Я. Г. Синай — лауреат премии Абеля*

Ю. С. Ильяшенко

Как известно, личные проблемы Альфреда Нобеля в отношениях с математикой (математиком) лишили «царицу всех наук» заслуженной номинации среди прочих дисциплин Нобелевской премии. Эта несправедливость была устранена лишь в XXI веке, когда правительство Норвегии в 2002 г. учредило Абелевскую премию (Abel Prize) по математике. Своё название она получила в честь знаменитого норвежского математика Нильса Хенрика Абеля, чьё двухсотлетие отмечалось в том году. Собственно, саму идею этой премии выдвигал ещё сто лет назад другой норвежский математик, Софус Ли, но его смерть и политические пертурбации в Норвегии помешали реализовать её. А теперь, начиная с 2003 г., премия, размер которой оставляет 6 млн норвежских крон (более миллиона долларов),

* Первоначальный текст статьи опубликован в журнале «Природа».

Материал подготовлен при поддержке департамента образования города Москвы и основан на беседе, которую провела с автором Наталья Иванова-Гладильщикова.

Редакция благодарит И. В. Щурова, содействовавшего в подборе фотографий.

Я. Г. Синай с женой Е. Б. Вул

присуждается ежегодно. Лауреата премии Абеля, быстро завоевавшей признание как аналог Нобелевской, определяет международный комитет из пяти крупнейших математиков, назначенных Международным математическим союзом и Европейским математическим обществом. Норвежская академия наук и литературы объявляет лауреата и вручает премию в Атриуме юридического факультета университета Осло, где прежде вручалась Нобелевская премия мира. В этом году лауреатом уже во второй раз стал наш соотечественник, академик Я. Г. Синай (первый — М. Л. Громов).

26 марта в Осло президент Норвежской академии наук объявил имя лауреата премии Абеля за 2014 г. Им стал выдающийся учёный, представляющий Россию и США, Яков Григорьевич Синай «за фундаментальный вклад в изучение динамических систем, эргодическую теорию и математическую физику». Торжественное вручение премии состоялось 20 мая.

Ученик Колмогорова

Я. Г. Синай родился в Москве 21 сентября 1935 г. в семье микробиологов. В 1957 г. окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, там же защитил кандидатскую (1960), а вскоре и докторскую (1963) диссертации. С 1971 г. сотрудничает с Институтом теоретической физики им. Л. Д. Ландау, оставаясь на своей должности и теперь, хотя с 1993 г. является профессором математики Принстонского университета (США, штат Нью-Джерси). В 1991 г. избран действительным членом РАН.

Я. Г. Синай и В. И. Арнольд, 1963, МГУ (фото Ю. К. Мозера)

Яков Григорьевич — один из самых знаменитых учеников Андрея Николаевича Колмогорова, ученика Николая Николаевича Лузина, который был основателем московской математической школы, разросшейся подобно могучему раскидистому древу. Колмогоров по праву считается одним из самых выдающихся не только математиков, но и учёных XX века. Он вырастил свою громадную школу, в которой кроме Синая прославились многие академики и профессора (назовём лишь одного из них — Владимира Игоревича Арнольда). Создал свою совершенно замечательную школу и Яков Григорьевич, а многие его последователи — свои, став профессорами в разных университетах (один, но очень наглядный пример — филдсовский лауреат Григорий Александрович Маргулис). Синай — выдающийся педагог. Он сохраняет присущий русской математической школе принцип дарения, идущий от его учителя Колмогорова: наставник щедро дарит свои идеи ученикам. В ситуации, когда западные учёные обычно публикуют совместные статьи со своими учениками, и это справедливо (постановка задачи и идея решения часто бывает решающим вкладом), русская традиция состоит в том, чтобы эту постановку и начальный импульс ученику дарить. И Синай, без преувеличения, — очень щедрый даритель.

В последнее время Яков Григорьевич в основном воспитывает учеников в Принстонском университете. Математический факультет Принстона — один из величайших математических факультетов мира, где работает много филдсовских лауреатов. И Синай в этой математической гвардии занимает почётное место. Но каждую весну и лето Синай возвращается в Россию, и тогда интенсивно работает его Московский летний семинар, имеющий уже многолетнюю историю.

Как известно, Колмогоров внёс фундаментальный вклад в самые разные области математики. Особенно знамениты его труды по теории вероятностей и динамическим системам. На стыке этих двух областей с математической физикой и работает всю жизнь Яков Григорьевич.

