Первые филдсовские лауреаты и советская математика 30-х годов. I

В. М. Тихомиров В. В. Успенский

Первые лауреаты филдсовской медали были названы на конгрессе в Осло в 1936 году. В состав филдсовского комитета, который принимал решение об этом присуждении, вошли крупнейшие математики того времени: итальянец Ф. Севери (председатель), американец Дж. Биркгоф, француз Э. Картан, японец Т. Такаги, К. Каратеодори (немецкий математик греческого происхождения).

Золотые медали и денежный приз (1500 долларов) были вручены двум математикам: Дж. Дугласу из Массачусетского технологического института (MIT) и Л. Альфорсу из Хельсинского университета.

Джесс Дуглас (1897 – 1965) — американский математик, работавший в Нью-Йорке и MIT. Результатов, сопоставимых с тем, за который он получил свою медаль, в его биографии больше не было. Дуглас не приехал на конгресс, сославшись на трудности длительного путешествия. Медаль была вручена Норберту Винеру, работавшему в MIT.

Ларс Альфорс (1907 – 1996) — финский математик. Он прожил большую жизнь, работал в Швейцарии, а с 1946 года — в США. В 1986 году, в год пятидесятилетия премии, Альфорс был избран почётным президентом конгресса в Беркли. Он выступил на конгрессе с воспоминаниями о первом присуждении.

Оба лауреата были представителями анализа. Дуглас получил премию за решение задачи Плато. Задача Плато состоит в доказательстве существования поверхности минимальной площади с заданной границей. Впервые она была поставлена Лагранжем в 1760 году. Бельгийский физик Плато показал (в 1849 г.), что минимальные поверхности могут быть получены в виде мыльных пленок, натянутых на проволочный каркас. Вопрос о существовании для любой жордановой кривой Γ, расположенной в n-мерном (в частности, в трёхмерном) пространстве, поверхности минимальной площади с границей Γ, стали называть задачей Плато. Задача Плато была почти одновременно решена двумя математиками: Д. Дугласом и Т. Радо. Решение Дугласа было сочтено достойным премии Филдса.

О теореме Дугласа – Радо и о многомерных обобщениях задачи Плато можно прочесть в [10, § 47, 48].

Альфорс был удостоен медали за развитие теории римановых поверхностей и разработку теории квазиконформных отображений. С тех пор в течение полувека Альфорс был одним из лидеров в комплексном анализе.

Ну а что же советские математики?

Трудно оспорить, что в 1936 г. советская математическая школа была самой выдающейся во всём мире. Нацисты разгромили немецкую школу, французская переживала период смены поколений, математическая школа США только набирала обороты. В нашей стране в тридцатые годы достигло расцвета творчество таких учёных (не старше 40 лет!), как П. С. Александров, А. О. Гельфонд, А. Н. Колмогоров, М. Г. Крейн, М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Д. Е. Меньшов, П. С. Новиков, Л. С. Понтрягин, С. Л. Соболев, А. Я. Хинчин, Л. Г. Шнирельман — список можно продолжить. Ни в одной другой математической школе того времени не было такого соцветия выдающихся математиков!

Но железный занавес уже опустился. Контакты между нашей страной и остальным миром были прерваны. На конгресс в Осло были приглашены Гельфонд и Хинчин, но они не смогли поехать. Вообще, заграничные командировки закончились в 1931 году. Этим в значительной мере и объясняется то, что среди лауреатов 1936 года не было советских математиков.

А. Н. Колмогоров рассказывал, что когда однажды в середине 30-х годов известного американского математика С. Лефшеца спросили, кого из современных молодых математиков во всём мире он считает наиболее выдающимися, он назвал четыре имени: А. О. Гельфонд, А. Н. Колмогоров, Л. С. Понтрягин и Л. Г. Шнирельман.

Первое присуждение филдсовской медали было проведено по двум разным признакам: за решение проблемы (Дуглас) и создание теории (Альфорс). В творчестве четырёх названных советских математиков (и большинства других, перечисленных выше) были и решение замечательных проблем, и создание теорий, и разработка новых методов. В кратком очерке невозможно дать сколько-нибудь полное представление об их достижениях. Мы приведем по одному из наиболее эффектных результатов А. Н. Колмогорова и Л. С. Понтрягина. О результатах А. О. Гельфонда и Л. Г. Шнирельмана мы собираемся рассказать в другой статье.

Мы не следуем оригинальным доказательствам, а используем методические усовершенствования, накопленные за минувшие годы. Но основные идеи доказательств восходят к авторским работам.

Пример Колмогорова всюду расходящегося ряда Фурье

Андрей Николаевич Колмогоров (1903 – 1987) — один из величайших учёных двадцатого века, для которого была характерна необычайная широта творческих интересов. Вот неполный список тех областей математики, где он оставил непреходящий след: теория ортогональных рядов, дескриптивная теория множеств, математическая логика, классическая теория вероятностей, геометрия, случайные процессы, математическая статистика, функциональный анализ, теория приближений, топология, дифференциальные уравнения, теория стрельбы, турбулентность, теория алгоритмов, динамические системы, классическая механика, метрическая теория функций, теория информации, алгоритмическая теория вероятностей. Существенную компоненту в его исследованиях составляют работы в области смежных наук: в физике, биологии, геологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии, стиховедении и т. п. О личности Колмогорова и о его творчестве см. [9, 4, 11].

Поступив в 1920 г. в Московский университет, А. Н. Колмогоров становится учеником Н. Н. Лузина. В годы аспирантуры он получает выдающиеся результаты в теории функций, теории множеств и математической логике (в том числе и тот знаменитый результат, о котором мы расскажем ниже — пример расходящегося ряда Фурье), начинает свои исследования в теории вероятностей. В начале 30-х годов он создаёт теорию марковских процессов, завершая усилия Эйнштейна, Планка, Смолуховского и Винера, а затем создаёт аксиоматику теории вероятностей, ставшую частью образования любого математика. Эти выдающиеся достижения были получены А. Н. Колмогоровым до 1935 года, когда рассматривались первые присуждения филдсовских медалей.

