Разбиения целочисленных решёток и принцип Дирихле

Е. И. Знак

В сборнике «Математическое просвещение» [2] была поставлена следующая задача на исследование:

Узлы k-мерной целочисленной решётки раскрашены в l цветов. Докажите, что найдётся прямоугольный параллелепипед с рёбрами, параллельными осям решётки, с вершинами одного цвета. Постарайтесь получить оценки на размер области решётки, где можно наверняка найти параллелепипед, в зависимости от k и l. *(А. Я. Белов)*

Естественно начать с простейшего вопроса. *Плоскость разбита на два непересекающихся подмножества. Верно ли, что хотя бы в одном из этих двух множеств найдутся четыре точки, расположенные в вершинах некоторого прямоугольника*?

Отметим бесперспективность поиска ответа через анализ возможной геометрической структуры одного из множеств разбиения. Может случиться так, что ни первое, ни второе множество не имеет внутренних точек — то есть не содержит кругов (хотя бы и «очень маленьких»). Конечно же, если одно из множеств содержит круг, то в этом круге имеется и прямоугольник тоже — и вопрос становится тривиальным. Несложно привести соответствующие примеры.

Тем не менее, ответ на поставленный вначале вопрос является однозначно положительным (то есть при произвольном разбиении плоскости на два множества хотя бы в одном из множеств найдутся четыре точки, расположенные в вершинах прямоугольника), и обосновать это можно довольно легко, указав на плоскости конкретное *конечное множество*, обладающее тем же свойством!

Рассмотрим на координатной плоскости 27 точек $(m; k)$, где $m, k \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant 9$, $1 \leqslant k \leqslant 3$. Воспользуемся традиционной «олимпиадной» лексикой: пусть часть точек окрашена в зелёный цвет, а оставшиеся — в красный (разбиение на два множества по цветовому признаку). Среди девяти точек $(1; 1)$, $(2; 1)$, $(3; 1)$, $\ldots$, $(9; 1)$ найдутся пять точек одного цвета, для определённости — зелёного: $(x_1; 1)$, $(x_2; 1)$, $\ldots$, $(x_5; 1)$. Среди пяти точек $(x_1; 2)$, $(x_2; 2)$, $\ldots$, $(x_5; 2)$ найдутся три точки одного цвета: $(y_1; 2)$, $(y_2; 2)$, $(y_3; 2)$. Если они зелёные, то четыре зелёные точки $(y_1; 1)$, $(y_2; 1)$, $(y_1; 2)$, $(y_2; 2)$ являются вершинами прямоугольника. Допустим теперь, что точки $(y_1; 2)$, $(y_2; 2)$, $(y_3; 2)$ — красные. Среди трёх точек $(y_1; 3)$, $(y_2; 3)$, $(y_3; 3)$ найдутся две точки одного цвета: $(z_1; 3)$, $(z_2; 3)$. Если они зелёные, то четыре зелёные точки $(z_1; 1)$, $(z_2; 1)$, $(z_1; 3)$, $(z_2; 3)$ являются вершинами прямоугольника. Если же точки $(z_1; 3)$, $(z_2; 3)$ красные, то четыре красные точки $(z_1; 2)$, $(z_2; 2)$, $(z_1; 3)$, $(z_2; 3)$ являются вершинами прямоугольника.

Рассмотрим теперь более общую задачу.

Подмножество d-мерной целочисленной решётки $\mathbf{Z}^d$ будет называться d-мерной ***сеткой*** *типа $m_1 \times \ldots \times m_d$, если оно имеет вид $P_1 \times \ldots \times P_d$ для некоторых конечных множеств $P_1, \ldots, P_d$ целых чисел (при этом $|P_j| = m_j \geqslant 2$, $j = 1, \ldots, d$).*

В данной заметке рассматриваются частные случаи следующей общей комбинаторной задачи.

Для заданных натуральных d, n и заданного набора натуральных чисел $(m_1; \ldots; m_d)$, $2 \leqslant m_j \leqslant m_{j+1}$, описать множество всех таких наборов $(M_1; \ldots; M_d) \in \mathbf{N}^d$ $(2 \leqslant M_j \leqslant M_{j+1})$, ***минимальных*** *в некотором определённом смысле, что для любой d-мерной сетки X типа $M_1 \times \ldots \times M_d$ и* ***любого*** *её разбиения на n попарно непересекающихся подмножеств $X_1, \ldots, X_n$ хотя бы одно из этих подмножеств содержит некоторую d-мерную сетку типа $m_1 \times \ldots \times m_d$.*

