

## Ширина многоугольника

М. Л. Гервер\*

Если вырезанный из картона выпуклый многоугольник можно, непрерывно двигая по столу, протащить между двумя гвоздями, вбитыми в стол на расстоянии 1, то тогда его можно протащить и между гвоздями, вбитыми на расстоянии  $r > 1$ . Верно ли то же самое и для любого невыпуклого многоугольника, — например, для такого, как на рис. 1?

Библиография: 2 названия.

При дополнительных ограничениях (которым многоугольник  $M$  на рис. 1 не удовлетворяет) утвердительный ответ на вопрос из аннотации получили в [1] J. E. Goodman, J. Pach и С. К. Уар. Методы и результаты работы [1] послужили основой для построений настоящей статьи.

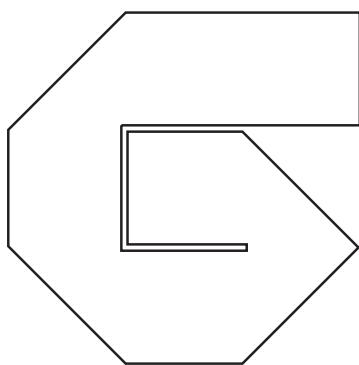


Рис. 1

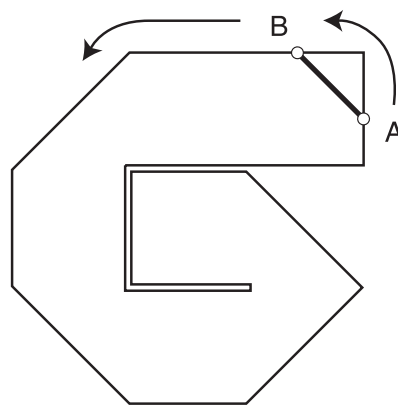


Рис. 2

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01852).

## 1. ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Минимальное расстояние  $w_M$  между двумя точками в  $\mathbb{R}^2$ , позволяющее протащить плоский многоугольник  $M$  между ними, назовем *шириной  $M$*  (можно доказать, что для выпуклого многоугольника данное определение совпадает со стандартным:  $w_M$  — наименьшее расстояние между параллельными прямыми, опорными к  $M$ ).

Из новых результатов, полученных в статье, отметим следующий.

Пусть  $A$  и  $B$  — две точки на границе  $P$  многоугольника  $M$  (рис. 2). Ясно, что если длина  $d$  отрезка  $AB$  не слишком велика, то его можно непрерывно протащить вдоль  $P$  — так, что его концы  $A$  и  $B$  всё время будут находиться на  $P$  и отрезок  $AB$ , сделав полный оборот вокруг  $M$ , вернется в исходное положение.

Спрашивается: каково максимальное значение  $d_M$  длины  $d$ , допускающее такое перемещение концов отрезка по границе  $M$ ?

Оказывается,  $d_M$  в точности равно ширине  $w_M$  многоугольника  $M$ .

Чтобы доказать эту теорему двойственности и решить задачу, сформулированную в аннотации, рассмотрим ряд подготовительных, вспомогательных задач.

## 2. ВОЗЫ И МАШИНЫ. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Разобраться с задачами о ширине многоугольника нам, в первую очередь, поможет прием, используемый в [2] при решении следующей задачи Н. Н. Константинова.

*Две непересекающиеся дороги ведут из города  $C_1$  в город  $C_2$ . Известно, что две машины, связанные веревкой длины  $2L$ , могут проехать из  $C_1$  в  $C_2$  (по разным дорогам), не порвав веревки. Смогут ли разминуться два круглых воза радиуса  $R > L$ , если их центры движутся по тем же дорогам навстречу друг другу?*

РЕШЕНИЕ. Вот — решение этой задачи, приведенное в [2, с. 8,9]. Рассмотрим квадрат

$$K = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}.$$

Положение двух экипажей (один — на 1-й дороге, другой — на 2-й) можно характеризовать точкой квадрата  $K$ : достаточно обозначить через  $x_i$  долю расстояния от  $C_1$  до  $C_2$  по  $i$ -той дороге, заключённую между  $C_1$  и находящимся на этой дороге экипажем.

Всевозможным положениям экипажей соответствуют всевозможные точки квадрата  $K$ . Этот квадрат называется *фазовым пространством*,

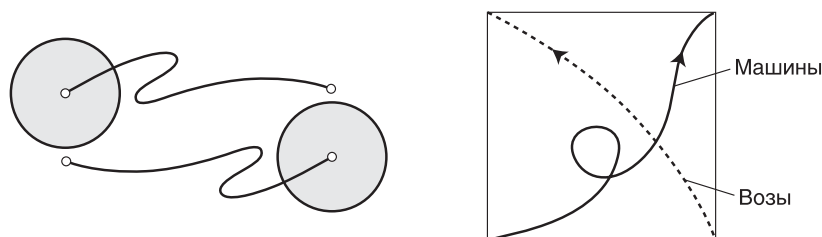


Рис. 3

а его точки — *фазовыми точками*. Таким образом, каждая фазовая точка соответствует определенному положению пары экипажей, а всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве.

Например, начальное положение машин (в городе  $C_1$ ) соответствует левому нижнему углу квадрата  $K$  ( $x_1 = x_2 = 0$ ), а движение машин из  $C_1$  в  $C_2$  изображается кривой, ведущей в противоположный угол.

Точно так же начальное положение возов (один — на 1-й дороге на выезде из  $C_2$ , другой — на 2-й дороге на выезде из  $C_1$ , рис. 3) соответствует правому нижнему углу квадрата  $K$  ( $x_1 = 1, x_2 = 0$ ), а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата.

Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займёт положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше  $2R$ . Итак, возам не удастся разминуться.

### 3. Многоугольник с ручкой и его ширина

Пусть полупрямая  $H$  (рис. 4 на след. стр.) имеет единственную общую точку с границей  $P$  многоугольника  $M$ . Объединение  $P$  и  $H$  обозначим через  $P_H$  и будем называть *многоугольником с ручкой* (взамен более точных, но тяжеловесных *контур* или *граница многоугольника с ручкой*), а саму полупрямую  $H$  будем называть *ручкой*.

С изучаемыми вопросами тесно связаны следующие задачи.