Детерминизм и вероятность

Теория вероятностей изучает случайные события. Например, вы подбрасываете монетку, и случайно выпадают орёл или решка. Один из главных результатов теории вероятностей — закон больших чисел, доказанный Колмогоровым. Он состоит в том, что в среднем число выпаданий орла или решки при большом числе испытаний будет одинаковым. Но последняя фраза ещё далека от строгой математической формулировки. Одно из главных достижений Колмогорова состояло в том, что этому наивному утверждению он придал точный математический смысл, а затем доказал то, что получилось.

Теория дифференциальных уравнений, или динамических систем, на первый взгляд занимается противоположными задачами. Она исследует так называемые детерминированные, вполне предсказуемые процессы. Исаак Ньютон был первым, кто понял, что дифференциальные уравнения описывают большинство процессов, происходящих в природе с течением времени — например полёт планет. С помощью созданной им теории таких уравнений Ньютон описал вращение планет вокруг Солнца и, в частности, доказал открытые ранее на опыте законы Кеплера, включая и то, что все планеты движутся вокруг Солнца по плоским орбитам, имеющим форму эллипса.

В конце XVIII века математики начали понимать, что дифференциальные уравнения часто обладают так называемым свойством единственности решений. Если мы знаем в какой-то момент времени состояние процесса (например, положение планеты и её скорость), мы можем предсказать в бесконечное время в будущем, а также реконструировать на бесконечное время в прошлом судьбу этой планеты, её полёт, траекторию.

Более того, Пьер Лаплас понял, что этот же принцип детерминизма относится не только к движению планет, но и к движению микроскопических объектов вроде молекул. Свойство единственности решений дифференциальных уравнений универсально. И в своём трактате о теории вероятностей Лаплас написал: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех её составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел Вселенной наравне с движениями легчайших атомов; не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы пред его взором».

Это гораздо больше, чем математический результат. Это философия, которая осмысливает развитие всей Вселенной вокруг нас, — лапласовский детерминизм. Философия, несмотря на патетику Лапласа, довольно унылая. Она состоит в том, что мы живём в мире, в котором всё предсказано. Если бы некий великий ум знал начальные скорости и положения всех молекул и всех остальных тел во Вселенной, он бы спокойно предсказал прошлое и восстановил будущее.

Но такого великого ума не существует. А главное — последующее развитие науки эту философию опровергло. В XIX столетии казалось, что нет более противоположных ветвей математики, чем дифференциальные уравнения и теория вероятностей. Но развитие математики в XX веке показало, что это две тесно переплетённые области. И в понимание этих связей, которые изучает так называемая эргодическая теория, Синай внёс решающий вклад.

Но сначала вспомним о некоторых юношеских работах Синая.

Ранние работы: энтропия

Ричард Фейнман писал, что многообразие законов природы не является удручающе необозримым. Происходит это оттого, что разные процессы описываются одними и теми же математическими формулами. То же самое можно сказать и о дифференциальных уравнениях. Их разнообразие кажется совершенно бесконечным, но только на первый взгляд — существует подход, который позволяет многие дифференциальные уравнения считать одинаковыми. Грубо говоря, такие уравнения получаются друг из друга заменой координат, и потому, несмотря на внешние различия, имеют глубокое внутреннее сходство и почти тождество. Возникает вопрос: как узнать, одинаковы ли два дифференциальных уравнения? Чтобы ответить на этот вопрос, математики изучают так называемые инварианты. Это некие характеристики дифференциальных уравнений, которые не меняются, когда мы делаем замены координат. Если мы увидели два дифференциальных уравнения, непохожих на вид, и инвариант, который мы открыли, вычислен для них и принимает разные значения, значит, никакие замены координат превратить одно уравнение в другое не могут.

Кроме дифференциальных уравнений есть ещё отображения. Если функция сопоставляет одним числам другие, то отображение сопоставляет одним точкам другие. Например, в школе изучают отображения плоскости — повороты, переносы, растяжения, но можно изучать гораздо более сложные отображения плоскости, например, взять прямую комплексных чисел: $z = x + iy$ и рассматривать отображения $p(z) = z^2$ или $p(z) = z^2 + c$. Динамические системы изучают не только дифференциальные уравнения, но и итерации (последовательное применение) отображений. Написать итерационный квадрат отображения p — всё равно что взять отображение p и применить его не к z, а к образу точки z под действием отображения p: $P^2(z) = P(P(z))$. Хорошее упражнение — написать, какой многочлен и какой степени при этом получится. В теории динамических систем рассматривается отображение p, применённое k раз, и исследуется, что происходит с точкой: $p^k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, когда k стремится к бесконечности.

