Решение обобщённой задачи Мальфатти с помощью комплексной (гиперболической) тригонометрии

В. З. Беленький А. А. Заславский

Как-то во время летнего отдыха мы задумались над следующей задачей: в углы данного $\triangle ABC$ вписать окружности так, чтобы они попарно касались друг друга. Несмотря на классически простую формулировку, тогда нам не удалось найти в литературе упоминаний об этой задаче и мы решили её самостоятельно. Впоследствии мы узнали[1], что эта задача давно известна как задача итальянского математика Мальфатти, опубликованная им в 1803 году [1], и её решению посвящена обширная литература.

Сам Мальфатти[2] в своей публикации приводит конечные формулы для искомых радиусов, но не даёт их вывода, указав лишь, что алгебраические выкладки очень громоздки. В 1826 году чисто геометрическое решение, и тоже без доказательства, предложил Я. Штейнер [2] — один из крупнейших геометров прошлого века. Полное доказательство метода Штейнера впервые было дано Шретером в 1874 году, его изложение можно найти в прекрасном сборнике задач на геометрические построения Ю. Петерсена [3]. Все эти сведения приводятся в книге А. Адлера, изданной в русском переводе в Одессе в 1910 году [4]. Прямое геометрическое решение задачи даётся в одной из книг серии «Библиотека математического кружка», см. [5].

Решение, найденное нами, оказалось оригинальным по подходу и совершенно отличным от методов, использовавшихся ранее. Нам кажется, что этот метод представляет самостоятельный интерес, причем не только для первоначальной геометрической задачи. Предложенное нами решение было опубликовано в журнале «Квант» [6].

[1] Авторы признательны А. А. Егорову и А. А. Фридману за библиографические сведения.

[2] Как сообщил В. В. Прасолов, Мальфатти решал другую задачу: поместить в треугольник три непересекающиеся круга максимальной общей площади. Легко убедиться, что решение, приведённое Мальфатти, не всегда оптимально. Более удивителен тот факт, что оно ***никогда не оптимально.***

В учебнике Ж. Адамара [7] задача Мальфатти рассмотрена в обобщённой постановке и дано её полное решение по методу Штейнера – Шретера – Петерсена. Здесь мы дадим решение обобщённой задачи Мальфатти, развивая основную идею нашего метода.

Обобщённая задача Мальфатти. *Даны три прямые общего положения. Построить три взаимно касающиеся окружности так, чтобы окружности* O_1 *и* O_2 *касались прямой* l_3*, окружности* O_2 *и* O_3 *касались прямой* l_1*, окружности* O_3 *и* O_1 *касались прямой* l_2.

Имеется 10 различных конфигураций, порождающих для данной тройки прямых 32 решения (см. рис. 1). Далее мы получим единообразным способом формулы для радиусов искомых окружностей во всех 32 случаях.

1. Основная система уравнений

Решения задачи Мальфатти будут получаться из решений систем вида

$$\begin{cases} u^2+2uv\cdot\sqrt{1-c/p}+v^2=c,\\ v^2+2vw\cdot\sqrt{1-a/p}+w^2=a,\\ w^2+2wu\cdot\sqrt{1-b/p}+v^2=b, \end{cases} \tag{1}$$

где неизвестные u, v, w — комплексные числа (как будет видно далее, в решениях задачи Мальфатти эти неизвестные будут либо вещественными, либо чисто мнимыми), а (комплексные) параметры a, b, c, p удовлетворяют условиям

$$p=\frac{a+b+c}{2},\quad a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\quad D\stackrel{\mathrm{def}}{=}p(p-a)(p-b)(p-c)\neq 0.$$

Ниже (см. п. 3, стр. 145) будет получено решение системы (1), исходящее из геометрических соображений, когда уравнения в (1) понимаются как утверждения теоремы косинусов для трёх треугольников, вписанных в одну и ту же окружность. Условие равенства сумм углов этих треугольников 180 градусам даёт линейные уравнения для углов, противолежаших сторонам. После решения этих уравнений стороны вычисляются по теореме синусов.

Для решения обобщённой задачи Мальфатти придётся рассматривать такие «треугольники», стороны которых являются произвольными комплексными числами (точнее, как будет показано, потребуются треугольники с отрицательными и чисто мнимыми длинами сторон). Поэтому начнем с краткого объяснения, что такое «треугольник с комплексными сторонами».