В 1921 году восемнадцатилетний студент второго курса физико-математического факультета Московского университета Андрей Колмогоров построил пример *интегрируемой функции, ряд Фурье которой расходится почти всюду.* Это одно из самых замечательных достижений в теории тригонометрических рядов, которой посвятили свои исследования многие крупнейшие математики, начиная с Эйлера и Фурье. После примера Колмогорова сорок с лишним лет оставалось неизвестным, существует ли *непрерывная* функция с тем же свойством. Лишь в 1966 году Карлесон показал, что пример Колмогорова нельзя усилить: для всякой функции с интегрируемым квадратом ряд Фурье сходится почти всюду к самой функции (в виде гипотезы это сформулировал Н. Н. Лузин в 1915 году). «Почти всюду» означает *всюду, за исключением множества меры нуль.*

Множество на отрезке имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть последовательностью интервалов с суммой длин $< \varepsilon$.

Впоследствии Колмогоров построил пример ряда, расходящегося всюду (оба результата содержатся в книге [4, статьи 1 и 11]). Мы построим далее именно такой пример.

Функция будет строиться на отрезке $[-\pi; \pi]$. Каждой интегрируемой функции f на $[-\pi; \pi]$ сопоставляется её *ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Сумма $a_0/2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ называется *n-той суммой Фурье* и обозначается $S_n(x, f)$. Если $f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — тригонометрический многочлен, то a_k и b_k — это коэффициенты Фурье функции f, так что $S_m(x, f) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ при $m < N$ и $S_m(x, f) = f$ при $m \geqslant N$. Ряд Фурье дифференцируемой функции сходится к ней самой, ряд Фурье непрерывной функции может расходиться на бесконечном множестве точек (которое, однако, имеет меру нуль).

Понятие *интегрируемой* по Лебегу функции нам не понадобится в полном объеме, нам будет достаточно следующего свойства: если последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных неотрицательных функций на отрезке такова, что $\sum_{n=1}^{\infty}\int p_n < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)$ сходится почти всюду к интегрируемой функции f, при этом коэффициенты Фурье этой функции являются пределами коэффициентов Фурье частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$. Это следует из теоремы Леви и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости [5].

Сформулируем ещё раз результат Колмогорова, который мы будем доказывать:

Существует интегрируемая функция, ряд Фурье которой расходится в каждой точке.

Наше построение складывается из нескольких шагов.

Предложение 1. *Для любого положительного числа a найдётся тригонометрический многочлен p_a, такой, что $|p_a(x)| \leqslant 1$ для всех x и при этом*

$$\max_n S_n(0, p_a) > a.$$

Это предложение было известно задолго до 1921 года.

Доказательство. Для $S_n(0, f)$ существует явное выражение

$$S_n(0,f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(x) dx, \quad D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2}.$$

(Функцию D_n называют *ядром Дирихле* в честь знаменитого немецкого математика французского происхождения, внесшего большой вклад в теорию рядов Фурье; Дирихле, в частности, доказал сходимость ряда Фурье при ослабленных требованиях гладкости.) Мы имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx \to \infty. \tag{1}$$

Формула (1) следует из выкладки:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} |D_n(x)| dx \overset{\sin x/2 \leqslant x/2}{\geqslant}$$
$$\geqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{x} dx \overset{t=(n+1/2)x}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt.$$

Последний интеграл оценивается суммой $C(1+1/2+1/3+\dots+1/n)$, откуда и следует (1). Фиксируем n, для которого $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx > a$. Рассмотрим разрывную функцию $s(x) = \operatorname{sgn} D_n(x)$, где $\operatorname{sgn} x = x/|x|$. Её можно приблизить непрерывной кусочно-линейной функцией f так, чтобы $|f(x)| < 1$ при всех x и чтобы интегралы

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(x)\, dx \text{ и } \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x) s(x)\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx$$

были сколь угодно близки. Поэтому первый интеграл тоже будет $> a$. По теореме Вейерштрасса всякую непрерывную функцию на отрезке $[-\pi; \pi]$, принимающую равные значения на концах, можно равномерно приблизить тригонометрическими многочленами. Применяя это к f, находим тригонометрический многочлен p, для которого $|p(x)| \leqslant 1$ при всех x и $S_n(0,p) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x) p(x) dx > a$.

Следующий шаг является основным.

Предложение 2. *Для любого положительного числа a найдётся неотрицательный тригонометрический многочлен q_a со свободным членом 1, такой, что*

$$\max_n |S_n(x, q_a)| > a$$

для любого x.

Прежде чем доказывать это предложение, объясним, как вывести из него основной результат.

Положим $k_j(x) = q_{j^3}(x)$, $j \in \mathbb{N}$. Это неотрицательный тригонометрический многочлен со свободным членом 1, такой, что $\max_n |S_n(x, k_j)| > j^3$ для любого x. Пусть степень этого многочлена равна N_j. Назовем *носителем* тригонометрического многочлена p любое множество S натуральных чисел, такое, что коэффициенты Фурье a_n и b_n многочлена p равны нулю при всяком $n \notin S$, $n > 0$ (свободный член не учитывается). Выберем константу $m_2 > N_1$. Тогда многочлены $k_1(x)$ и $k_2(m_2x)$ имеют непересекающиеся носители $[1, N_1]$ и $[m_2, m_2N_2]$. Подберем $m_3 > m_2N_2$ и рассмотрим многочлен $k_3(m_3x)$. Тогда три многочлена $k_1(x), k_2(m_2x)$ и $k_3(m_3x)$ имеют непересекающиеся носители. Далее будем поступать аналогично и построим семейство многочленов $k_j(m_jx)$, $j \in \mathbb{N}$ с непересекающимися носителями. Положим $m_1 = 1$ и, наконец, пусть

$$K(x) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j(m_jx)/j^2.$$

Это и есть искомая функция.

Надо только проверить, что она интегрируема, понять, каков у неё ряд Фурье, и доказать, наконец, что он расходится в каждой точке.

Свободный член тригонометрического многочлена равен делённому на 2π интегралу по отрезку $[-\pi;\pi]$. Таким образом, $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} k_j(m_jx)\,dx = 1$, так что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} k_j(m_jx)/j^2\,dx$ сходится (его сумма равна $2\pi\sum\limits_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^3/3$). Следовательно, функция K интегрируема. Ее ряд Фурье выглядит следующим образом: сперва идёт свободный член $\pi^2/6$, затем ненулевые члены тригонометрических многочленов $k_1(m_1x), k_2(m_2x)/4, \ldots$. Расходимость этого ряда в каждой точке вытекает из более сильного утверждения: $\sup_n |S_n(x, K)| = \infty$ при любом x. Зафиксируем x и покажем, что некоторая сумма $S_n(x, K)$ ряда Фурье функции K по модулю больше, например, четырёх. Найдётся такой номер l, при котором

$|S_l(m_9x, k_9/9^2)| > 9$ (предложение 2). Сумма членов ряда Фурье функции K с номерами от m_9 до m_9l в точке x совпадает с $S_l(m_9x, k_9/9^2) - 1/9^2$ и, следовательно, по модулю больше восьми. Таким образом, разность двух чисел вида $S_n(x, K)$ по модулю больше восьми, так что одно из этих чисел по модулю должно быть больше четырёх.