В теории отображений очень популярен так называемый сдвиг Бернулли, который можно понимать как математическую формализацию истории бросания монеты. Мы бросаем монету и записываем выпадания орлов и решек. Теперь представьте себе, что мы кидаем не монету, а, скажем, шестигранную кость. И она выпадает на одну из шести граней. Мы записываем историю этих бросаний. Глядя на получившиеся последовательности, легко придумать отображение (так называемое отображение сдвига на одну позицию), которое я не буду описывать подробно; оно называется сдвигом Бернулли.

Долго стоял вопрос о том, разные это или одинаковые динамические системы: сдвиги Бернулли в последовательности из двух и из шести символов. Колмогоров придумал инвариант, который называется «энтропия» и который позволил доказать, что эти две динамические системы — разные. Другими словами, сдвиг Бернулли для последовательности из двух и из шести символов (у Колмогорова было три символа вместо шести) — разные, неэквивалентные динамические системы.

Юный Яков Синай, будучи аспирантом Колмогорова, принял активное участие в разработке теории нового инварианта, и этот инвариант вошёл в теорию динамических систем, буквально пронизав её насквозь, под названием «энтропия Колмогорова — Синая».

«Капля Минлоса — Синая»

В начале 1960-х годов Р. А. Минлос и Я. Г. Синай создали математическую модель конденсации паров газа с образованием больших капель жидкости (от испарений — к дождю). Модель исходит из дифференциальных уравнений, описывающих движение молекул, т. е. стартует с микроскопического уровня, но выводы должна делать макроскопические. Она должна описать появление капель, хорошо заметных наблюдателю без помощи каких-либо приборов. Одно из ключевых соображений объясняло, почему микроскопические капельки, слившись вместе, не рассыпаются снова на микроскопические капли: им мешает поверхностное натяжение. В фольклоре этот цикл работ называется «капля Минлоса — Синая».

Эргодическая теория

Следующий важный цикл работ Синая относится к эргодической теории. Здесь опять стоит сделать шаг назад и рассказать, откуда эта теория появилась.

С точки зрения Лапласа, движение молекул окружающего нас воздуха описывается дифференциальными уравнениями. Сидя в комнате, мы дышим воздухом, поведение которого представляет собой решение дифференциального уравнения в пространстве с очень-очень большим количеством координат. Вопрос: почему мы дышим однородным воздухом? Почему давление в правом верхнем углу комнаты и в противоположном, левом нижнем, одно и то же? Ведь молекулы в одном углу совсем не знают, что делается в другом. Почему же они ведут себя одинаково?

Австрийский физик Людвиг Больцман в конце XIX века попытался осмыслить этот вопрос и придумал так называемую эргодическую теорию. Он предположил, что решения очень сложных дифференциальных уравнений ведут себя вероятностным образом. На геометрическом языке это предположение выглядит так. Решение дифференциального уравнения — описание движения точки в пространстве. Это пространство, называемое фазовым, может иметь очень много координат (очень большую размерность). Больцман предположил, что если мы подождём достаточно долгое время, то решение сложного дифференциального уравнения успеет побывать во всех областях фазового пространства. Так, вся совокупность молекул в комнате изображается одной точкой в фазовом пространстве колоссальной размерности. Эта точка побывает во всех частях фазового пространства и каждую из них будет навещать с частотой, пропорциональной её размеру. Можно представить себе следующую иллюстрацию: имеется объём в пространстве (условно говоря, комната), и там очень-очень быстро движется одна точка, которая, конечно, в каждый момент времени занимает какое-то определённое положение. Но по прошествии достаточно долгого времени она успеет побывать в каждом кубическом дециметре комнаты. А если мы дадим ей ещё больше времени, она успеет побывать в каждом кубическом сантиметре. Если ещё дольше ждать — в каждом кубическом миллиметре. И так далее...

Эргодическая теория точно формализует, что значит это утверждение, которое выше введено на интуитивном уровне, и превращает его в теорему. Впрочем, Больцман сформулировал только концепции и гипотезы, но ни одной теоремы в эргодической теории не доказал. Можно сказать, что он был своего рода провидцем.

