По-новому о старом: фрагменты классической математики

Счастливые билеты

С. К. Ландо

Статья составлена по материалам готовящейся к изданию книги «Лекции о производящих функциях», изд-во «Фазис» (лекции были прочитаны в Независимом Московском Университете). Советуем обратиться к этой книге за дополнительными примерами использования производящих функций для решения комбинаторных задач.

Рассмотрим одну популярную в начале 70-х годов задачу, ею как-то А. А. Кириллов открывал свой семинар для младшекурсников. В те времена человек, едущий в городском транспорте в Москве, должен был купить билет в автоматической кассе или у кондуктора. На билетах стояли шестизначные номера.

Билет назывался *счастливым*, если сумма первых трёх цифр его номера равнялась сумме последних трёх цифр.

Так, билеты с номерами 000000 и 123060 — счастливые, а билет с номером 123456 — несчастливый. Считалось, что счастливый билет приносит счастье (особенно, если его съесть).

Возникает вопрос, *сколько всего существует счастливых билетов*? Или: какова вероятность покупки счастливого билета?

Человеку, владеющему элементарными навыками программирования, нетрудно написать программу для подсчёта числа счастливых билетов. Простейшая такая программа перебирает все номера от 000000 до 999999, отбирая среди них счастливые. Давайте, однако, попробуем обойтись без машины.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 2, 1998(127–132)

Разобьем все счастливые билеты на классы, в каждом из которых сумма первых трёх цифр одинакова. Эта сумма может принимать значения от 0 (для тройки цифр 000) до 27 (для тройки 999). Поэтому число классов равно 28. Обозначим через a_n число различных троек цифр с суммой цифр n. Первые несколько значений a_n нетрудно вычислить:

▷ $a_0 = 1$ (есть всего одна тройка цифр 000 с суммой 0);

▷ $a_1 = 3$ (есть три тройки 001, 010, 001 с суммой цифр 1);

▷ $a_2 = 6$ (тройки 002, 020, 200, 011, 101, 110).

Легко видеть, что число счастливых билетов, сумма первых трёх цифр которых равна n, есть a_n^2. Действительно, как в начале, так и в конце номера счастливого билета можно поставить любую тройку цифр с суммой n. Таким образом, для подсчёта числа счастливых билетов нам достаточно вычислить числа a_n, а затем найти сумму квадратов этих 28 чисел.

Для вычисления значений a_n попробуем подсчитать сначала число одно- и двузначных чисел с суммой цифр n. Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots, 9$ существует ровно одно однозначное число с суммой цифр n (запись этого числа совпадает с записью числа n). Будем описывать однозначные числа многочленом

$$A_1(s) = 1 + s + s^2 + \dots + s^9.$$

Смысл у этого многочлена следующий:

коэффициент при s^n в многочлене A_1 равен числу однозначных чисел, сумма цифр которых равна n.

Другими словами, коэффициент при s^n в многочлене A_1 равен 1, если $0 \leqslant n \leqslant 9$, и равен 0, если $n > 9$.

Выпишем теперь многочлен $A_2(s)$, описывающий двузначные числа. Коэффициент при s^n в многочлене $A_2(s)$ равен числу двузначных чисел с суммой цифр n. (Мы рассматриваем и такие двузначные числа, в которых первая цифра или даже обе цифры могут равняться нулю.)

Нетрудно видеть, что степень многочлена A_2 равна 18. Действительно, 18 — наибольшая возможная сумма цифр двузначного числа. Несложно сосчитать и первые несколько коэффициентов этого многочлена:

$$A_2(s) = 1 + 2s + 3s^2 + 4s^3 + \dots.$$

Оказывается, многочлен A_2 легко строится по многочлену A_1.

Предложение 1. $A_2(s) = (A_1(s))^2$.

Доказательство. Произведение мономов s^k и s^m даёт вклад в коэффициент при мономе s^n многочлена $(A_1(s))^2$ в том и только в том случае, если $n = k + m$. Поэтому коэффициент при мономе s^n в многочлене $(A_1(s))^2$ есть в точности число способов представить число n в виде суммы $n = k + m, \quad k, m = 0, 1, \ldots, 9$. Таким образом, многочлен в правой части равенства совпадает с многочленом A_2.

Теперь нетрудно выписать и многочлен $A_3(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{27} s^{27}$.

Предложение 2. $A_3(s) = (A_1(s))^3$.

Доказательство. Доказательство практически дословно совпадает с доказательством предыдущего утверждения: коэффициент при s^n в многочлене $(A_1(s))^3$ равен числу представлений числа n в виде суммы трёх цифр $n = m + k + l, \quad m, k, l = 0, 1, \ldots, 9$.

Итак, задача о числе счастливых билетов свелась к следующему: надо подсчитать число p_0 — сумму квадратов коэффициентов многочлена $(A_1(s))^3$.

Обратите внимание на то, что умножение на многочлен $A_1(s)$ — очень простая операция. Вычисления можно провести вручную, затратив на них около десяти минут. Надобность в написании программы отпадает.