Пример построен, и остается только доказать предложение 2. Идею доказательства мы узнали от С. В. Конягина, который указал нам на работу Ш. В. Хеладзе [12]; мы выражаем ему благодарность за это и за ценные обсуждения.

В силу предложения 1 существует тригонометрический многочлен $p = p_{8a}$, который в каждой точке по модулю не превосходит единицы, а в нуле какая-то из его сумм Фурье больше $8a$. В силу непрерывности найдётся число $\delta > 0$ такое, что $\max\limits_n |S_n(x, p)| > 8a$ при всех $x \in (-\delta; \delta)$. Пусть l — степень многочлена p и $N > 2l$. Положим $t_1(x, N) = p(x)\cos Nx$ и $t_2(x, N) = p(x)\cos 2Nx$. Ясно, что t_1 и t_2 являются тригонометрическими многочленами без свободного члена и что они всюду не превосходят единицу по модулю. Носитель t_1 содержится в интервале $[N - l, N + l]$, а носитель t_2 — в интервале $[2N - l, 2N + l]$. Это следует из формул $\cos x \cos y = (\cos(x+y)+\cos(x-y))/2$ и $\sin x \cos y = (\sin(x+y)+\sin(x-y))/2$.

Покажем, что для всякого $x \in (-\delta, \delta)$ выполняется по меньшей мере одно из неравенств: $\max\limits_{m,n} |S_m(x, t_1) - S_n(x, t_1)| > 4a$ или $\max\limits_{m,n} |S_m(x, t_2) - S_n(x, t_2)| > 4a$. Пусть задано $x \in (-\delta; \delta)$. Найдётся $n \leqslant l$, для которого $|S_n(x, p)| > 8a$. Заметим, что для любого y одно из чисел $\cos y$ и $\cos 2y$ по модулю $\geqslant 1/2$ (это следует из формулы $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$). Таким образом, выполняется одно из неравенств: $|\cos Nx| \geqslant 1/2$ или $|\cos 2Nx| \geqslant 1/2$. Предположим, например, что имеет место первое из них. Сумма $S_{N+n}(x, t_1) - S_{N-n-1}(x, t_1)$ членов многочлена t_1 с номерами от $N - n$ до $N + n$ в точке x совпадает с $S_n(x, p)\cos Nx$ и потому по модулю $> 8a/2 = 4a$. Аналогично разбирается случай $|\cos 2Nx| \geqslant 1/2$.

Выберем точки $c_1, \ldots, c_s$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ так, чтобы δ-окрестности этих точек покрывали весь отрезок. Положим $r_i(x, N) = t_1(x - c_i, N)$ и $r_i'(x, N) = t_2(x - c_i, N)$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда r_i и r_i' — тригонометрические многочлены с носителями $[N - l, N + l]$ и $[2N - l, 2N + l]$ соответственно. Для каждого $x \in [-\pi; \pi]$ найдётся такое i, $1 \leqslant i \leqslant s$, что одно из чисел $\max\limits_{m,n} |S_m(x, r_i) - S_n(x, r_i)|$ и $\max\limits_{m,n} |S_m(x, r_i') - S_n(x, r_i')|$ превосходит $4a$. Это вытекает из предыдущего абзаца и того, что $S_n(x, r_i) = S_n(x - c_i, t_1)$, $S_n(x, r_i') = S_n(x - c_i, t_2)$.

Пусть

$$q(x) = \prod_{i=1}^{s}(1 + (r_i(x, N_i) + r_i'(x, N_i))/2),$$

где о натуральных числах $N_1, \ldots, N_s$ нам ещё предстоит позаботиться. Тогда q — неотрицательный тригонометрический многочлен. Числа $N_1, \ldots, N_s$ выберем шаг за шагом так, чтобы все многочлены $r_i(x, N_i)/2$ и $r_i'(x, N_i)/2$ «содержались бы в q» в том смысле, что коэффициенты Фурье с номерами от $N_i - l$ до $N_i + l$ у многочлена q были бы такими же, как у многочлена $r_i/2$, а коэффициенты с номерами от $2N_i - l$ до $2N_i + l$ — такими же, как у $r_i'/2$. Пусть числа $N_1, \ldots, N_k$ уже выбраны так, что $r_i/2$ и $r_i'/2$, $i = 1, \ldots, k$, содержатся в указанном смысле в произведении $q_k = \prod_{i=1}^{k}(1+(r_i+r_i')/2)$, причем свободный член многочлена q_k равен единице, а его носитель не пересекается с интервалом $[1, 2l]$ (на первом шаге конструкции это условие будет обеспечено, если мы выберем $N_1 > 3l$). Пусть M_k — степень многочлена q_k. Выбираем $N_{k+1} > 2M_k + 2l$. Тогда условия, которые мы накладывали на q_k, остаются в силе и для q_{k+1}. Действительно, $q_{k+1} = q_k(1 + (r_{k+1} + r_{k+1}')/2) = q_k + r_{k+1}/2 + r_{k+1}'/2 + R$, где $R = (q_k - 1)(r_{k+1} + r_{k+1}')/2$. Полиномы $q_k - 1$ и $r_{k+1} + r_{k+1}'$ не имеют свободных членов, носитель первого из них содержится в интервале $I_1 = [2l + 1, M_k]$, носитель второго — в объединении I_2 интервалов $[N_{k+1} - l, N_{k+1} + l]$ и $[2N_{k+1} - l, 2N_{k+1} + l]$, поэтому носитель многочлена R содержится в множестве $I_2 \pm I_1$ всех чисел, представимых в виде $m + n$ или $m - n$, где $m \in I_2$, $n \in I_1$. В силу нашего выбора числа N_{k+1} множество $I_2 \pm I_1$ не пересекается ни с $[1, M_k]$, ни с I_2. Таким образом, многочлены q_k, $r_{k+1}/2$, $r_{k+1}'/2$ и R имеют попарно непересекающиеся носители и потому «содержатся» в своей сумме q_{k+1}. Свободный член многочлена q_{k+1} равен единице. Тем самым конструкция завершена.

