разные варианты в зависимости от того, какие понятия считаются основными (неопределяемыми) и какие утверждения принимаются без доказательства, т. е. считаются аксиомами (хотя бы они так и не назывались). Само собой разумеется, что при решении этих вопросов автор школьного учебника должен руководствоваться иными соображениями, нежели профессионал, исследующий основания геометрии.

Если у исследователя имеются веские причины свести к минимуму число недоказываемых утверждений, то у автора учебника таких причин нет. Напротив, стремление к этому приводит к необходимости доказывать некоторые очевидные утверждения, что не может быть правильно понято 12–13-летними детьми. Им остаётся только заучивать доказательства, не понимая их смысла. Что ещё хуже, это с самого начала создаёт у них ложное представление о геометрии как о схоластической науке.

С точностью до того, что вещественные числа считаются как бы данными извне (о чём пойдёт речь ниже), система аксиом учебника Погорелова весьма близка системе аксиом «Оснований геометрии» Д. Гильберта. Эти аксиомы явно формулируются в виде «основных свойств», и от учеников требуется во всех рассуждениях пользоваться только этими свойствами (и уже доказанными теоремами). В качестве образца приводится доказательство очевидной для школьника теоремы о том, что прямая не может пересекать всех сторон треугольника (7–9 кл., п. 12).

Утверждение о том, что прямая разбивает плоскость на две части, относится к числу «основных свойств», а, казалось бы, более простое утверждение о том, что точка разбивает прямую на части (число которых, впрочем, остаётся неясным: см. ниже), выводится из него (7–9 кл., п. 6). Из этого же свойства в учебнике для 10–11 кл. (п. 6) путём довольно сложного рассуждения выводится, что плоскость разбивает пространство на две части. Последний факт без ущерба для чего бы то ни было можно было бы принять без доказательства, особенно если учесть, что при его выводе используются ничуть не более очевидные факты, отнесённые к числу «основных свойств», а именно, что через любые две пересекающиеся прямые проходит плоскость и что линия пересечения двух плоскостей есть прямая.

Это классическая ситуация, о которой писал ещё А. Пуанкаре:

«Если я, без предварительной подготовки, скажу им [ученикам]: „Нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен вам доказать то, что вы считали очевидным“, — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как произвольно собранная груда бесполезных умствований; и они либо почувствуют к ней отвращение, либо будут забавляться ею, как игрою, и в умственном отношении уподобятся греческим софистам». («Наука и метод». В кн.: *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука. 1983. Раздел «Математические определения и преподавание», с. 359.)

Даже профессионалу, только что познакомившемуся с аксиомами учебника для 7–9 кл., нелегко, например, доказать очевидные утверждения, составляющие содержание задач 49 § 1 и 22 § 2, о которых мы расскажем ниже. Проблема состоит в необходимости, отрешившись от наглядных представлений, постоянно держать в голове, какими очевидными свойствами разрешено пользоваться, а какими — нет. Можно ли требовать этого от ученика?

Суть аксиоматического метода, как его понимают современные математики, состоит в том, что основные понятия теории могут интерпретироваться по-разному, лишь бы они удовлетворяли установленным аксиомам, и тогда теоремы, полученные логическим путём из этих аксиом, будут справедливы в любой интерпретации. Поэтому для математика вполне естественна формулировка такого «основного свойства принадлежности точек и прямых»: «Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей» (7–9 кл., п. 2).

Однако эту точку зрения невозможно донести до 12–13-летнего ребёнка. Для него приведённая выше аксиома настолько вопиюще очевидна, что он не может правильно понять её смысла. Если он прочтёт в книжке: «У всякой мухи есть ноги», он подумает: «Конечно, я это хорошо знаю», но он поймёт, что хотел сказать автор, потому что он знает, что, например, у рыбы и червяка ног нет, т. е. понимает альтернативу. Но ему не может прийти в голову, что слова «точка», «прямая» и «принадлежать» могут означать нечто иное, чем те образы, которые так ясно стоят перед его глазами, и тогда может найтись «прямая», которой не «принадлежит» ни одна «точка». Он может подумать: «Раз это написано в учебнике, это должно быть что-то умное; значит, это не то, о чём я думаю, но что именно, я не понимаю». Но, скорее всего, он не станет утруждать себя подобными мыслями, а просто заучит эту формулировку, как заклинание, чтобы ответить урок, и через несколько дней совершенно её забудет. Так какой цели достигает автор учебника, формулируя это «основное свойство»?