1. Пусть  $A_0$  и  $B_0$  — две произвольные точки на ручке  $H$ . Доказать, что существует пара непрерывных отображений

$$a : t \in [0; 1] \rightarrow A = a(t) \in P_H, \quad b : t \in [0; 1] \rightarrow B = b(t) \in P_H,$$

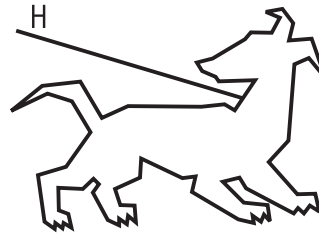


Рис. 4

обладающая следующими свойствами:

- при  $t = 0$  точки  $A$  и  $B$  занимают положения  $A_0$  и  $B_0$ ;
- при изменении  $t$  от 0 до 1 расстояние  $|AB|$  остается неизменным;
- при изменении  $t$  от 0 до 1 по крайней мере одна из точек  $A$  и  $B$  обходит  $P$  (т.е. двигаясь непрерывно, но не обязательно монотонно — то по часовой, то против часовой стрелки — делает полный оборот вокруг  $M$ );
- при  $t = 1$  отрезок  $AB$  совпадает с отрезком  $A_0B_0$  — так что либо

$$A_1 = a(1) = A_0, \quad B_1 = b(1) = B_0, \quad (1)$$

либо

$$A_1 = a(1) = B_0, \quad B_1 = b(1) = A_0. \quad (2)$$

2. Доказать, что условия (1) или (2) выполняются в зависимости от того, какова длина отрезка  $A_0B_0$ : существует такое  $w$ , что при  $|A_0B_0| > w$  выполняется (1), а при  $|A_0B_0| < w$  выполняется (2).

3. Верно ли, что при  $|A_0B_0| = w$  существуют обе пары отображений: и такая, что выполняется (1), и такая, что выполняется (2)?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число  $w$  назовем шириной многоугольника с ручкой  $P_H$ .

Дальнейшие построения оправдают выбор этого термина, а пока возникает вопрос:

4. Зависит ли ширина  $P_H$  от расположения ручки  $H$ ? Подробнее: пусть  $H^*$  — любая полупрямая, имеющая единственную общую точку с границей  $P$  многоугольника  $M$ . Объединим  $P$  с  $H^*$  и ширину полученного многоугольника с ручкой  $P_{H^*}$  обозначим через  $w^*$ . Равны ли между собой  $w$  и  $w^*$ ?

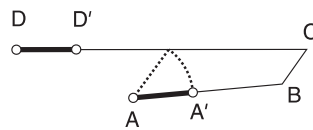


Рис. 5

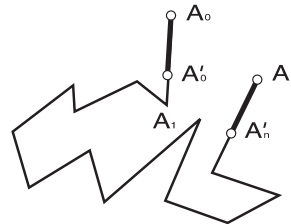


Рис. 6

4. ДВИЖЕНИЕ ОТРЕЗКА ПО ЛОМАННОЙ

Прежде чем перейти к решению задач 1–4, обсудим следующее утверждение.

5. Пусть  $ABCD$  — несамопересекающаяся трёхзвенная ломаная линия, причем звенья  $AB$  и  $CD$  имеют (каждое) длину больше 1. Пусть  $A'$  и  $D'$  — такие точки на звеньях  $AB$  и  $CD$ , что  $|AA'| = |D'D| = 1$ . Тогда отрезок длины 1 можно так переместить из положения  $AA'$  в положение  $D'D$ , что концы отрезка будут непрерывно двигаться по ломаной  $ABCD$ .

Из рис. 5 ясно, что утверждение 5 неверно.

6. Станет ли утверждение 5 верным не только для трёхзвенной ломаной, но даже для  $n$ -звенной ломаной  $A_0A_1 \dots A_n$ , если дополнительно потребовать, чтобы все точки ломаной, лежащие на расстоянии  $\leq 1$  от  $A_0$ , принадлежали её начальному звену  $A_0A_1$ , а все точки ломаной, лежащие на расстоянии  $\leq 1$  от  $A_n$ , принадлежали её конечному звену?

Решение задачи 6 (см. разд. 5) поможет лучше понять задачи 1–4 и, в частности, объяснить, зачем к многоугольнику приделана ручка.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ОТРЕЗКА ПО ЛОМАННОЙ. ГРАФ Г

Пусть все точки несамопересекающейся  $n$ -звенной ломаной  $P = A_0A_1 \dots A_n$ , лежащие на расстоянии  $\leq 1$  от  $A_0$ , принадлежат её начальному звену  $A_0A_1$ , а все точки ломаной  $P$ , лежащие на расстоянии  $\leq 1$  от  $A_n$ , принадлежат её конечному звену. Обозначим через  $A'_0$  и через  $A'_n$  точки  $P$  на расстоянии 1 от  $A_0$  и от  $A_n$  и, следуя [1], докажем, что отрезок длины 1 можно непрерывно переместить из положения  $A_0A'_0$  в положение  $A'_nA_n$ , двигая концы отрезка по ломаной  $P$  (рис. 6).

Пусть  $L$  — длина ломаной  $P$  и пусть  $AB$  — произвольный отрезок длины 1 с концами на  $P$ . Длины ломаных  $A_0A$  и  $A_0B$  (измеренные вдоль  $P$ )

обозначим через  $L_1$  и  $L_2$  и положим (сравним с разд. 2)

$$x_1 = L_1/L, \quad x_2 = L_2/L. \quad (3)$$

Поступив так с *каждым* отрезком длины 1 с концами на  $P$ , получим некоторое множество  $\Gamma$  точек с координатами (3) в *фазовом пространстве*, т.е. в квадрате

$$K = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}.$$

В частности, отрезкам  $A_0A'_0$  и  $A'_nA_n$  соответствуют фазовые точки

$$F_0 = (0, 1/L) \quad \text{и} \quad F_1 = (1 - 1/L, 1). \quad (4)$$

УТОЧНЕНИЕ. Вместе с каждой точкой  $X = (x_1, x_2)$  множество  $\Gamma$ , очевидно, содержит точку  $X' = (x_2, x_1)$ , симметричную  $X$  относительно прямой  $x_1 = x_2$  (если фазовая точка  $X$  соответствует отрезку  $AB$ , то  $X'$  соответствует отрезку  $BA$ ). Исключим из  $\Gamma$  все точки, у которых  $x_1 > x_2$ , т. е. при определении  $\Gamma$  будем рассматривать только такие отрезки  $AB$ , у которых (при движении вдоль  $P$ )  $A$  ближе к  $A_0$ , чем  $B$ .