Тот факт, что многочлены $r_i/2$ содержатся в q, означает, что каждая сумма $S_m(x, r_i/2) - S_n(x, r_i/2)$ идущих подряд членов многочлена $r_i/2$ совпадает с суммой $S_m(x, q) - S_n(x, q)$ идущих подряд членов многочлена q, и аналогично для r_i'. Мы видели, что для каждой точки x некоторая сумма такого вида превосходит $2a$. Следовательно, $\max_n |S_n(x, q)| > a$, так что q удовлетворяет требованиям предложения 2.

Л. С. Понтрягин и топологическая теорема двойственности

Лев Семёнович Понтрягин (1908 – 1988) внес выдающийся вклад во многие разделы математики: теорию дифференциальных уравнений, теорию оптимального управления, топологическую алгебру, геометрию, теорию групп Ли, но, прежде всего, – в топологию, с которой он начинал. Он, безусловно, принадлежит к числу великих русских математиков и величайших топологов нашего века.

В возрасте 14 лет от взорвавшегося примуса Понтрягин потерял зрение. В 1925 году он поступает в Московский университет и становится учеником П. С. Александрова. В студенческие годы Понтрягин получает выдающийся результат — обобщение закона двойственности Александера. В сборнике «Математика в СССР за 15 лет», изданном в 1932 году, Понтрягин, которому было тогда 24 года, упоминается 23 раза (больше него только М. А. Лаврентьев — 24 раза), и это показатель его выдающегося вклада в нашу науку уже на заре его творческой деятельности.

Мы расскажем здесь о топологической теореме двойственности Понтрягина. Она связана с другой теоремой двойственности Понтрягина — для локально компактных групп, о ней мы тоже упомянем. Обзор творчества Л. С. Понтрягина можно найти в [1]. Мы отсылаем читателя также к обзору самого Понтрягина «О моих работах по топологии и топологической алгебре» (см. [8]).

Известная теорема Жордана утверждает, что *простая замкнутая кривая разбивает плоскость на две области.* Напомним, что простая замкнутая кривая — это множество, гомеоморфное окружности. Теорема Жордана допускает обобщение на случай пространств любой размерности: всякое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное сфере S^{n-1}, имеет дополнение, состоящее из двух компонент. Более того, *если замкнутые подмножества F_1 и F_2 пространства $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны, то их дополнения имеют одинаковое число компонент.* Выделенное курсивом утверждение — это весьма частный случай теоремы двойственности Понтрягина, которая устанавливает связь между топологическими свойствами произвольного замкнутого подмножества евклидова пространства (или многомерной сферы) и его дополнения.

Формулировка теоремы Понтрягина использует понятие *группы гомологий* топологического пространства. Мы не будем давать общего определения, а ограничимся случаем открытых подмножеств евклидовых пространств.

Пусть X — открытое подмножество плоскости. Нульмерная цепь в X (или просто 0-цепь) — это конечное множество точек в X, каждой из которых приписано целое число. Такую цепь будем записывать как формальную сумму точек из X с целыми коэффициентами. Аналогично, 1-цепь или 2-цепь в X — это совокупность ориентированных отрезков (соответственно треугольников), целиком лежащих в X, каждому из которых приписано целое число. Более формально, совокупность 1-цепей — это свободная абелева группа, порождённая множеством всех ориентированных отрезков, лежащих в X, а совокупность 2-цепей — это свободная абелева группа, порождённая множеством всех ориентированных треугольников, лежащих в X. (Напомним, что свободная абелева группа, порождённая множеством Y, — это множество формальных сумм вида $n_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_s y_s$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $y_i \in Y$.)

Граница 1-цепи — это 0-цепь, определяемая так: граница ориентированного отрезка $[a; b]$ (где a и b — точки плоскости) — это формальная разность $b - a$ («конец минус начало»), и граница суммы равна сумме границ. Аналогично, граница ориентированного треугольника abc — это 1-цепь $[a; b] + [b; c] + [c; a]$, а граница произвольной 2-цепи определяется по линейности.

1-цепь с нулевой границей называется *1-циклом*. Примером 1-цикла служит любая замкнутая ломаная, то есть 1-цепь вида $[a_1; a_2] + [a_2; a_3] + \dots + [a_{n-1}; a_n] + [a_n; a_1]$. Нетрудно понять, что 1-циклы — это в точности суммы замкнутых ломаных с целыми коэффициентами.

1-цепь называется *1-границей*, если она является границей некоторой 2-цепи. Так как граница любого ориентированного треугольника является замкнутой ломаной и, следовательно, 1-циклом, то и *всякая 1-граница является 1-циклом.* Эквивалентно, *граница границы равна нулю.* В этом заключается важнейшее свойство введённого выше оператора границы.

Всякий ли 1-цикл является 1-границей? Ответ зависит от рассматриваемого открытого множества X. Например, если X — это вся плоскость или внутренность круга, то ответ положителен. Простейший пример ситуации, когда цикл не является границей, доставляет проколотая плоскость. Пусть p — точка на плоскости, X — дополнение до p. Рассмотрим замкнутую ломаную c в X, обходящую вокруг p. Например, нашей ломаной c может быть граница треугольника, содержащего p в своей внутренности. Тогда c не является 1-границей в X. Геометрически это очевидно. Для формального доказательства заметим, что каждому 1-циклу z в X можно соотнести целое число — число оборотов цикла вокруг точки p. Имея в виду дальнейшие обобщения, мы будем называть это число также *индексом зацепления* 1-цикла z и 0-цикла p. Это число можно определить, например, так. Пусть $z = [a_1; a_2] + \dots + [a_n; a_1]$ — замкнутая ломаная в X. Проведем луч из p, не проходящий через вершины $a_1, \dots, a_n$ ломаной z,

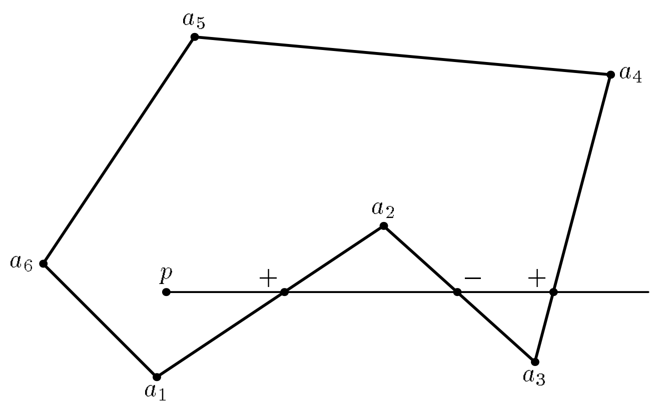

Рис. 1.