Формализацию эргодической теории произвели в 1930-е годы Джордж Дэвид Биркгоф и Джон фон Нейман, которые впервые сформулировали аккуратные теоремы и доказали их при определённых условиях. Оказалось, они справедливы не для всякой динамической системы, а лишь для такой, которая сохраняет так называемый фазовый объём. Можно уподобить движение точек, описываемое дифференциальным уравнением, движению молекул в потоке газа или движению частиц воды в гидродинамической струе. Так вот, газ сжимаем, а вода — нет. Динамические системы, сохраняющие объём, похожи на течение воды, а не на течение газа. Именно для таких динамических систем Биркгоф и фон Нейман доказали эргодическую теорему.

Эта теорема перебрасывает мост между теорией вероятностей и динамическими системами. Рассмотрим мысленный эксперимент из теории вероятностей: на стол, на котором стоят большие и маленькие тарелки, случайным образом бросают монеты. Теория вероятностей утверждает, что после большого числа бросаний число монет на каждой тарелке будет пропорционально её площади. А вот что говорит теория динамических систем: точка, движущаяся под действием эргодического дифференциального уравнения, посещает каждый участок фазового пространства с такой же частотой, с какой туда попадала бы случайно брошенная монетка.

На динамическую систему для того, чтобы она обладала свойством эргодичности, нужно налагать весьма трудно проверяемые условия. Вовсе не все динамические системы обладают эргодическим поведением, т. е. способностью побывать в любом уголке фазового пространства. Вопрос: правда ли, что системы газовой динамики таким свойством обладают?

Этой проблемой занялся молодой Яков Синай. Одновременно над теорией динамических систем работало славное поколение учёных — Аносов и Арнольд в России, Смейл в США. Смейл приезжал в Россию и оказал очень сильное влияние на наших учёных (и сам писал о том, какое сильное влияние они оказали на него). В частности, одна из задач, поставленных Смейлом, состояла в том, чтобы доказать (что бы это ни означало) структурную устойчивость геодезического потока[1] на многообразии отри-

[1] Геодезическая линия на поверхности — кратчайшая линия между двумя точками. Знакомая всем геодезия занимается измерением расстояний на земле и может считаться «отдалённым предком» геодезических потоков.

цательной кривизны. Обдумывая эту задачу, Дмитрий Викторович Аносов создал теорию так называемых гиперболических динамических систем. Геодезический поток, о котором шла речь, — один из важных, но далеко не единственный пример гиперболической системы.

Синай был первым, кто применил методы гиперболической теории к гипотезе Больцмана и к задачам газовой динамики. Он настолько сильно продвинул доказательство эргодической гипотезы Больцмана, что она называется теперь эргодической гипотезой Больцмана — Синая (над ней сейчас работают его последователи, и эта задача, решённая не до конца, исследована сейчас очень глубоко).

Меры Синая — Рюэля — Боуэна

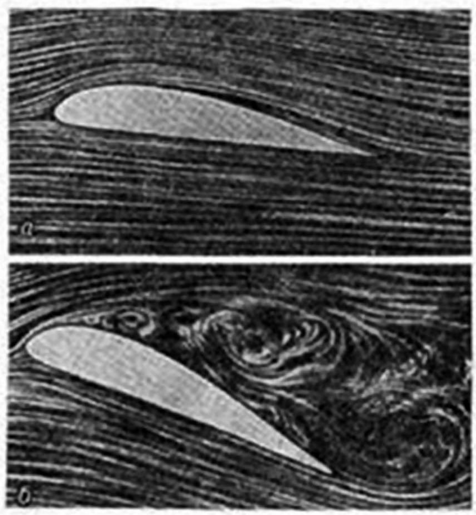
Не все динамические системы похожи на поток воды и сохраняют фазовый объём. Многие из них похожи на бушевание ветра, несущего облака пыли, или на движение распылённого вещества во Вселенной. Это распылённое вещество может с течением времени собираться в скопления, группироваться и образовывать фигуры гораздо меньшего размера, чем то пространство, в котором начиналось движение. Первоначально равномерно распылённое во Вселенной вещество может порождать весьма плотные скопления, и есть смысл говорить о массе разных частей этих скоплений.

Эта картина иллюстрирует то, что математики называют предельной инвариантной мерой для динамической системы. Одна из самых знаменитых и тоже интенсивно изучаемых мер — так называемая мера Синая — Рюэля — Боуэна. Яков Григорьевич был одним из трёх создателей этой концепции, и она тоже оказалась центральной для теории динамических систем.