Нетрудно проверить, что множество  $\Gamma$  представляет собой граф, рёбра которого являются либо дугами эллипсов, либо прямолинейными отрезками (отрезки получаются, когда концы  $AB$  принадлежат или одному и тому же звену ломаной  $A_0A_1 \dots A_n$ , или параллельным звеньям, а дуги — когда концы  $AB$  принадлежат непараллельным звеньям). Степени вершин  $\Gamma$  описаны при доказательстве следующей теоремы (леммы 1, 2).

**ТЕОРЕМА 1.** *Фазовые точки  $F_0$  и  $F_1$  принадлежат одной и той же связной компоненте графа  $\Gamma$ , так что отрезок длины 1 можно непрерывно переместить из положения  $A_0A'_0$  в положение  $A'_nA_n$ , двигая концы отрезка по ломаной  $P$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим (потом мы освободимся от этого допущения), что

$$\text{ломаная } P \text{ не содержит ни одной пары параллельных звеньев,} \quad (5) \\ \text{расстояние между которыми в точности равно 1.}$$

Докажем следующее утверждение.

**ЛЕММА 1.** *При условии (5) все вершины графа  $\Gamma$ , кроме «концевых» вершин (4), имеют чётную степень: 0, 2 или 4, и лишь вершины  $F_0$  и  $F_1$  имеют степень 1.*

Вместе с леммой 1 будет доказана и теорема 1 при условии (5): выйдя из  $F_0$ , будем двигаться по рёбрам графа  $\Gamma$ , не проходя ни по одному ребру дважды (пока это возможно); это движение не может закончиться ни в какой вершине чётной степени (войдя в неё, мы можем выйти); тем самым мы дойдем до  $F_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть отрезок  $AB$  длины 1 с вершинами на ломаной  $P$  не совпадает ни с  $A_0A'_0$ , ни с  $A'_nA_n$ . Тогда

$$A \neq A_0, \quad B \neq A_n \tag{6}$$

(здесь используется ограничение, наложенное на ломаную  $P = A_0A_1 \dots A_n$  в начале параграфа: все точки ломаной  $P$ , лежащие на расстоянии  $\leq 1$  от  $A_0$ , принадлежат её начальному звену, а все точки ломаной  $P$ , лежащие на расстоянии  $\leq 1$  от  $A_n$ , принадлежат её конечному звену).

Вследствие (6)  $AB$  образует с  $P$  два угла в точке  $A$  (назовем их  $\alpha_1, \alpha_2$ ) и два угла в точке  $B$  (назовем их  $\beta_1, \beta_2$ ); при этом возможны следующие случаи:

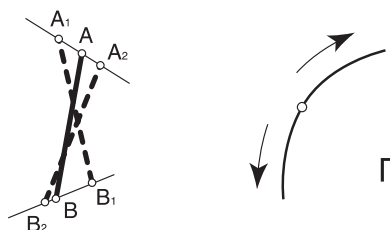


Рис. 7 а)

а) в точности один из углов  $\alpha_1, \alpha_2$  — острый и в точности один из углов  $\beta_1, \beta_2$  — острый; в этом (общем) случае оба конца  $AB$  могут одновременно двигаться по ломаной  $P$  в двух направлениях (рис. 7а);

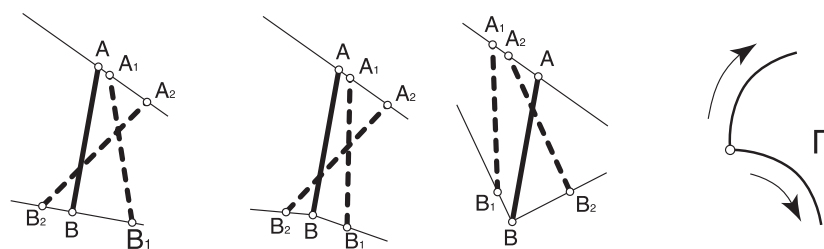


Рис. 7 б)

б) либо один, либо три из углов  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — острые; в этом случае один конец отрезка  $AB$  может двигаться по ломаной  $P$  в двух направлениях, а другой конец  $AB$  — в одном направлении (соответствующая вершина графа  $\Gamma$  имеет степень 2, рис. 7б);

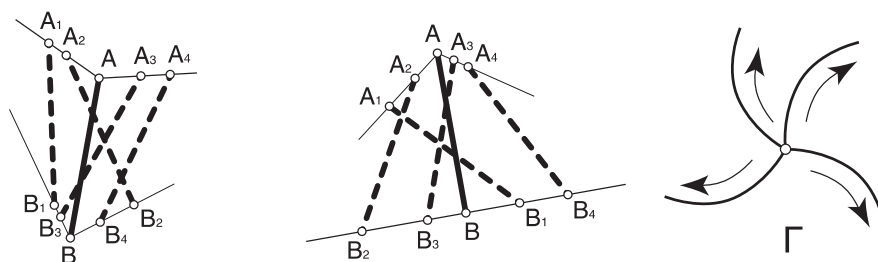


Рис. 7 с)

с) оба угла  $\alpha_i$  — острые и ни один из углов  $\beta_i$  не является острым (или наоборот, оба угла  $\beta_i$  — острые и ни один из углов  $\alpha_i$  не является острым); в этом случае каждый из концов отрезка  $AB$  может двигаться по ломаной  $P$  в двух направлениях, так что всего имеется четыре варианта движения (соответствующая вершина графа  $\Gamma$  имеет степень 4, рис. 7с);

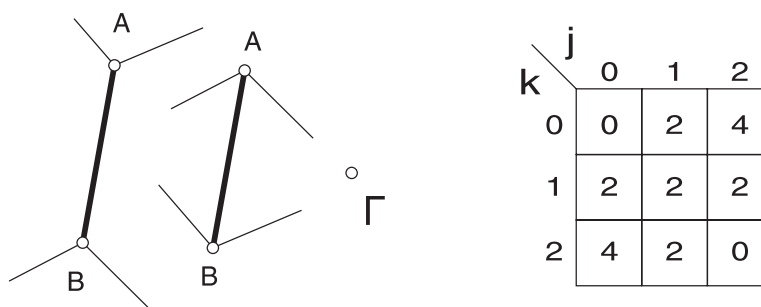


Рис. 7 d)

д) все углы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  и  $\beta_2$  — острые, либо ни один из этих углов не является острым; из этого положения отрезок  $AB$  никуда не может сдвинуться (граф  $\Gamma$  имеет изолированную вершину, рис. 7д).