и каждой точке пересечения луча с ломаной припишем число ± 1 по следующему правилу: если звено $[a_i; a_{i+1}]$ пересекает луч справа налево, то точке пересечения приписывается плюс 1, в противном случае — минус 1. Число оборотов ломаной z вокруг p определяется как сумма плюс-минус единиц по всем точкам пересечения (см. рис. 1). Легко видеть, что это число корректно определено (оно не меняется при вращении луча) и что наше определение приводит к тому, что мы понимаем под «числом оборотов». Это же определение годится для любого 1-цикла, не обязательно являющегося замкнутой ломаной.

Очевидно, граница любого треугольника в X (то есть треугольника, не содержащего точку p) делает 0 оборотов вокруг p. Это следует из данного выше определения, использующего пересечения с лучами: луч, исходящий из точки вне треугольника и не проходящий через вершины, либо вообще не пересекается с треугольником, либо пересекается ровно с двумя сторонами, причем двум точкам пересечения приписываются противоположные знаки. В силу аддитивности числа оборотов любая 1-граница в X делает 0 оборотов вокруг p. Следовательно, ломаная c, для которой число оборотов вокруг p отлично от нуля, не является 1-границей.

Таким образом, мотивировано следующее определение. Два 1-цикла называются *гомологичными*, если их разность является границей. Группа *1-гомологий* $H_1(X)$ пространства X — это группа классов гомологичных 1-циклов. Иными словами, если Z_1 — это группа 1-циклов, а B_1 — группа 1-границ, то $H_1 = H_1(X)$ — это факторгруппа Z_1/B_1. Наше определение группы $H_1(X)$ не было топологически инвариантным: не сразу видно, почему гомеоморфные открытые множества на плоскости имеют изоморфные группы гомологий. На самом деле можно так видоизменить определение, что топологическая инвариантность групп гомологий станет очевидной: при определении цепей надо рассматривать не вложенные в X отрезки и треугольники, а произвольные непрерывные отображения фиксированного отрезка или треугольника в X. Группы цепей при этом увеличиваются, но можно доказать, что группы гомологий остаются теми же.

Аналогичные определения можно дать для любых размерностей. Пусть X — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Для любого целого k определим группу C_k всех k-цепей пространства X как свободную абелеву группу, порождённую всеми ориентированными k-мерными симплексами, лежащими в X (при $k < 0$ и $k > n$ группа C_k сводится к нулю). Как и раньше, определяются граничный оператор $\partial : C_k \to C_{k-1}$, группы k-циклов Z_k, группы k-границ B_k и группы гомологий $H_k = Z_k/B_k$. Это определение допускает различные модификации. Например, вместо вложенных симплексов можно рассматривать *сингулярные симплексы,* то есть непрерывные отображения фиксированного симплекса в заданное пространство (этот подход приводит к топологически инвариантной теории), непрерывные отображения можно заменить на гладкие, симплексы — на произвольные выпуклые многогранники. Группы цепей при этом меняются, но группы гомологий остаются теми же.

Теперь мы можем сформулировать топологическую теорему двойственности Понтрягина.

Топологическая теорема двойственности Понтрягина (первая формулировка). *Пусть F_1 и F_2 — гомеоморфные замкнутые множества, лежащие в $\mathbb{R}^n$. Тогда их дополнения имеют изоморфные группы гомологий; иными словами, группы $H_k(\mathbb{R}^n \setminus F_1)$ и $H_k(\mathbb{R}^n \setminus F_2)$ изоморфны при любом k.*

Этот результат обобщает теорему американского математика Дж. Александера (1888–1971), доказанную им в 1922 году. Александер вместо произвольных замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$ рассматривал множества, гомеоморфные полиэдрам, а вместо изоморфизма групп у него фигурировало равенство чисел Бетти (это некоторые численные характеристики групп гомологий).

Таким образом, с каждым компактом, расположенным в $\mathbb{R}^n$, можно связать новые топологические инварианты: группы гомологий дополнения. Эти группы изоморфны так называемым *группам когомологий* рассматриваемого компакта. Группы когомологий были введены в рассмотрение в 30-е годы независимо А. Н. Колмогоровым и Дж. Александером.

Эти группы можно определить различными способами, один из них мы обсудим ниже.

Всякая 0-цепь является 0-циклом. Пусть X — открытое множество евклидова пространства. 0-цепь $\sum_{x \in X} n_x x$ является 0-границей тогда и только тогда, когда для всякой связной компоненты V множества X сумма коэффициентов $\sum_{x \in V} n_x$ по всем точкам из V равна нулю. Назовем 0-цепь $\sum_{x \in X} n_x x$ *приведённой*, если $\sum_{x \in X} n_x = 0$. Пусть $\tilde{Z}_0$ — группа приведённых 0-цепей. *Приведённая нульмерная группа гомологий* $\tilde{H}_0(X)$ — это факторгруппа $\tilde{Z}_0/B_0$ группы приведённых 0-циклов по подгруппе 0-границ. Если X имеет n компонент, то $H_0(X)$ — свободная абелева группа с n образующими, а $\tilde{H}_0(X)$ — свободная абелева группа с $n-1$ образующими.

При $k \neq 0$ полагаем $\tilde{H}_k = H_k$.

Дадим вторую формулировку теоремы сначала для «знатоков»; разъяснения для остальных мы дадим позже.

Топологическая теорема двойственности Понтрягина (вторая формулировка). *Пусть F — собственное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}^n \setminus F$ — его дополнение. Для любого целого k приведённая группа гомологий $\tilde{H}_k(G)$ изоморфна группе когомологий с компактными носителями $H_c^{n-k-1}(F)$.*

Применяя эту теорему при $k = 0$, получаем такое следствие: если F — компакт, лежащий в $\mathbb{R}^n$, то число компонент множества $\mathbb{R}^n \setminus F$ на единицу больше ранга свободной абелевой группы $H^{n-1}(F)$. В частности, если F гомеоморфно $(n-1)$-мерной сфере, то группа когомологий $H^{n-1}(F)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел, так что F разбивает $\mathbb{R}^n$ на две области. Отметим также, что компакт F не разбивает $\mathbb{R}^n$ (то есть имеет связное дополнение) тогда и только тогда, когда группа $H^{n-1}(F)$ нулевая. Можно показать, что последнее условие равносильно такому: пространство $(S^{n-1})^F$ всех непрерывных отображений из F в $(n-1)$-мерную сферу S^{n-1}, наделённое естественной метрикой, связно. Таким образом, компакт F разбивает $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда некоторое отображение $f: F \to S^{n-1}$ нельзя соединить с постоянным отображением $g: F \to S^{n-1}$ непрерывным путем в пространстве $(S^{n-1})^F$ (П. С. Александров). Если F разбивает $\mathbb{R}^n$, то в качестве f можно взять центральную проекцию на расположенную в $\mathbb{R}^n$ сферу с центром p, где p — произвольная точка, принадлежащая какой-либо ограниченной компоненте множества $\mathbb{R}^n \setminus F$.