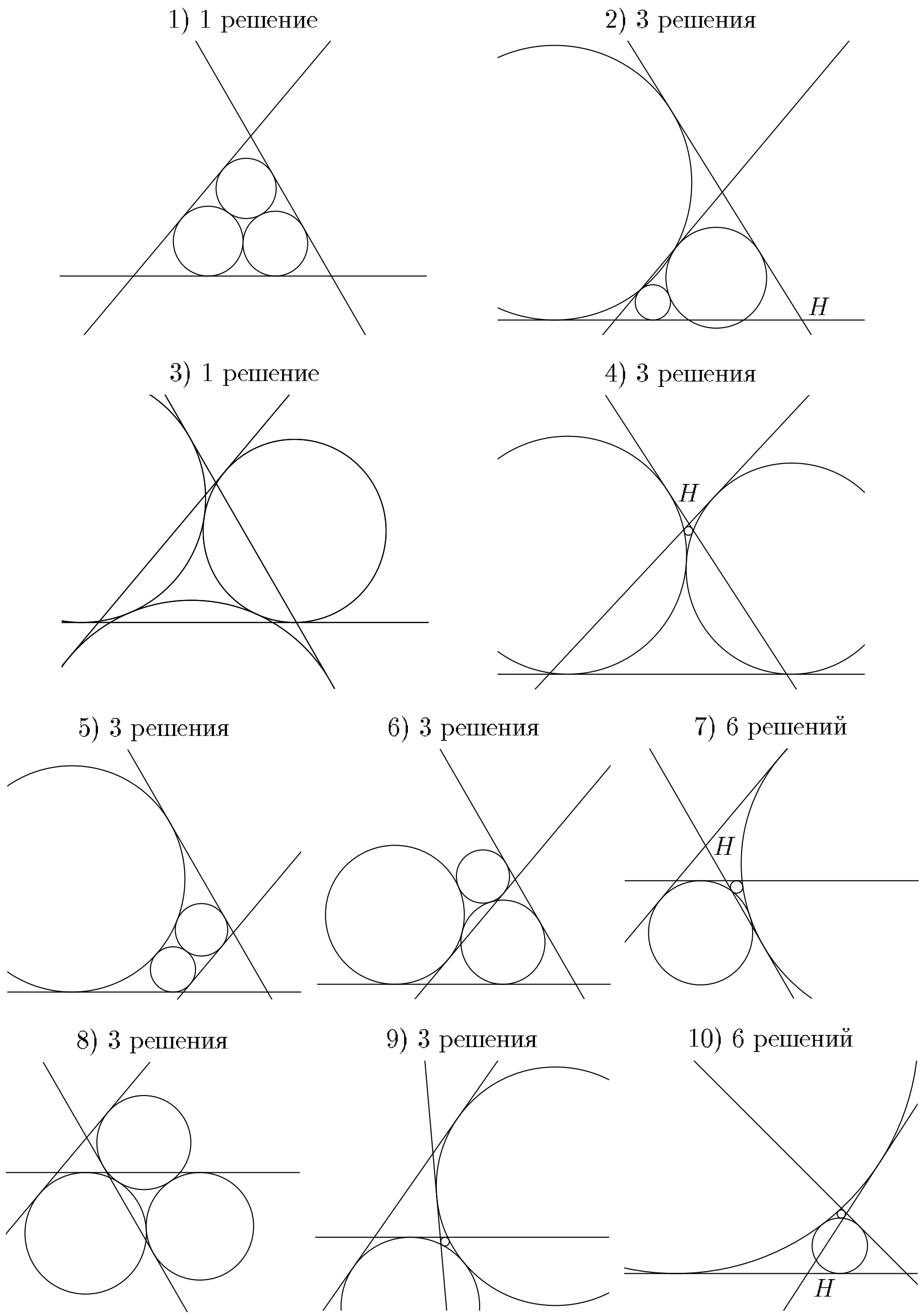

Рис. 1. *Конфигурации обобщённой задачи Мальфатти.*

2. Комплексные треугольники

Определение 1. Пусть (a, b, c) — тройка произвольных комплексных чисел, для которой величина

$$D = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{1}{16}\left(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4\right) \neq 0,$$

здесь $p \overset{\text{def}}{=} (a+b+c)/2$. Будем называть такую тройку *комплексным треугольником*, а числа a, b, c — *сторонами* этого треугольника.