Случаи а–д исчерпывают 9 возможностей  $(j, k)$ ,  $0 \leq j, k \leq 2$ , где  $j$  обозначает число острых углов среди углов  $\alpha_i$ , а  $k$  — число острых углов среди углов  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Лемма 1 — а с ней и теорема 1 при условии (5) — доказана.



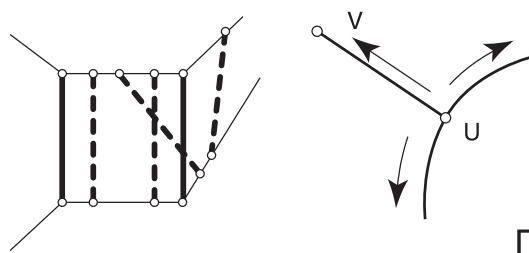


Рис. 7 е)

В общем случае — без условия (5) — граф  $\Gamma$ , кроме «концевых» вершин  $F_i$  степени 1, может иметь и другие, «неконцевые», вершины нечётной степени.

Верна, однако, следующая лемма:

**ЛЕММА 2.** *Все неконцевые вершины графа  $\Gamma$  нечётной степени можно разбить на пары вершин  $(U, V)$ , соединённых в  $\Gamma$  прямолинейными отрезками — рёбрами  $UV$ .*

Докажем лемму 2, а потом выведем из неё теорему 1.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.** Граф  $\Gamma$  может иметь *неконцевые* вершины нечётной степени только при нарушении (5), т.е. при условии, что ломаная  $P$  содержит параллельные звенья, расстояние между которыми в точности равно 1 (рис. 7е).

Каждой такой паре звеньев соответствует прямолинейный отрезок (ребро  $UV$  графа  $\Gamma$ ), соединяющий две *неконцевые* вершины  $U$  и  $V$  нечётной степени, что и доказывает лемму 2.

Удалив из графа  $\Gamma$  все прямолинейные рёбра  $UV$ , соединяющие неконцевые вершины нечётной степени, приходим к графу  $\Gamma'$ , все неконцевые вершины которого имеют чётную степень: 0, 2 или 4, т.е. оказываемся в условиях леммы 1, которая, как и прежде, влечет за собой теорему 1.

Попутно приведённые доказательства объясняют роль ручки  $H$  в задачах 1–3: это аналог начального и конечного звеньев ломаной  $A_0A_1 \dots A_n$ ; наличие ручки  $H$  даст возможность выделить среди всех вершин соответствующего графа  $\Gamma$  в фазовом пространстве «концевые» вершины  $F_i$  степени 1 (подробнее об этом — в разд. 6), а также поможет использовать задачи 1–3 при решении задачи о гвоздях из аннотации.

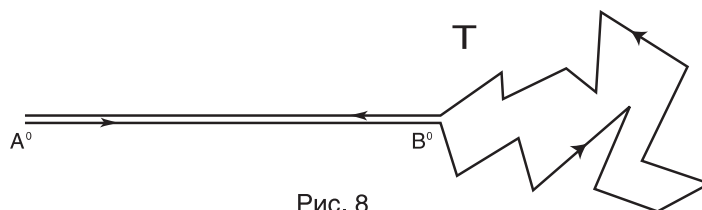


Рис. 8

### 6. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ОТРЕЗКА ПО МНОГОУГОЛЬНИКУ С РУЧКОЙ

Чтобы решить задачи 1–3, свяжем с  $P_H$  ориентированную ломаную  $T$ , состоящую из трёх частей (рис. 8): начальное звено ломаной  $T$  — кусок ручки  $H$  от точки  $A^0$  до точки  $B^0$ , вторая часть  $T$  — ориентированный против часовой стрелки контур  $P$  многоугольника  $M$  с началом и концом в  $B^0$  и, наконец, конечное звено  $T$  — кусок ручки  $H$  от  $B^0$  до  $A^0$ . Точку  $A^0$  выберем *достаточно далеко* от  $P$  — так, чтобы её расстояние до  $P$  было больше  $D$ , где  $D$  больше диаметра многоугольника  $M$ .

Задача 1, очевидно, имеет решение, если длина  $d$  отрезка  $A_0B_0$  больше  $D$ .

Поэтому далее предполагается, что  $d \in (0; D]$ . Кроме того, отрезок  $A_0B_0$  можно без ограничения общности считать примыкающим к  $A^0$ , так что далее либо  $A_0 = A^0$ , либо  $B_0 = A^0$ .

Построим в фазовом пространстве граф  $\Gamma = \Gamma_d$  ( $d$  — параметр,  $0 < d \leq D$ ); отнесем к  $\Gamma_d$  все фазовые точки  $(x_1, x_2)$ ,  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ , которые получаются по следующему правилу. Пусть  $A$  и  $B$  — такие точки ломаной  $T$ , что  $|AB| = d$ , причем при движении из  $A^0$  вдоль  $T$  точка  $A$  встречается раньше, чем  $B$ . Пусть  $L$  — длина ломаной  $T$ . Длины ломаных  $A^0A$  и  $A^0B$  (измеренные вдоль  $T$ ) обозначим через  $L_1$  и  $L_2$  (так что  $L_2 - L_1 \geq d$ ) и положим (как и в (3))  $x_i = L_i/L$ ,  $i = 1, 2$ . В частности, отрезкам длины  $d$ , примыкающим к  $A^0$ , соответствуют фазовые точки

$$F_1 = (0, d/L), F_2 = (0, 1 - d/L), F_3 = (d/L, 1) \text{ и } F_4 = (1 - d/L, 1). \quad (7)$$

Тем самым, в отличие от разд. 5, конечных фазовых точек не две, а четыре (рис. 9).