Короткий путь к доказательству топологической теоремы двойственности лежит через алгебраические понятия комплекса и точной последовательности. *Цепной комплекс* — это последовательность абелевых групп

C_k и гомоморфизмов $d_k : C_k \to C_{k-1}$, таких, что $d_{k-1}d_k = 0$ при всех k. Пусть $Z_k = \{x \in C_k : d_k x = 0\}$ — *группа циклов* и $B_k = d_{k+1}(C_{k+1})$ — *группа границ*. Факторгруппа $H_k = Z_k/B_k$ — это *группа гомологий степени* k рассматриваемого комплекса. Например, гомологии топологического пространства — это гомологии некоторого комплекса, связанного с данным пространством. Аналогично определяются коцепные комплексы. Это по существу то же самое, что и цепные комплексы, только нумерация групп меняется на обратную: гомоморфизмы δ_k действуют из C_k в C_{k+1} и удовлетворяют соотношению $\delta_{k+1}\delta_k = 0$. В этом случае говорят о коциклах, кограницах и когомологиях.

Естественным образом определяются понятия подкомплекса и факторкомплекса. Пусть K — цепной комплекс, K' — его подкомплекс, K'' — соответствующий факторкомплекс. Тогда гомологии комплексов K, K' и K'' связаны последовательностью гомоморфизмов

$$\dots \to H_{n+1}(K'') \to H_n(K') \to H_n(K) \to H_n(K'') \to H_{n-1}(K') \to \dots,$$

причем эта последовательность *точна*, то есть ядро каждого гомоморфизма совпадает с образом предыдущего. (В одном учебнике по поводу этого утверждения сказано: «Читатель должен один и только один раз в своей жизни проследить все детали до конца».) В случае коцепных комплексов соответствующая *длинная точная последовательность когомологий* имеет вид

$$\dots \to H^{n-1}(K'') \to H^n(K') \to H^n(K) \to H^n(K'') \to H^{n+1}(K') \to \dots.$$

Пусть теперь X — локально компактное пространство (например, открытое или замкнутое подмножество евклидова пространства). Определим, следуя [6], *группы когомологий с компактными носителями* $H_c^k(X)$ пространства X. Фиксируем $k \geqslant 0$. Пусть $\Phi^k(X)$ — группа всех отображений из X^{k+1} в $\mathbb{Z}$ (без каких-либо условий непрерывности). *Носитель* отображения $\varphi \in \Phi^k(X)$ — это замкнутое множество всех $x \in X$, таких, что для всякой окрестности U точки x найдутся $x_0, \dots, x_k \in U$ с $\varphi(x_0, \dots, x_k) \neq 0$. Пусть $\Phi_c^k(X)$ — группа всех $\varphi \in \Phi^k(X)$ с компактным носителем, $\Phi_0^k(X)$ — группа всех $\varphi \in \Phi^k(X)$ с пустым носителем. Факторгруппа $C_c^k(X) = \Phi_c^k(X)/\Phi_0^k(X)$ называется *группой k-мерных коцепей с компактными носителями*.

Кограничный гомоморфизм $\delta_k : \Phi^k(X) \to \Phi^{k+1}(X)$ определяется формулой

$$(\delta_k\varphi)(x_0, \dots, x_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+1}),$$

где крышка ^ над символом означает, что его следует пропустить. Например, если $\varphi \in \Phi^1(X)$, то $\delta_1\varphi$ определяется формулой $(\delta_1\varphi)(a,b,c) = \varphi(b,c) - \varphi(a,c) + \varphi(a,b)$. Гомоморфизм δ_k не увеличивает носители и потому отображает $\Phi_c^k(X)$ в $\Phi_c^{k+1}(X)$ и $\Phi_0^k(X)$ в $\Phi_0^{k+1}(X)$. При переходе к факторгруппам возникает гомоморфизм групп коцепей $C_c^k(X) \to C_c^{k+1}(X)$, который мы обозначаем по-прежнему через δ_k.

Гомоморфизм $\delta_{k+1}\delta_k$ равен нулю: в формулу для $\delta_{k+1}\delta_k\varphi$ каждое слагаемое вида $\varphi(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{k+2})$ входит два раза с противоположными знаками. Следовательно, группы коцепей $C_c^k(X)$ вместе с кограничными гомоморфизмами δ_k образуют коцепной комплекс $C_c^*(X)$. Группы когомологий этого комплекса и называются группами когомологий с компактными носителями пространства X.

Пусть F — замкнутое подмножество в X, $G = X \setminus F$. Ограничение коцепей определяет эпиморфизм комплексов $C_c^*(X) \to C_c^*(F)$, ядро которого в некотором смысле эквивалентно комплексу $C_c^*(G)$ и, в частности, имеет те же когомологии [6]. Возникающая длинная точная последовательность когомологий имеет вид

$$\dots \to H_c^{n-1}(F) \to H_c^n(G) \to H_c^n(X) \to H_c^n(F) \to H_c^{n+1}(G) \to \dots .$$

С помощью этой последовательности можно вычислить когомологии с компактными носителями евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Оказывается, что группа $H_c^k(\mathbb{R}^n)$ нулевая при $k \neq n$ и изоморфна $\mathbb{Z}$ при $k = n$. Это просто, если $n = 0$, а общий случай выводится отсюда так. Пусть X — замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^n$, F — граничная гиперплоскость. Из того, что одноточечная компактификация пространства X гомеоморфна шару, выводится, что $H_c^k(X) = 0$ при всех k. Точная последовательность когомологий пары (X, F) содержит куски вида

$$0 \to H_c^k(F) \to H_c^{k+1}(X \setminus F) \to 0.$$

Так как F гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1}$, а $X \setminus F$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, мы видим, что $H_c^k(\mathbb{R}^{n-1})$ изоморфно $H_c^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, так что всё сводится к случаю точки.