В учебнике для 10–11 кл. (п. 5) с помощью хитроумного рассуждения автор доказывает, что из существования точек пространства, лежащих вне данной прямой, следует существование таких точек в любой плоскости, содержащей эту прямую. При этом он пользуется двумя свойствами, принимаемыми без доказательства: существованием точек вне любой данной плоскости и тем, что линия пересечения двух плоскостей есть прямая. Это формально верное доказательство решительно не нужно школьникам и не может быть ими адекватно понято по указанной выше причине.

2. Впрочем, автор учебника сам не всегда выдерживает установленного им уровня строгости. На некоторые случаи, когда он вопреки своей установке прибегает к наглядным представлениям, указывал ещё А. Д. Александров в статье «О строгости изложения в учебном пособии А. В. Погорелова» в журнале «Математика в школе», 1985, № 5, с. 64–68. С тех пор автор кое-что изменил в своём учебнике, но некоторые замечания Александрова остаются в силе. К ним можно добавить и другие претензии.

Так, в учебнике для 7–9 кл., п. 6 автор доказывает, что точка разбивает прямую на части таким образом, что две точки принадлежат одной части тогда и только тогда, когда они лежат «по одну сторону» от данной точки (т. е. данная точка не лежит между ними). Однако число этих частей-«сторон» остаётся невыясненным. То, что их не более двух, можно было бы легко доказать аналогичным рассуждением, но то, что их ровно две, как справедливо заметил Александров, на данном этапе доказано быть не может. Поэтому определение полупрямой и основанное на нём определение угла остаются необоснованными.

В п. 7 (7–9 кл.) автор даёт следующее определение: «Мы будем говорить, что луч проходит между сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла». Хотелось бы знать, что в этом случае данный луч пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла. Это составляет содержание задачи 49 § 1, отмеченной как задача повышенной трудности. Очевидно, школьник не обязан знать даже её формулировку. Между тем далее этот факт как бы предполагается известным, например, при определении биссектрисы треугольника.

В п. 18 (7–9 кл.) даётся следующее определение биссектрисы угла: «Биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам». Вопрос о существовании биссектрисы не обсуждается, хотя в дальнейшем это как бы считается известным. Казалось бы, можно получить биссектрису, отложив от одной стороны данного угла в полуплоскость, содержащую другую сторону, угол, равный его половине. Но почему вторая сторона отложенного угла будет проходить между сторонами данного? Это вытекает лишь из задачи 22 §2, которая также отмечена как задача повышенной трудности.

Приведённые примеры вовсе не означают, что изложение следует сделать ещё более формальным, полностью отказавшись от обращения к наглядности. Напротив, они лишний раз показывают бессмысленность стремления автора к полной формализации. Если уподобить автора учебника геометрии лоцману, то его задача состоит в том, чтобы, хорошо зная все мели и подводные рифы, не заставлять ученика узнавать их на собственном опыте, но вывести его в открытые воды геометрии, минуя все эти препятствия.

3. Как уже было сказано, автор учебника считает вещественные числа данными извне. Это позволяет ему избежать введения в свою аксиоматику неприятных аксиом Архимеда и непрерывности.

Но откуда школьнику известны вещественные числа? Для него они появляются прежде всего как результаты измерения длины. Описание измерения длины апеллирует к таким геометрическим представлениям, как прямолинейные отрезки, их перемещения (движения) и их сравнение. Эти представления, так или иначе используемые в школьном курсе математики для построения вещественных чисел, могли бы служить прекрасной базой и для построения геометрии. Однако автор нашего учебника геометрии не желает поселиться в этом раю, считая, видимо, рассуждения, связанные с процессом измерения, недостаточно строгими (каковыми они, конечно, и являются с точки зрения математика-профессионала).

В результате автор остаётся один на один с проблемой определения длины отрезка. Он решает её весьма простым и радикальным способом, объявляя длину отрезка неопределяемым понятием, т. е. просто декларируя, что каждый отрезок имеет некоторую положительную длину. Но при этом он забывает о незаконном с его точки зрения происхождении самих вещественных чисел!

Однако пойдём дальше. Так как автор не признаёт априорного понятия о перемещении фигур, он вынужден определять равенство треугольников через равенство соответственных сторон и углов. (Равенство любых фигур ему на этой стадии определить было бы затруднительно.) Аксиома откладывания треугольника от полупрямой (существование треугольника, равного данному и находящегося в стандартном расположении относительно данной полупрямой) в этом контексте выглядит весьма искусственно, и автор вынужден мотивировать её, прибегая к образу перемещения треугольника. Почему же тогда не включить хорошо мотивированное понятие о перемещении фигур в число основных понятий теории и не определить равенство любых фигур через их совмещение, поставив изложение с головы на ноги и сделав его тем самым более понятным?