При  $d = D$  и при  $d \in (0; D)$ , близких к 0, решение задачи 1, очевидно, существует, причем выполняются (соответственно) условия (1) и (2). Иными словами, в первом случае (рис. 9а)  $\Gamma_d$  включает компоненту, содержащую  $F_1$  и  $F_2$ , и компоненту, содержащую  $F_3$  и  $F_4$ , а во втором случае (рис. 9б) — компоненту, содержащую  $F_1$  и  $F_4$ , и компоненту, содержащую  $F_2$  и  $F_3$  (последняя, впрочем, изображает движение отрезка

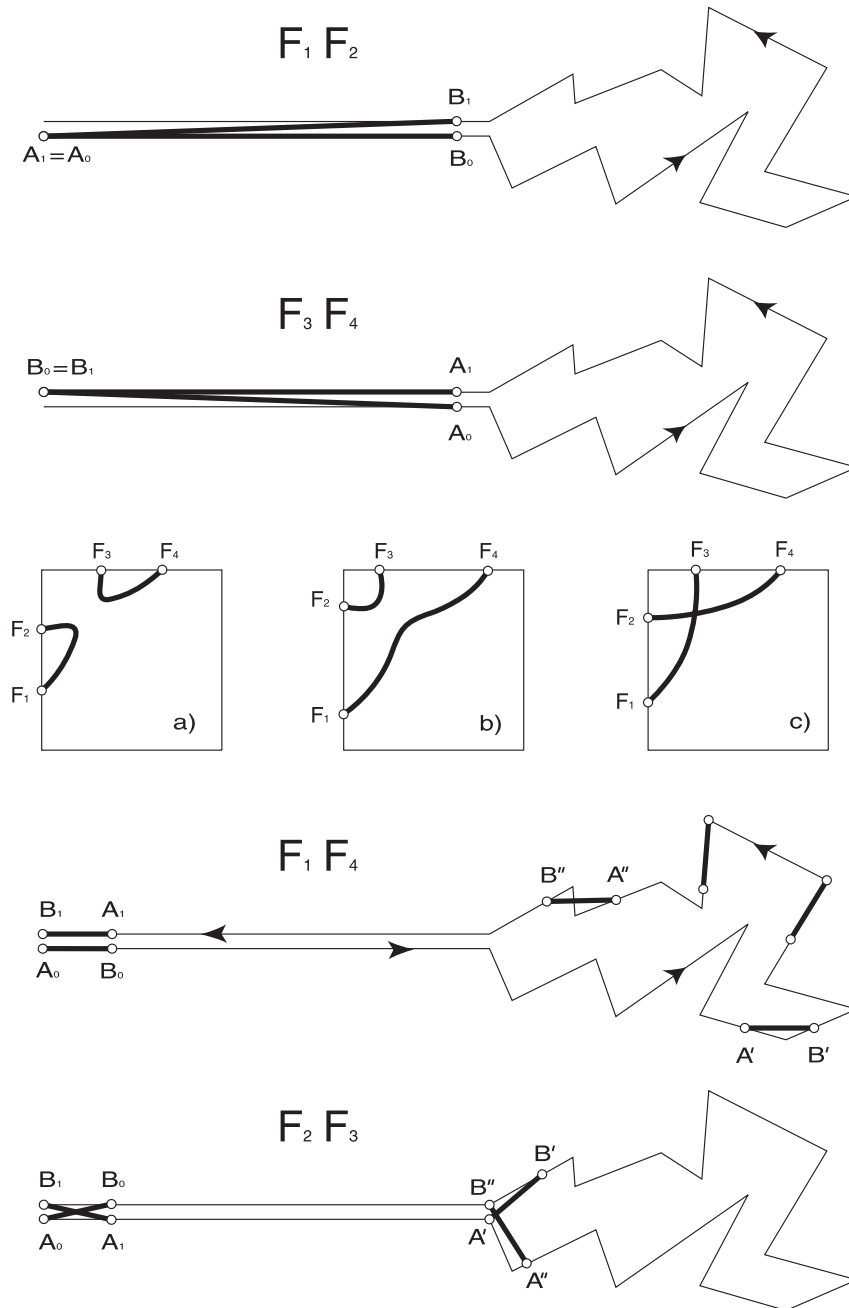


Рис. 9

$AB$ , при котором ни  $A$ , ни  $B$  не обходят  $P$ , так что отображения  $[0; 1]$  в  $P_H$ , соответствующие этой компоненте, не являются решением задачи 1).

Решим теперь задачу 1 для любого  $d \in (0D]$ .

Ясно, что все концевые вершины  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , графа  $\Gamma_d$  имеют степень 1. Что же касается неконцевых вершин  $\Gamma_d$ , то, почти дословно повторяя доказательство теоремы 1, получаем:

**А.** Если ломаная  $T$  не содержит ни одной пары параллельных звеньев, расстояние между которыми равно  $d$ , то все неконцевые вершины  $\Gamma_d$  имеют четную степень.

**В.** Если ломаная  $T$  содержит параллельные звенья, расстояние между которыми равно  $d$ , то все неконцевые вершины  $\Gamma_d$  нечётной степени можно разбить на пары вершин  $(U, V)$ , соединённых в  $\Gamma_d$  прямолинейными отрезками — рёбрами  $UV$ . Исключив эти рёбра из  $\Gamma_d$ , приходим к графу  $\Gamma'_d$ , все неконцевые вершины которого имеют чётную степень.

Выйдя из вершины  $F_1$ , будем двигаться по рёбрам графа  $\Gamma_d$  (в случае **А**) или графа  $\Gamma'_d$  (в случае **В**), не проходя ни по одному ребру дважды (пока это возможно); это движение не может закончиться ни в какой вершине чётной степени; тем самым мы дойдем до одной из вершин  $F_i$ ,  $2 \leq i \leq 4$ .

Если это — вершина  $F_2$ , то выйдем из  $F_3$  и продолжим двигаться по тем рёбрам, по которым мы ещё ни разу не проходили (по-прежнему не проходя ни по одному ребру дважды, пока это возможно); как и раньше, это движение не может закончиться ни в какой вершине чётной степени; тем самым мы дойдем до единственной оставшейся концевой вершины  $F_4$ .

Итак, в рассматриваемом случае граф  $\Gamma_d$  включает компоненту  $K_{1,2}$ , содержащую точки  $F_1$  и  $F_2$ , и компоненту  $K_{3,4}$ , содержащую  $F_3$  и  $F_4$ .

Альтернативная возможность: выйдя из  $F_1$ , мы могли пойти до  $F_4$ , в этом случае  $\Gamma_d$  включает компоненту  $K_{1,4}$ , содержащую  $F_1$  и  $F_4$ , а также компоненту  $K_{2,3}$ , содержащую  $F_2$  и  $F_3$ .

Наконец, выйдя из  $F_1$ , мы могли пойти до  $F_3$  (по пути  $K_{1,3}$ ); но тогда существует и путь  $K_{2,4}$  из  $F_2$  в  $F_4$ , а поскольку путь  $K_{1,3}$  разделяет  $F_2$  и  $F_4$ , то пути  $K_{1,3}$  и  $K_{2,4}$  пересекаются; значит, в этом случае все четыре вершины:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$  — принадлежат одной компоненте графа  $\Gamma_d$  (рис. 9с).