Пусть теперь F — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}^n \setminus F$ — его дополнение. Точная когомологическая последовательность пары $(\mathbb{R}^n, F)$ содержит куски вида

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) \to H_c^k(F) \to H_c^{k+1}(G) \to H_c^{k+1}(\mathbb{R}^n).$$

При $k \neq n, n-1$ по краям стоят нули, откуда следует изоморфизм $H_c^k(F) \cong H_c^{k+1}(G)$. Но для любого ориентируемого топологического n-мерного многообразия M (в частности, для открытого множества в $\mathbb{R}^n$) группа когомологий $H_c^k(M)$ изоморфна группе гомологий $H_{n-k}(M)$ (*изоморфизм* *двойственности Пуанкаре* [6, теорема 11.2]). Здесь имеются в виду «гомологии с компактными носителями», которые для многообразий совпадают с сингулярными. Таким образом, группы $H_c^{k+1}(G)$ и $H_{n-k-1}(G)$ изоморфны, и мы приходим к требуемому изоморфизму $H_c^k(F) \cong H_{n-k-1}(G)$. При $k = n-1$ это рассуждение нуждается в некоторой модификации: из точной последовательности

$$0 \to H_c^{n-1}(F) \to H_c^n(G) \to H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z} \to H_c^n(F) = 0$$

и изоморфизма двойственности Пуанкаре $H_c^n(G) \cong H_0(G)$ следует изоморфизм $H_c^{n-1}(F) \cong \tilde{H}_0(G)$.

Таким образом, мы вывели двойственность Понтрягина из двойственности Пуанкаре. Что касается изоморфизма Пуанкаре, то наиболее естественное доказательство использует пучки абелевых групп и их когомологии. Эти понятия, введённые французской математической школой в 50-е годы, преобразили алгебраическую геометрию и многомерный комплексный анализ и играют центральную роль в современном построении этих разделов математики. Именно теория пучков, включённая в контекст общего понятия *абелевой категории*, даёт естественное объяснение понятия когомологии топологического пространства. О теории пучков можно узнать из [3, 2]. Теорему об изоморфизме $H_c^k(M) \cong H_{n-k}(M)$, которая теперь называется теоремой Пуанкаре, сам Пуанкаре формулировал иначе: ведь когомологии были изобретены спустя два десятилетия после его смерти. В формулировке Пуанкаре фигурировало равенство чисел Бетти. Доказательство теоремы двойственности Пуанкаре, основанное на пучках, изложено в [2] и в добавлениях Е. Г. Скляренко к русским переводам книг [6] и [2].

Наш «алгебраизированный» подход к двойственности Понтрягина затушёвывает геометрическую сущность этой двойственности. Между тем изоморфизм между $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus F)$ и $H_c^{n-k-1}(F)$ имеет геометрическое истолкование и может быть выражен в терминах «зацепления циклов». С примерами индексов зацепления мы уже встречались, когда обсуждали понятие числа оборотов 1-цикла вокруг точки на плоскости. В общем случае (целочисленный) индекс зацепления между непересекающимися k- и $(n-k-1)$-циклами в $\mathbb{R}^n$ определяется как индекс пересечения одного из циклов с цепью, границей которой является другой цикл. При этом индекс пересечения между «находящимися в общем положении» пересекающимися k- и $(n-k)$-мерными симплексами полагается равным ± 1 в зависимости от ориентации, а в случае произвольных цепей надо плюс-минус единицы просуммировать.

Если F — компактный полиэдр (= объединение конечного числа симплексов) в $\mathbb{R}^n$, то при некоторых дополнительных предположениях о F группу когомологий $H^{n-k-1}(F)$ можно отождествить с группой гомоморфизмов из $H_{n-k-1}(F)$ в $\mathbb{Z}$. Изоморфизм между $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus F)$ и $H_c^{n-k-1}(F)$ допускает тогда следующее описание: каждому циклу $c \in \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus F)$ сопоставляется гомоморфизм $H_{n-k-1}(F) \to \mathbb{Z}$, который каждому $(n-$ $-k-1)$-циклу на F соотносит его индекс зацепления с c. В общем случае геометрическая интерпретация топологической теоремы двойственности Понтрягина связана с совершенно другой «теоремой двойственности Понтрягина» — теоремой двойственности для локально компактных абелевых групп.

Обозначим через $\mathbb{T}$ мультипликативную группу комплексных чисел, равных по модулю единице, или изоморфную группу $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Это — компактная топологическая группа. Для произвольной локально компактной абелевой топологической группы G обозначим через G^* группу всех непрерывных гомоморфизмов из G в $\mathbb{T}$, наделённую топологией равномерной сходимости на компактных множествах. Тогда G^* — локально компактная абелева группа, называемая двойственной для G. Имеется естественный гомоморфизм из G в G^{**}. Теорема двойственности Понтрягина для локально компактных групп утверждает, что: (1) этот гомоморфизм является изоморфизмом топологических групп; (2) переход от G к G^* устанавливает взаимнооднозначное соответствие между компактными и дискретными абелевыми группами: группа G^* компактна тогда и только тогда, когда G дискретна (и наоборот). Например, двойственными являются группа целых чисел $\mathbb{Z}$ и окружность $\mathbb{T}$, а группа $\mathbb{R}$ действительных чисел двойственна сама себе. Понятие двойственной по Понтрягину группы позволяет с единой точки зрения рассматривать ряды Фурье и преобразование Фурье на прямой: в общем случае «преобразование Фурье» отображает меры или функции на локально компактной группе G в функции на G^*. Элементарное изложение теоремы двойственности для локально компактных групп можно найти в [7].

Пусть теперь F — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда группу, двойственную к дискретной группе когомологий $H^k(F)$, можно интерпретировать как «группу гомологий с коэффициентами в $\mathbb{T}$» множества F. Обозначим эту компактную группу через $H_k(F, \mathbb{T})$. Элементы группы $H_k(F, \mathbb{T})$ представляются «циклами с компактными коэффициентами», расположенными в сколь угодно малой окрестности компакта F. Не вдаваясь в детали, укажем лишь, что можно естественным образом определить «индекс зацепления» между k-циклами в $\mathbb{R}^n \setminus F$ и элементами группы $H_{n-k-1}(F, \mathbb{T})$. Этот индекс зацепления принимает значения в $\mathbb{T}$.

При определении гомологий открытых множеств евклидовых пространств мы пользовались выше цепями с целочисленными коэффициентами. Аналогично можно определить цепи и гомологии с коэффициентами в произвольной абелевой группе A, а также когомологии с коэффициентами в A — для этого при определении коцепей надо рассматривать функции со значениями в A.