С геометрической точки зрения условия $m_j \leqslant m_{j+1}$ или $M_j \leqslant M_{j+1}$ общность никоим образом не ограничивают и служат для упрощения формулировок (позволяют избавиться от несущественной неединственности). Набор $(M_1; \ldots; M_d)$, удовлетворяющий описанным выше условиям, будет называться **подходящим**. Если подходящий набор обладает тем свойством, что для *каждого* $j = 1, \ldots, d$ замена в этом наборе компоненты

M_j на M_{j-1} приводит к *неподходящему* набору (изменяется только одна компонента!), то набор называется **минимальным**. Таким образом, минимальный набор является таким подходящим набором, что уменьшение хотя бы какой-то одной его компоненты приводит к набору, который не является подходящим. Например, выше фактически было доказано, что для параметров $d = 2, n = 2$ и набора $(m_1; m_2) = (2; 2)$ подходящим является набор $(M_1; M_2) = (3; 9)$. Однако этот подходящий набор не является минимальным. Первую компоненту — число 3 — уменьшить нельзя (представьте себе две параллельные прямые, зелёную и красную, из такого множества нельзя выделить четыре точки одного цвета, расположенные в вершинах прямоугольника). Но, оказывается, в данной ситуации набор $(3; 7)$ тоже является подходящим (и уже *минимальным*). В самом деле, рассмотрим на координатной плоскости 21 точку вида $(m; k)$, где $m, k \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 7$. В принятой выше терминологии это двумерная сетка типа 3×7, и, допустим, её точки раскрашены в два цвета. Для каждого $k = 1, \ldots, 7$ среди трёх точек $(1; k)$, $(2; k)$, $(3; k)$ гарантированно найдутся две точки одного цвета. Имеем всего шесть попарно различных вариантов одноцветных двоеточий, которые можно естественным образом обозначить так:

$$(1; 2; \text{зел}),\ (1; 3; \text{зел}),\ (2; 3; \text{зел}),\ (1; 2; \text{крас}),\ (1; 3; \text{крас}),\ (2; 3; \text{крас}).$$

Следовательно, среди семи «этажей» $k = 1, \ldots, 7$ обязательно найдутся два «этажа» с одинаковыми вариантами. Итак, доказано, что при любом разбиении сетки типа 3×7 на два множества хотя бы в одном из множеств найдутся четыре точки, расположенные в вершинах прямоугольника. То, что число 7 уменьшить нельзя, иллюстрируется конкретным разбиением:

$$\begin{array}{cccccc} \bullet & * & \bullet & * & \bullet & * \\ * & * & \bullet & \bullet & * & \bullet \\ \bullet & \bullet & * & * & * & \bullet \end{array}$$

Далее систематически будет использоваться следующее обобщение принципа Дирихле (леммы про «кроликов в клетках»): *если количество элементов множества X равно $N(K-1)+1$ и множество X разбито в сумму непересекающихся подмножеств $X_1, \ldots, X_N$, то среди этих подмножеств найдётся хотя бы одно, содержащее не менее K элементов.*

Теорема 1. *Для любых натуральных $m \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$ и любого разбиения плоской сетки типа*

$$(n(m-1)+1) \times \bigl(n(k-2)C^m_{n(m-1)+1} + 1\bigr)$$

на n подмножеств хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся сетка типа $m \times k$.

Доказательство. Продолжим наглядно интерпретировать разбиение на подмножества как раскраску элементов в цвета $1, \ldots, p$. Каждое сечение $\{(1; i), (2; i), \ldots, (n(m-1)+1; i)\}$ данной сетки пометим (**не** *обязательно взаимно однозначно*) значком вида $\langle J|p\rangle$, где J есть некоторое m-элементное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n(m-1)+1\}$ и p есть номер цвета $(p = 1, \ldots, n)$. Сечение помечается значком $\langle J|p\rangle$, если в нём нашлось m точек с цветом p и абсциссами из J. Общее количество попарно различных меток равно $nC^m_{n(m-1)+1}$.