Таким образом, из вершины  $F_1$  всегда можно пойти либо до  $F_2$ , либо до  $F_4$ , а иногда и до каждой из трёх вершин:  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$ . Задача 1 решена.

Более того, всё подготовлено и для решения задач 2 и 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Используя обозначение  $K_{i,j}$  для связного подграфа графа  $\Gamma_d$ , содержащего  $F_i$  и  $F_j$ , выделим два класса графов  $\Gamma_d$ :

любой граф первого класса включает непересекающиеся компоненты  $K_{1,2}$  и  $K_{3,4}$ ,

любой граф второго класса включает непересекающиеся компоненты  $K_{1,4}$  и  $K_{2,3}$ .

В этих терминах задачи 2 и 3 можно переформулировать следующим образом:

2. Существует такое  $w$ , что при  $d > w$  граф  $\Gamma_d$  принадлежит первому классу, а при  $d < w$  — второму классу.

3. При  $d = w$  граф  $\Gamma_d$  не принадлежит ни первому, ни второму классу: все четыре вершины  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , принадлежат одной компоненте  $\Gamma_w$ .

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 2 И 3. Ясно, что при  $d \neq e$  графы  $\Gamma_d$  и  $\Gamma_e$  не пересекаются. При этом для концевых вершин  $\Gamma_e$  (обозначим их  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , чтобы отличить от вершин  $F_i$  графа  $\Gamma_d$ ) выполняются соотношения, аналогичные (7):

$$E_1 = (0, e/L), E_2 = (0, 1 - e/L), E_3 = (e/L, 1) \text{ и } E_4 = (1 - e/L, 1),$$

т. е. (рис. 10) при  $e < d$  точки  $E_i$  расположены ближе, чем  $F_i$ , к углам квадрата

$$K = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}.$$

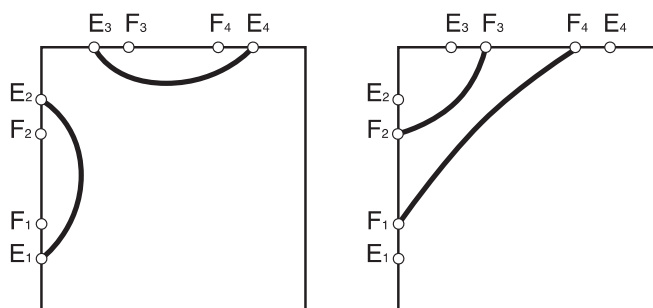


Рис. 10

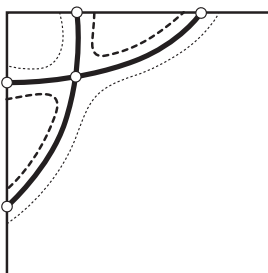


Рис. 11

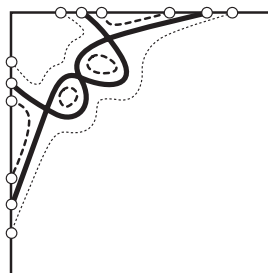


Рис. 12

Поэтому верна

**ЛЕММА 3.** *Если граф  $\Gamma_e$  — первого класса и  $d > e$ , то граф  $\Gamma_d$  — тоже первого класса. Если  $\Gamma_d$  — второго класса и  $e < d$ , то  $\Gamma_e$  — тоже второго класса.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Иначе  $\Gamma_d$  и  $\Gamma_e$  пересеклись бы, рис. 10.

**СЛЕДСТВИЕ.** *Можно принять за  $w$  нижнюю грань тех  $d$ , для которых граф  $\Gamma_d$  принадлежит первому классу или (что то же самое) верхнюю грань тех  $d$ , для которых  $\Gamma_d$  — второго класса. Для этого  $w$  утверждения задач 2 и 3, очевидно, выполняются.*

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Точка  $d = w$  является точкой перехода от графов второго класса к графам первого класса; компоненты  $K_{i,j}$  для графов  $\Gamma_d$  при  $d$ , близких к  $w$  (рис. 11), напоминают семейство гипербол  $xy = c$  для  $c$  вблизи 0. При  $d = w$  граф  $\Gamma_d = \Gamma_w$  имеет вершину  $X$  степени 4, из которой можно попасть по рёбрам  $\Gamma_w$  в любую из вершин  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ; связный подграф  $\Gamma_w$ , содержащий  $X$  и  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , — аналог *сепаратрисы*  $xy = 0$ , разделяющей гиперболы  $xy = c$  для  $c$  разных знаков (хотя иногда этот подграф устроен сложнее, например, так, как в случае, когда  $M$  — правильный треугольник, рис. 12).

В заключение этого параграфа сформулируем и докажем ещё одну лемму (сравним её с задачами 1, 2), которая понадобится в разд. 7.

**ЛЕММА 4.** *Пусть существуют такие непрерывные отображения*

$$a : t \in [0; 1] \rightarrow A = a(t) \in P_H, \quad b : t \in [0; 1] \rightarrow B = b(t) \in P_H, \quad (8)$$

*что при  $t = 0$  и  $t = 1$  отрезок  $AB$  занимает одно и то же положение  $A_0B_0 \subset H$ :  $A_0 = a(0) = a(1)$ ,  $B_0 = b(0) = b(1)$ , при изменении  $t$  от 0*

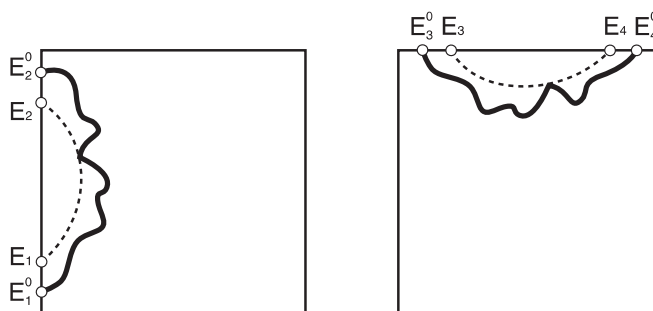


Рис. 13

до 1 одна из точек  $A, B$  обходит контур  $P$  и расстояние между  $A$  и  $B$  не обязательно постоянно, но при всех  $t \in [0; 1]$  не превосходит  $e$  (в частности,  $|A_0B_0| = e_0 \leq e$ ). Тогда  $e \geq w$ , так что существуют отображения, обладающие всеми свойствами отображений (8) и, кроме того, такие, что  $|AB| \equiv e$ .