Однако можно не останавливаться на достигнутом и пойти дальше. Подставим вместо s выражение $e^{i\varphi}$. Тогда $A_3(e^{i\varphi}) = \left(A_1(e^{i\varphi})\right)^3$ будет тригонометрическим полиномом 27-й степени:

$$A_3(e^{i\varphi}) = a_0 + a_1 e^{i\varphi} + \cdots + a_{27} e^{27i\varphi}.$$

Воспользовавшись тем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\varphi} \cdot e^{-im\varphi}\, d\varphi = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A_3(e^{i\varphi})|^2\, d\varphi =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a_0 + a_1 e^{i\varphi} + \cdots + a_{27} e^{27i\varphi}\right) \left(a_0 + a_1 e^{-i\varphi} + \cdots + a_{27} e^{-27i\varphi}\right) d\varphi =$$
$$= a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{27}^2.$$

Суммируя геометрическую прогрессию и пользуясь тем, что

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin\varphi,$$

получаем

$$A_1(e^{i\varphi}) = 1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{9i\varphi} = \frac{1 - e^{10i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{e^{5i\varphi}}{e^{i\varphi/2}} \frac{\sin 5\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}};$$

откуда искомая величина равна

$$p_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 5\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right)^3 d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 10\varphi}{\sin \varphi} \right)^6 d\varphi. \qquad (1)$$

Попробуем оценить значение интеграла (1). График функции $f(\varphi) = \sin(10\varphi)/\sin\varphi$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ выглядит так, как показано на рис. 1. В нуле функция достигает своего максимума, равного 10. Вне отрезка

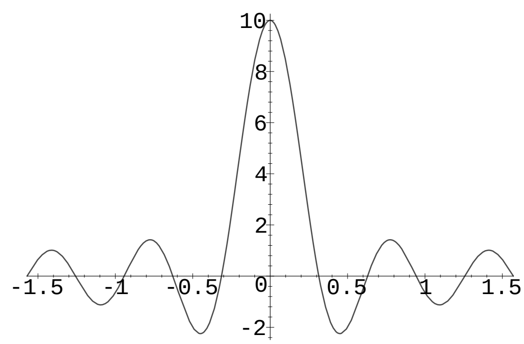

Рис. 1. *Вид графика функции* $f(\varphi) = \frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}$

$\left[-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}\right]$ величина функции f не превосходит $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} \approx 3$. Поэтому вклад дополнения к отрезку $\left[-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}\right]$ в интеграл (1) не превосходит $\pi \cdot 3^6 \approx 2100$ (на самом деле он значительно меньше).

Основная же составляюшая интеграла (1) сосредоточена на отрезке $\left[-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}\right]$. Для оценки вклада этого отрезка воспользуемся *методом стационарной фазы*. Этот метод позволяет оценить значение интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} f^t d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t \ln f} d\varphi$$

при $t \to \infty$. При больших значениях t величина интеграла определяется поведением функции $\ln f$ («фазы») в окрестности своей стационарной точки 0 (точки, в которой $(\ln f)' = 0$, или, что то же самое, $f' = 0$). В окрестности нуля $f(\varphi) \approx 10\left(1 - \frac{33}{2}\varphi^2\right)$, а $\ln f(\varphi) \approx \ln 10 - \frac{33}{2}\varphi^2$. При больших t имеем

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\left(\ln 10 - \frac{33}{2}\varphi^2\right)} d\varphi = e^{t \ln 10} \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{-\frac{33}{2}t\varphi^2} d\varphi \approx e^{t \ln 10} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{33t}}$$

Полагая $t = 6$ и вспоминая формулу (1), получаем приближённое равенство

$$p_0 \approx \frac{10^6}{3\sqrt{11\pi}} \approx 56700.$$

Полученный результат с хорошей точностью (отклонение составляет не более 3%) приближает искомое значение[1)].

Некоторые итоги

На основании рассмотренного примера можно сделать некоторые выводы о комбинаторных задачах и методах их решения.

Задачи перечислительной комбинаторики состоят в подсчёте числа объектов, принадлежащих некоторому семейству конечных множеств. У каждого множества семейства имеется свой номер (в задаче о числе счастливых билетов таким номером была сумма цифр трёхзначного числа).

Как правило, задача перечислительной комбинаторики «в принципе» разрешима: для каждого множества из семейства можно выписать все его элементы и таким образом узнать их число. Проблема, однако, состоит в том, чтобы найти «хорошее» решение, не требующее выписывания всех элементов изучаемых множеств.

Определить, что такое хорошее решение, довольно трудно. Зачастую можно лишь сравнить два решения и сказать, какое из них лучше.

При решении задач перечислительной комбинаторики очень полезно рассматривать производящие многочлены (или, более общо, производящие ряды). В нашем случае пользу принес производящий многочлен A_3. Операции с комбинаторными объектами очень естественно выражаются в терминах производящих функций. Так, переход от однозначных чисел с заданной суммой цифр к трёхзначным числам состоял просто в возведении производящего многочлена A_1 в куб.

[1)] Прим. ред.: Как-то участникам Всесоюзной математической олимпиады во время отдыха кто-то предложил задачу о счастливых билетах. Для всех ребят задача была новой. Большинство стало активно решать её. Прошло некоторое время, и один из школьников изложил решение, приведённое выше, включая формулу (1) и оценку числа счастливых билетов. Это был будущий филдсовский лауреат Владимир Дринфельд. (О филдсовских медалях см. статьи, помещённые в этом сборнике, стр. 19–40.)

Привлечение методов из смежных областей математики (например, из анализа) позволяет по-иному взглянуть на перечислительную задачу и найти новые, зачастую неожиданные, подходы к её решению.

Задачи

В заключение предлагаем несколько задач.

1. Докажите, что счастливых билетов ровно 55 252 штуки. (Используйте любой из обсуждавшихся способов или придумайте свой.)

2. Докажите, что число счастливых билетов равно

$$\binom{32}{5} - \binom{6}{1}\binom{22}{5} + \binom{6}{2}\binom{12}{5}.$$

3. Найдите выражение для числа счастливых билетов из $2r$ цифр в системе счисления с основанием q.

Список литературы

[1] *Савин А. П., Финк Л. М.* Разговор в трамвае. // Квант. 1975. №7. С. 67–70.

[2] *Финк Л. М.* Ещё раз о счастливых билетах // Квант. 1976. №12. С. 68–70.

[3] *Полиа Г., Сёге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978. Задача №30.