Следовательно, среди всех «горизонтальных» сечений нашей сетки (их количество по условию равно $n(k-1)C^m_{n(m-1)+1}+1$) найдётся k сечений $\{(1;i_1), (2;i_1), \ldots, (n(m-1)+1;i_1)\}, \ldots, \{(1;i_k), (2;i_k), \ldots, (n(m-1)+1;i_k)\}$ *с одной и той же меткой* $\langle J|q\rangle$. Это означает, что все точки сетки $J \times \times \{i_1, \ldots, i_k\}$ имеют один и тот же цвет с номером q. Теорема доказана. $\square$

При $n = 2$ получаем

Следствие 1.1. *Для любых натуральных $m \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$ и любого разбиения плоской сетки типа $(2m-1)\times(2(k-1)C^m_{2m-1}+1)$ на два подмножества хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся сетка типа $m \times k$.*

Положив $k = m = 2$ в теореме 1, получаем

Следствие 1.2. *При любом разбиении плоской сетки типа*

$$(n+1) \times \left(\frac{n^2}{2}(n+1)+1\right)$$

на n подмножеств хотя бы в одном из этих подмножеств найдутся четыре точки, расположенные в вершинах некоторого прямоугольника.

Перейдём к пространственному случаю.

Пример. При любом разбиении на два подмножества пространственной сетки типа $3 \times 7 \times 127$ хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся восемь точек, расположенных в вершинах некоторого прямого параллелепипеда.

Действительно, рассмотрим на координатной плоскости 21 точку вида $(t; s)$, где $t, s \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant t \leqslant 3$, $1 \leqslant s \leqslant 7$. Это двумерная сетка типа 3×7, которую обозначим Π. Данная в условии теоремы пространственная сетка типа $3 \times 7 \times 127$ расслаивается на «горизонтальные» сечения, и можно считать, не умаляя общности, что они суть $\Pi_i = \{(t; s; i) \mid (t; s) \in \Pi,\ i = 1, 2, \ldots, 126, 127\}$. Сетка Π содержит $C^2_3 C^2_7 = 3 \cdot 21 = 63$ подмножества типа $A \times B$ с условием $|A| = |B| = 2$ (т. е. типа «четыре вершины прямоугольника»).

Каждое сечение Π_i данной пространственной сетки пометим (**не** *обязательно взаимно однозначно*) меткой вида $\langle A\times B|p\rangle$, где A и B суть некоторые двухэлементные подмножества множеств $\{1,2,3\}$ и $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ соответственно, а p есть номер цвета ($p=1,2$). Сечение помечается меткой $\langle A\times B|p\rangle$, если в нём нашлось четыре точки с цветом p и двумя первыми координатами из $A\times B$. Общее количество попарно различных меток равно $2\cdot 63=126$. Следовательно, среди всех «горизонтальных» сечений нашей сетки (их количество по условию равно 127) найдётся два сечения Π_i и Π_j *с одной и той же меткой* $\langle A\times B|q\rangle$, где

$$A\times B=\{(\alpha;\gamma),(\alpha;\delta),(\beta;\gamma),(\beta;\delta)\}.$$

Это означает, что точки

$$(\alpha;\gamma;i),\ (\alpha;\delta;i),\ (\beta;\gamma;i),\ (\beta;\delta;i),\ (\alpha;\gamma;j),\ (\alpha;\delta;j),\ (\beta;\gamma;j),\ (\beta;\delta;j),$$

расположенные в вершинах прямого параллелепипеда, окрашены в один и тот же цвет с номером q.

Теорема 2. *Для любых натуральных $m\geqslant 2$, $k\geqslant 2$, $l\geqslant 2$ и любого разбиения пространственной сетки типа*

$$(n(m-1)+1)\times M\times\bigl(n(l-1)C^m_{n(m-1)+1}C^k_M+1\bigr),$$

где $M=n(k-1)C^m_{n(m-1)+1}$, на n подмножеств хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся сетка типа $m\times k\times l$.

Доказательство. Рассмотрим на координатной плоскости точки вида $(t;s)$, где $t,s\in\mathbf{Z}$, $1\leqslant t\leqslant n(m-1)+1$, $1\leqslant s\leqslant n(k-1)C^m_{n(m-1)+1}+1$. Это двумерная сетка типа $(n(m-1)+1)\times\bigl(n(k-1)C^m_{n(m-1)+1}+1\bigr)$, которую обозначим через Π. Данная в условии теоремы пространственная сетка типа $(n(m-1)+1)\times M\times\bigl(n(l-1)C^m_{n(m-1)+1}C^k_M+1\bigr)$ расслаивается на «горизонтальные» сечения, и можно считать, не умаляя общности, что они суть

$$\Pi_i=\bigl\{(t;s;i)\mid(t,s)\in\Pi,\ i=1,2,\ldots,\ n(l-1)C^m_{n(m-1)+1}C^k_M+1\bigr\}.$$