**Доказательство.** В фазовом пространстве перемещение (8) отрезка  $AB$  изображается кривой  $Q = Q_{1,2}$ , соединяющей  $E_1^0$  и  $E_2^0$ , или кривой  $Q = Q_{3,4}$ , соединяющей  $E_3^0$  и  $E_4^0$ , где  $E_i^0$  — вершины графа  $\Gamma_{e_0}$  (рис. 13). При  $d > e$  эта кривая не пересекается с  $\Gamma_d$  (так как  $|AB| \leq e < d$ ). Поэтому  $e \geq w$ : если предположить, что  $e < w$ , то при  $d \in (e; w)$  граф  $\Gamma_d$  — второго класса и, значит, вопреки сказанному, пересекается с кривой  $Q$  (либо  $K_{1,4}$  пересекает  $Q_{1,2}$ , либо  $K_{2,3}$  пересекает  $Q_{3,4}$ ).

7. Можно ли протащить многоугольник между двумя гвоздями?

Опираясь на лемму 4, решим задачу о гвоздях из аннотации и задачу 4 из разд. 3.

Пусть гвозди  $G_1$  и  $G_2$  вбиты в стол на расстоянии  $e$ , и пусть известно, что многоугольник  $M$  ширины  $w_M$  можно протащить между ними (так что  $e \geq w_M$ ).

Когда мы протаскиваем многоугольник между гвоздями, то гвозди неподвижны, а многоугольник  $M$  движется. Однако, если жестко связать с  $M$  систему координат, то в ней, наоборот, *гвозди  $G_1$  и  $G_2$  движутся относительно неподвижного многоугольника*:

$$G_1 = G_1(t) \text{ и } G_2 = G_2(t), \quad t \in [0; 1]. \tag{9}$$

Для многоугольников не очень сложной формы движение (9) можно представлять себе следующим образом (рис. 14).

На контуре  $P$  многоугольника  $M$  выбираются две точки:  $C_1^*$  и  $C_2^*$ . В них к  $M$  приделываются две ручки:  $h_1$  и  $h_2$  (полупрямые  $C_1^*C_1$  и  $C_2^*C_2$ ), не пересекающие друг друга и не имеющие с  $P$  других общих точек, кроме  $C_1^*$  и  $C_2^*$ . Объединение  $M$ ,  $h_1$  и  $h_2$  разбивает  $\mathbb{R}^2$  на две части: *верхнюю* и *нижнюю*, и движение (9) происходит так, что  $G_1(t)$  лежит в замыкании верхней, а  $G_2(t)$  — в замыкании нижней части.

Именно так *протаскивание многоугольника между гвоздями*  $G_1$  и  $G_2$  трактуется в [1], и исследуемая задача решена в [1] для многоугольников  $M$ , которые можно *именно таким способом* протащить между  $G_1$  и  $G_2$ .

Но для более сложных многоугольников (рис. 15) при  $\epsilon$ , близких к  $w_M$  движение (9) *нельзя* представить таким образом, и на помощь приходит конструкция  $P_H$  из разд. 3.

Чтобы применить её, прежде всего отметим, что если движение (9) происходит так, как в задаче 1, т.е.  $G_1(t) = a(t)$ ,  $G_2(t) = b(t)$ , то *при выполнении условия (1) оказывается, что многоугольник  $M$  протащили между гвоздями  $G_1$  и  $G_2$ .*

Значит, *ширина*  $w = w(P_H)$  многоугольника с ручкой  $P_H$  не меньше ширины  $w_M$  многоугольника  $M$ . Противоположное неравенство, а с ним и тождество

$$w \equiv w_M, \quad (10)$$

сразу вытекают из следующего утверждения (которое будет доказано ниже):

*Если многоугольник  $M$  можно как-нибудь протащить между гвоздями  $G_1$ ,  $G_2$ , то это можно сделать и так, чтобы движение (9) происходило, как в задаче 1 при условии (1) и, тем самым, чтобы концы отрезка  $G_1G_2$  двигались по  $P_H$ .*

Кроме леммы 4, при проверке этого утверждения будет использована ещё одна лемма (лемма 5 *о главном интервале*), к формулировке и доказательству которой мы и приступаем.

Среди всех  $t \in [0; 1]$  в (9) имеются такие  $t$ , что пересечение отрезка  $G_1G_2$  с  $M$  пусто, такие  $t$ , что  $G_1G_2$  не содержит внутренних точек  $M$ , но  $G_1G_2 \cap P \neq \emptyset$ , и, наконец, на  $[0; 1]$  можно выделить открытое подмножество  $\Omega$  таких  $t$ , для которых отрезок  $G_1G_2$  содержит *внутренние* точки  $M$ .

**ЛЕММА 5.** *Среди интервалов, составляющих  $\Omega$ , есть такой, **главный**, интервал  $(t_0; t_1)$ , что при  $t \in [t_0; t_1]$  и происходит протаскивание*