Мотивируя аксиому откладывания треугольника, автор никак не комментирует случай, когда ориентация треугольника изменяется. Поэтому формально верное доказательство теоремы о равнобедренном треугольнике

(7–9 кл., п. 23) не подкреплено никакими наглядными представлениями и в восприятии школьника есть не более чем словесный фокус.

В п. 82 (конец восьмого класса) автор, наконец, вводит понятие движения как преобразования, сохраняющего расстояния между точками. При этом он вынужден доказывать, что движение переводит прямолинейные отрезки в прямолинейные отрезки и сохраняет углы. Далее он доказывает существование таких специальных видов движений, как параллельный перенос, поворот и симметрия относительно прямой и, наконец, определяет равенство фигур через движение, констатируя, что для треугольников это эквивалентно равенству в старом смысле.

Таким образом, в конце второго года обучения автор определяет и доказывает то, что было ясно его ученикам с самого начала и на что он опирался, мотивируя аксиому откладывания треугольника! Конечно, для математиков это обычное дело, и на то есть свои причины, но нет никаких причин вовлекать в эту игру школьников, тем более что её цель всё равно останется им непонятной.

4. Борьба с формально-логическими трудностями оставляет автору учебника и учащимся меньше возможностей для занятий собственно геометрией. Это делает учебник менее содержательным и интересным, чем хотелось бы видеть учебник геометрии. Например, теорема о пересечении высот треугольника имеется лишь в виде задачи.

Можно спорить о том, должна ли та или иная теорема входить в программу экзамена, но их отсутствие в основном тексте учебника обедняет курс и ограничивает круг интересных задач, которые можно предложить учащимся в процессе обучения.

Недостаток интересной геометрии в учебнике связан ещё и со стремлением автора к скорейшей алгебраизации геометрии. Это стремление просматривается уже в определении равенства треугольников. Далее, теорема о внешнем угле треугольника (п. 34) выводится в учебнике для 7–9 кл. из теоремы о сумме углов треугольника, теорема о сравнении перпендикуляра и наклонной (п. 65) — из теоремы Пифагора, а теорема о сравнении сторон и углов треугольника (п. 112) — из теоремы синусов! Таким образом, объективно более простые теоремы, которые не зависят от постулата о параллельных и могут быть доказаны в самом начале курса, выводятся на более поздних стадиях из теорем, выражающих алгебраические соотношения между сторонами и углами треугольника.

В частности, только на втором году обучения, уже после введения косинуса угла, школьник узнаёт доказательство того, что перпендикуляр короче наклонной и что, следовательно, прямолинейный отрезок является кратчайшим путём между двумя точками. При этом алгебраическое доказательство позволяет лишь формально понять указанные фундаментальные факты, заслоняя их геометрическую суть.

Алгебраические методы в геометрии: метрические соотношения в треугольнике, метод координат и векторная алгебра — более важны для практических приложений, чем продвинутые геометрические теоремы. Они позволяют в принципе просчитать любую конкретную конфигурацию, но они убивают красоту геометрии, сводя всё к рутинным вычислениям, и на школьном уровне едва ли могут служить источником интересных задач (кстати, таких задач и нет в соответствующих параграфах учебника Погорелова).

Вряд ли, однако, можно предположить, что автор считает, что геометрия изучается в школе только ради её практических приложений. Если стать на такую точку зрения в отношении геометрии, то логично перенести её и на другие предметы, а тогда общеобразовательные школы надо заменить специализированными техникумами. С другой стороны, это не вяжется с излишне формализованным построением геометрии в учебнике, которое уж точно не нужно для приложений.

5. Таким образом, концепция учебника Погорелова полностью несостоятельна. Она приводит к тому, что учебник не только не способен пробудить интерес к геометрии, но может вызвать её неприятие, особенно на решающем начальном этапе обучения. Конечно, он сообщает некоторые полезные сведения (которые, впрочем, можно найти и в справочнике), но он не решает задач интеллектуального и духовного воспитания учащихся. Поразительно, что этот учебник в течение столь долгого времени поддерживался и продолжает поддерживаться Министерством просвещения, а затем Министерством образования (и науки) РФ.

Э. Б. Винберг, мехмат МГУ

`vinberg@zebra.ru`