Сетка Π содержит $C^m_{n(m-1)+1}C^k_M$ подмножеств типа $A\times B$ с условиями $|A|=m$, $|B|=k$ (т. е. сеток типа $m\times k$). Каждое сечение Π_i данной пространственной сетки можно пометить (**не** *обязательно взаимно однозначно*) меткой вида $\langle A\times B|p\rangle$, где A и B суть некоторые m-элементное и k-элементное подмножества множеств $\{1,\ldots,2m-1\}$ и $\{1,\ldots,M\}$ соответственно, а p есть номер цвета ($p=1,\ldots,n$). Сечение имеет метку $\langle A\times B|p\rangle$, если в нём нашлось mk точек с цветом p и *двумя первыми координатами из* $A\times B$

(то есть это подмножество из mk точек имеет цвет p и взаимно однозначно проектируется на двумерную сетку типа $m \times k$ на координатной плоскости). Общее количество попарно различных меток равно $nC^m_{n(m-1)+1}C^k_M$. Следовательно, среди всех «горизонтальных» сечений нашей сетки (их количество по условию равно $n(l-1)C^m_{n(m-1)+1}C^k_M + 1$) найдётся l сечений $\{1, \ldots, n(m-1)+1\} \times \{1, \ldots, M\} \times \{i_1\}$, $\ldots$, $\{1, \ldots, n(m-1)+1\} \times \times \{1, \ldots, M\} \times \{i_l\}$ *с одной и той же меткой* $\langle A \times B | q \rangle$. Это означает, что все точки трёхмерной сетки $A \times B \times \{i_1, \ldots, i_l\}$ имеют один и тот же цвет с номером q. Теорема доказана. □

При $n = 2$ получаем

Следствие 2.1. *Для любых натуральных $m \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ и любого разбиения пространственной сетки типа*

$$(2m-1) \times \big(2(k-1)C^m_{2m-1} + 1\big) \times \big(2(l-1)C^m_{2m-1}C^k_M + 1\big),$$

где $M = 2(k-1)C^m_{2m-1} + 1$, на два подмножества хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся сетка типа $m \times k \times l$.

Положив $k = m = l = 2$ в теореме 2, получаем

Следствие 2.2. *При любом разбиении пространственной сетки типа*

$$(n+1) \times (p(n)+1) \times (p(p(n))+1),$$

где $p(x) \equiv \dfrac{x^2}{2}(x+1)$, на n подмножеств хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся восемь точек, расположенных в вершинах некоторого прямого параллелепипеда.

Изложенные выше результаты можно развивать в различных направлениях. Например, обобщать для произвольных размерностей. Или вести поиск не сеток (в частности, не четырёх вершин прямоугольника), а множеств какого-то иного вида.

Ниже приведены две теоремы, иллюстрирующие возможные направления развития изложенных результатов.

Теорема 3. *Если последовательность $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ задана рекуррентно соотношениями $M_1 = 3$, $M_{j+1} = 0{,}5M_j(M_j-1)^2 + 1$, то для каждого целого $d \geqslant 2$ всякая d-мерная сетка S типа $M_1 \times \ldots \times M_d$ обладает следующим свойством:*

при произвольном разбиении сетки S на два множества хотя бы в одном из них найдутся точки в количестве 2^d, являющиеся вершинами некоторого прямого d-мерного параллелепипеда (то есть в совокупности образующие d-мерную сетку типа $\underbrace{2 \times \ldots \times 2}_{d}$).

Теорема 4. *Пусть A, B, C суть три* ***идущие подряд*** *вершины* ***правильного шестиугольника****. Через P и Q обозначим точки, симметричные центру данного шестиугольника относительно прямых AB и BC соответственно. Множество M, состоящее из* ***девяти*** *точек — всех вершин шестиугольника, его центра, точек P и Q — обладает следующим свойством: при произвольном разбиении M на два подмножества хотя бы в одном из этих подмножеств найдутся три точки, являющиеся* ***вершинами правильного треугольника****.*

Напомним также обобщённую теорему ван дер Вардена, которая гарантирует при разбиениях плоскости существование одноцветной совокупности вершин многоугольника предписанного типа, а при разбиениях трёхмерного пространства — многогранника предписанного типа (например, правильного). В этом контексте рассматриваются гомотетичные конечные подмножества целочисленных решёток (см. [1]). Поэтому конструкции данной статьи с некоторой натяжкой можно назвать предельными, подразумевая, что параллельный перенос является как бы гомотетией с бесконечно удалённым центром. Однако полученные здесь оценки не следуют из теоремы ван дер Вардена.

Список литературы

[1] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[2] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 223, задача 3.

Е. И. Знак, Михайловская военная артиллерийская академия, Санкт-Петербург

evgeny.znak@pochta.ru