Общая вера современных математиков состоит в том, что большинство динамических систем демонстрируют одновременно детерминистское и вероятностное поведение. Детерминистское поведение управляет выходом всех частиц на то множество, на то скопление материи, на котором сосредоточена мера Синая — Рюэля — Боуэна. Это скопление называется аттрактором. Теория вероятностей, в свою очередь, управляет движением уже по этому скоплению материи — по аттрактору.

Проблема турбулентности

Когда мы слышим спокойный голос бортпроводника: «Наш самолёт вошёл в зону турбулентности, пристегните ремни», это значит, что самолёт вошёл в зону воздушных вихрей, которые клубятся, сталкиваются и мешают полёту. Примерно так же выглядит турбулентное течение



Возникновение турбулентности. Разрез крыла дан светлым силуэтом. Вверху показано спокойное, так называемое ламинарное, обтекание крыла относительно медленным потоком воздуха. Внизу изображён завихренный, бурный, турбулентный поток, возникающий при быстром обтекании. Зона турбулентности — за крылом

жидкости. В последнее время Яков Григорьевич приложил много усилий к занятиям математической гидродинамикой.

Течение жидкости описывается так называемым уравнением Навье — Стокса, дифференциальным уравнением с частными производными. Его исследование Институт Клэя назвал одной из семи ведущих проблем XXI века, и она входит в число так называемых millennium prize problems, за решение которых объявлена миллионная премия. Проблема состоит в следующем: начать с довольно компактных уравнений Навье — Стокса и с их помощью объяснить совершенно загадочное явление турбулентности, которое тоже в каком-то смысле противоречит детерминистской философии Лапласа. Представим себе следующий эксперимент: возьмём жидкость в сосуде и будем её медленно разгонять. Например, сосуд может быть зазором между двумя цилиндрами, в котором залита жидкость. Один цилиндр неподвижен, а другой начинает постепенно раскручиваться, разгоняясь до очень большой скорости. Этот процесс можно описать дифференциальным уравнением, но только в бесконечномерном пространстве. В соответствии с теорией существования и единственности при двух экспериментах, производимых в тождественном режиме, моделируется одно и то же решение дифференциального уравнения, поэтому картина должна наблюдаться

Чествование Синая в Принстоне: справа от Я.Г. его ученик Алекс Конторович и коллега по Принстону Джон Нэш.

одна и та же. Между тем сначала действительно эта гипотеза подтверждается (т. е. при двух экспериментах развитие течения примерно одно и то же: есть аккуратные струи, которые легко проследить и описать), но затем появляются мелкие вихри, начинается хаос, и две картины течения при двух практически тождественных экспериментах оказываются абсолютно различными между собой.

Турбулентным может быть течение не только жидкости, но и газа. На рисунке (с. 49) показано возникновение турбулентности при обтекании крыла потоком воздуха. Как объяснить это явление? Гипотеза, сформулированная академиком Арнольдом, состояла в том, что уравнение Навье — Стокса — бесконечномерная гиперболическая система (как видите, всё связано в теории динамических систем). Эта гипотеза до сих пор не доказана. Один из ключевых вопросов относится к уравнению, описывающему движение идеальной жидкости (без вязкости). Такой упрощённый вариант уравнения Навье — Стокса называется уравнением Эйлера. Вопрос состоит в следующем: верно ли, что решения уравнения Эйлера в определённом смысле уходят на бесконечность за конечное время?

Яков Григорьевич ответил на близкий вопрос. Если продолжить решение уравнения Эйлера в комплексную область, то там у них возникают особенности. Это результат последнего времени, и он тоже имеет не только математическую, но и физическую и философскую интерпретацию. Надо подчеркнуть, что Яков Григорьевич всю жизнь работает в тесном контакте с физиками.

Гражданская позиция

В заключение — несколько слов о гражданском мужестве Якова Григорьевича Синая. В конце 1960-х годов математик Есенин-Вольпин (сын поэта) был отправлен в сумасшедший дом за диссидентство (оппозиционную политическую активность). 99 математиков подписали письмо в его защиту. Все они попали в «чёрный список», и карьеры многих из них были «заморожены». Среди них был и Яков Григорьевич.

В 1990-е годы Синай был одним из создателей Независимого московского университета, который он впоследствии очень сильно поддерживал.

Независимый университет стал одним из центров кристаллизации математической жизни Москвы. И в этом — большая заслуга Я. Г. Синая, одного из двенадцати отцов-основателей НМУ.

Ю. С. Ильяшенко, НИУ Высшая школа экономики, Корнельский университет (США), мехмат МГУ, НМУ, МИ им. В. А. Стеклова РАН
yulijs@gmail.com