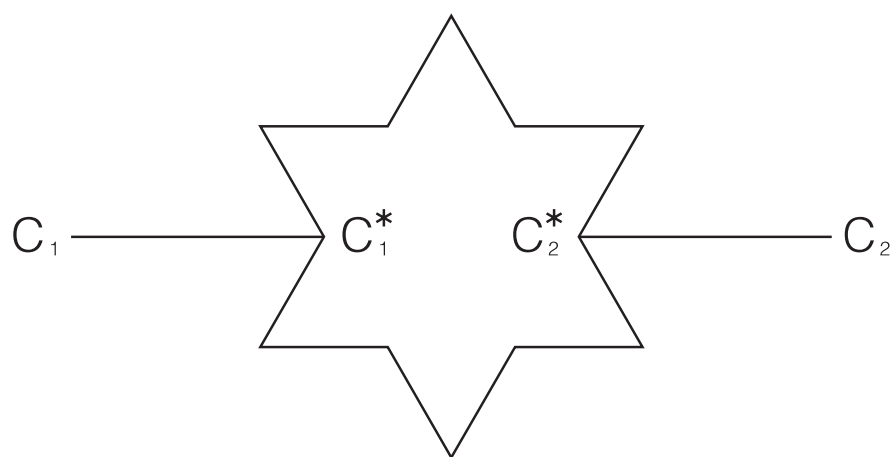


Рис. 14

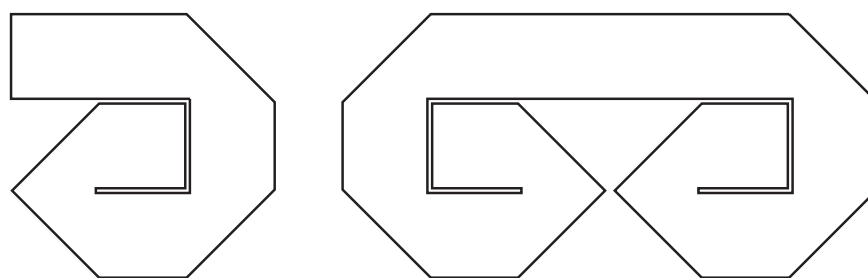


Рис. 15

многоугольника  $M$  между  $G_1$  и  $G_2$ : для каждой внутренней точки  $p \in M$  найдётся  $t = t(p) \in (t_0; t_1)$ , при котором отрезок  $G_1G_2$  содержит  $p$ ; при  $t \in (t_0; t_1)$  все внутренние точки многоугольника  $M$  переходят через отрезок  $G_1G_2$ .

Доказательство. Вообще говоря,  $\Omega$  содержит и другие, *неглавные*, интервалы  $I$ . Для  $t$ , принадлежащих каждому из них, отрезки  $G_1G_2$  содержат не все, а только часть внутренних точек  $M$ ; при  $t \in I$  эти точки *лишь временно переходят через отрезок  $G_1G_2$ , а потом возвращаются обратно*. Поэтому, если бы  $\Omega$  составляли только такие интервалы  $I$ , многоугольник  $M$  не был бы протасен между  $G_1$  и  $G_2$ . Значит,  $\Omega$  действительно содержит искомый интервал  $(t_0; t_1)$ .

Для главного интервала  $(t_0; t_1) \subseteq \Omega$  при  $t \in [t_0; t_1]$  точки  $P \in G_1G_2$ , ближайшие к  $G_1, G_2$ , обозначим (соответственно) через  $A$  и  $B$ ,  $A = A(t)$ ,  $B = B(t)$ . Отображения

$$t \in [t_0; t_1] \rightarrow A = A(t), \quad t \in [t_0; t_1] \rightarrow B = B(t), \quad (11)$$

могут оказаться разрывными (для невыпуклых многоугольников  $M$ ), но, меняя параметризацию (заменяя «перескоки»  $A(t-0)$  в  $A(t+0)$  и  $B(t-0)$  в  $B(t+0)$  «непрерывными переходами»), нетрудно сделать их непрерывными. При каждом из двух граничных значений  $t = t_0$  и  $t = t_1$  отрезок  $AB = A(t)B(t)$  (возможно, вырождающийся в точку — в случае, если  $A(t) = B(t)$ ), очевидно, лежит на границе  $M$ , так что существует такая сторона многоугольника  $s_i$ , что  $A(t_i)B(t_i) \subseteq s_i$ ,  $i = 0, 1$ . Поэтому легко доопределить (11) вне  $[t_0; t_1]$  и перейти от (11) к непрерывным отображениям (8), удовлетворяющим условиям леммы 4.

Применяя эту лемму, получаем, что существуют отображения  $A(t)$  и  $B(t)$ , обладающие всеми свойствами отображений (8) и, кроме того, такие, что  $|AB| \equiv \epsilon$ .

Полагая  $G_1 = A(t)$ ,  $G_2 = B(t)$ , получаем, что верна анонсированная выше

**ТЕОРЕМА 2.** *Если многоугольник  $M$  можно как-нибудь протащить между точками  $G_1, G_2$  на расстоянии  $\epsilon$ , то это можно сделать и так, чтобы движение (9) происходило, как в задаче 1 при условии (1); концы отрезка  $G_1G_2$  движутся при этом по  $P_H$ .*

Так как (по лемме 4)  $\epsilon \geq w$ , то при любом  $d > \epsilon$  соответствующий граф  $\Gamma_d$  принадлежит первому классу и, следовательно, содержит компоненты  $K_{1,2}$  и  $K_{3,4}$ . Отсюда для любого многоугольника  $M$  следует

**ТЕОРЕМА 3.** Если многоугольник  $M$  можно протащить между двумя точками на расстоянии  $e$ , то его можно протащить и между точками на расстоянии  $d > e$ .

Итак, задача из аннотации решена. Решена и задача 4: как уже отмечено, из теоремы 2 вытекает тождество (10), а поскольку в приведённых выше рассуждениях ручку  $H$  можно всюду заменить ручкой  $H^*$ , то  $w = w^*$  — ширина  $w$  многоугольника с ручкой  $P_H$  не зависит от расположения ручки  $H$ .

#### 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Остается доказать теорему двойственности. Подробно она сформулирована в разд. 1, а её краткая формулировка — следующая:

**ТЕОРЕМА 4.**  $w_M = d_M$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вследствие (10) ширина  $w_M$  равна  $d_{max}$  — максимальному значению длины  $d$  отрезка  $AB$ , который можно так переместить вдоль ломаной  $T$  из положения  $A_0B_0$  в положение  $A_1B_1 = B_0A_0$ , чтобы выполнялось условие (2); фазовая точка движется при этом по графу  $\Gamma_w$  из  $F_1$  в  $F_4$  (рис. 9).

Граф  $\Gamma_w$  содержит также путь из  $F_2$  в  $F_3$ .

Сопоставление перемещений отрезка  $AB$  вдоль  $T$ , изображаемых путями  $F_1F_4$  и  $F_2F_3$  (нижний фрагмент рисунка 9) делает очевидным равенство  $d_{max} = d_M$ .

Итак,  $w_M = d_M$ . Теорема двойственности доказана.

В заключение хочу высказать признательность друзьям и коллегам за помощь при подготовке этой статьи: А. М. Олевский обратил мое внимание на работу [1]; у меня не было этой работы под рукой, и И. В. Арнольд по моей просьбе сканировал и прислал мне её по e-mail; Н. Б. Васильев проявил завидное долготерпение, выслушивая по телефону мои доказательства и обсуждая их со мной; Д. Е. Долгов сделал на компьютере рисунки к статье. Всех их я искренне благодарю.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Goodman J.E., Pach J. and Yap C.K. Mountain Climbing, Ladder Moving and the Ring-Width of a Polygon. // Amer. Math. Monthly, Vol.96. 1989. P. 494–510.
- [2] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.