Топологическая теорема двойственности Понтрягина (третья формулировка). *Пусть F — компакт, лежащий в $\mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}^n \setminus F$ — его дополнение. Для любой абелевой группы A и целого числа k индекс зацепления устанавливает двойственность между дискретной группой $\tilde{H}_k(G, A)$ и компактной группой $H_{n-k-1}(F, A^*) = (H^{n-k-1}(F, A))^*$.*

Мы не будем более подробно объяснять смысл этой теоремы или доказывать её, а ограничимся некоторыми примерами.

Пример 1. Пусть Ω — открытое множество на плоскости, c — 1-цикл в Ω. Мы видели, что следующее условие необходимо для того, чтобы c было 1-границей в Ω: если p — точка плоскости, не лежащая в X, то c не обходит вокруг p (то есть делает 0 оборотов вокруг p). Это условие также и достаточно. Этот факт допускает элементарное доказательство, но может рассматриваться и как частный случай теоремы двойственности. Он важен в теории функций комплексного переменного. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и f — функция, голоморфная в Ω. Если 1-цикл c в Ω таков, что для любой точки $p \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ цикл c не обходит вокруг p, то c является 1-границей в Ω и потому интеграл $\int\limits_c f(z)\,dz$ равен нулю (так как он равен сумме интегралов по границам треугольников, целиком расположенных в Ω).

Пример 2. Пусть F — компакт в $\mathbb{R}^n$, содержащий конечное число s связных компонент $F_1, \ldots, F_s$, и пусть $G = \mathbb{R}^n \setminus F$ — его дополнение. Тогда группа гомологий $H_{n-1}(G)$ — свободная абелева группа с s образующими. Базис в $H_{n-1}(G)$ образуют $(n-1)$-циклы $c_1, \ldots, c_s$, такие, что c_i обходит 1 раз вокруг любой точки из F_i и обходит 0 раз вокруг любой точки из F_j при $j \neq i$.

Пример 3. Пусть F — узел в $\mathbb{R}^3$, то есть простая замкнутая кривая. Тогда 1-цикл в $\mathbb{R}^3 \setminus F$ гомологичен нулю тогда и только тогда, когда он имеет нулевой индекс зацепления с F. Отметим, что при этом *фундаментальная группа* пространства $\mathbb{R}^3 \setminus F$ может быть устроена достаточно сложно. Элементами фундаментальной группы являются, грубо говоря, классы непрерывных замкнутых кривых, причем две кривые принадлежат одному классу, если одну из них можно непрерывно продеформировать в другую.

На рисунке 2 (за который мы благодарим А. Б. Сосинского) изображен узел F, 1-цикл β в $G = \mathbb{R}^3 \setminus F$, имеющий нулевой индекс зацепления с F, и 1-цикл α, имеющий единичный индекс зацепления с F. Цикл β нельзя «расцепить» с F, то есть стянуть в точку, оставаясь в G. В то же время по теореме двойственности цикл β гомологичен нулю в G. На рисунке показана расположенная в G поверхность S. Разбив её на треугольники, мы получим 2-цепь в G с границей β. Группа $H_1(G) \cong H^1(F) \cong \mathbb{Z}$ порождается 1-циклом α.

Пример 4. Пусть F — подмножество в $\mathbb{R}^3$, гомеоморфное двумерной сфере. Тогда группа гомологий $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus F)$ равна нулю. При этом фундаментальная группа пространства $\mathbb{R}^3 \setminus F$ может быть отлична от нуля: в качестве F можно взять так называемую «рогатую сферу» Александера (из сферы вытягивается длинный рог и на нем завязывается бесконечное множество узелков). На плоскости подобное невозможно: если F — простая замкнутая кривая на $\mathbb{R}^2$, то существует гомеоморфизм плоскости на себя, переводящий F в обычную окружность (теорема Шенфлиса).

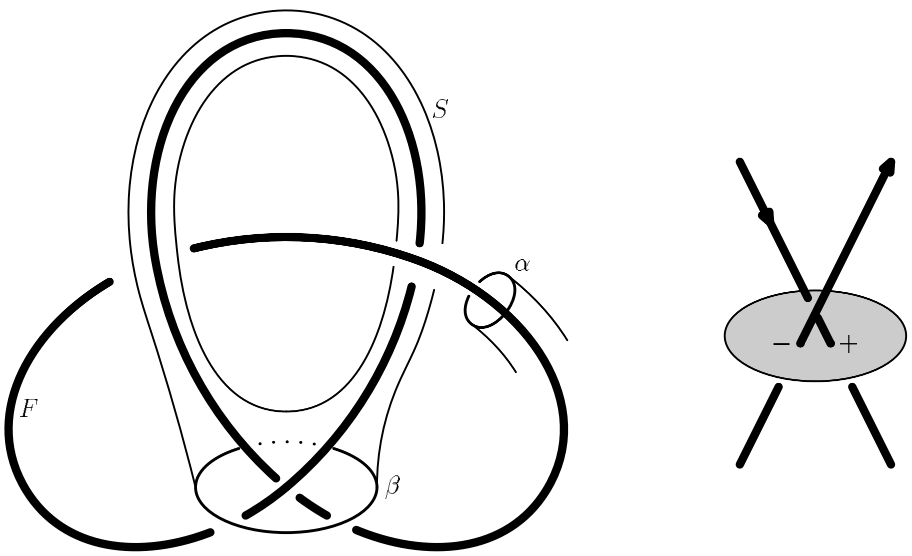

Рис. 2.

Список литературы

[1] *Аносов Д. В., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Постников М. М.* О математических трудах Л. С. Понтрягина // Л. С. Понтрягин. Избранные научные труды. Том 1. Топология. Топологическая алгебра. М: Наука, 1988. С. 10–26.

[2] *Бредон Г.* Теория пучков. М.: Мир, 1988.

[3] *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.

[4] *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985.

[5] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[6] *Масси У.* Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.

[7] *Моррис С.* Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. М.: Мир, 1980.

[8] *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. Том 1. Топология. Топологическая алгебра. М.: Наука, 1988.

[9] УМН. 1988. Т. 43, вып. 6.

[10] *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

[11] Колмогоров в воспоминаниях / под ред. А. Н. Ширяева. М.: Наука, 1993.

[12] *Хеладзе Ш. В.* О расходимости всюду рядов Фурье функций из класса $L\phi(L)$. Труды Тбил. Мат. Ин-та АН ГССР. 1989. Т. 89. С. 51–59.