Нам пишут

К задаче о точках Брокара

В. М. Журавлёв, П. И. Самовол

В сборнике «Математическое просвещение» № 18 (2014 г.) в статье авторов «Об одной задаче о биссектрисах и точках Брокара» на с. 228 приведена

Задача. *Про треугольник известно, что в нём чевианный треугольник точки, являющейся серединой отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокара, является равнобедренным. Верно ли, что данный треугольник также равнобедренный?*

Авторам удалось построить несколько контрпримеров. Для упрощения вычислений использовался онлайн-портал `https://cloud.sagemath.com/`. Удалось показать, что чевианный треугольник середины отрезка между первой и второй точками Брокара будет равнобедренным при условии $(b-c)g(a,b,c)=0$, где a, b, c — длины сторон исходного треугольника и

$$\begin{aligned} g(a,b,c) = -2a^{10}b^4 - 3a^8b^6 + 2a^6b^8 - 5a^{10}b^2c^2 - 15a^8b^4c^2 + 3a^6b^6c^2 + \\ + 9a^4b^8c^2 - 2a^{10}c^4 - 15a^8b^2c^4 + 23a^4b^6c^4 + 8a^2b^8c^4 - 3a^8c^6 + 3a^6b^2c^6 + \\ + 23a^4b^4c^6 + 15a^2b^6c^6 + 2b^8c^6 + 2a^6c^8 + 9a^4b^2c^8 + 8a^2b^4c^8 + 2b^6c^8. \end{aligned}$$

При $b=1$, $c=1/2$ приходим к уравнению 10-й степени, которое имеет положительный действительный корень $a \approx 0{,}914952661806423$. Неравенства треугольника выполнены, и мы нашли требуемый контрпример.

Взяв $a=1$, $c=0{,}9$, получаем уравнение 8-й степени с положительным действительным корнем $b \approx 0{,}763782383451273$. Для найденных a, b, c неравенства треугольника снова выполнены.

Таким образом, существуют неравнобедренные треугольники, для которых чевианный треугольник середины отрезка между точками Брокара является равнобедренным.