Будем последовательно развивать эту геометрическую аналогию. Величину $S = \pm\sqrt{D}$ естественно назвать *площадью* треугольника (формула Герона). Площадь считаем в комплексном случае определённой с точностью до знака. Величину $R = abc/4S$ назовем *радиусом описанной окружности.*

Определим углы комплексного треугольника. По аналогии с теоремами синусов и косинусов имеем равенства

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{2R}, \tag{2}$$

которые будем считать определением углов треугольника. Прямое вычисление показывает, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 + \frac{4D}{b^2c^2} = 1,$$

поэтому корректность определения углов обеспечивается следующей леммой.

Лемма 1. *Для любых двух комплексных чисел z_1, z_2, удовлетворяющих соотношению*

$$z_1^2 + z_2^2 = 1,$$

найдётся такое комплексное число $\psi = \varphi + it$, $\varphi, t \in \mathbb{R}$, что

$$\cos\psi = z_1, \quad \sin\psi = z_2,$$

причем t определено однозначно, а φ определено с точностью до $2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Запишем число $z = z_1 + iz_2$ в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, этим число r определено однозначно, а число φ — с точностью до $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Полагаем $t = -\ln r$, $\psi = \varphi + it$.

Далее используем формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и вытекающие из неё выражения для синуса $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ и косинуса $\cos x = \frac{1}{2i}(e^{ix} + e^{-ix})$ для того, чтобы вычислить синус и косинус числа ψ:

$$\begin{gathered}
z = e^{-t} \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{i\psi}\\
\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1 + iz_2} = z_1 - iz_2\\
\cos\psi = \frac{1}{2} \cdot (z + \frac{1}{z}) = z_1\\
\sin\psi = \frac{1}{2i} \cdot (z - \frac{1}{z}) = \frac{1}{2i} \cdot 2iz_2 = z_2.
\end{gathered}$$

Теорема 1. *Сумма углов комплексного треугольника с точностью до $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, равна π.*

Доказательство. Другими словами, $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1$, где через α, β, γ обозначены углы треугольника. Справедливость этого равенства проверяется вычислением с использованием (1) и тригонометрических формул сложения.

Замечание. Верно и обратное. Любые комплексные числа α, β, γ, для которых выполнено $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, являются углами некоторого комплексного треугольника. (Его стороны равны $\lambda \sin\alpha$, $\lambda\sin\beta$, $\lambda\sin\gamma$.)

3. Решение основной системы

Введём новые параметры $\tilde{a} = \pm\sqrt{a}$, $\tilde{b} = \pm\sqrt{b}$, $\tilde{c} = \pm\sqrt{c}$, $\tilde{R} = \pm\sqrt{p}/2$. Тогда уравнения системы (1) есть не что иное, как теорема косинусов, записанная для треугольников $(u, v, \tilde{c})$, $(v, w, \tilde{a})$, $(w, u, \tilde{b})$, у которых радиус описанной окружности равен $\tilde{R}$.

Углы, противолежащие сторонам $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, однозначно определяются через параметры $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и $\tilde{R}$. Обозначая эти углы через $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, имеем:

$$\begin{gathered}
\sin\hat{a} = \frac{\tilde{a}}{2\tilde{R}}, \quad \sin\hat{b} = \frac{\tilde{b}}{2\tilde{R}}, \quad \sin\hat{c} = \frac{\tilde{b}}{2\tilde{R}},\\
\cos\hat{a} = -\sqrt{1 - \frac{a}{p}},\ \cos\hat{b} = -\sqrt{1 - \frac{b}{p}},\ \cos\hat{c} = -\sqrt{1 - \frac{c}{p}}.
\end{gathered}$$

Параметры $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ определены с точностью до знака. Перемена знака у одного из них меняет знак соответствующего угла ($\hat{a}$, $\hat{b}$ или $\hat{c}$), а остальные два угла в соответствующем треугольнике ($(v, w, \tilde{a})$, $(w, u, \tilde{b})$ или $(u, v, \tilde{c})$) меняет на смежные ($\hat{x} \mapsto \pi - \hat{x}$) в силу теоремы косинусов.

У остальных углов в треугольниках $(v, w, \tilde{a})$, $(w, u, \tilde{b})$, $(u, v, \tilde{c})$ однозначно определены (через параметры и неизвестные) только синусы, которых, впрочем, достаточно для выражения исходных неизвестных через эти углы. Мы хотим перейти к угловым неизвестным $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, относительно которых будем иметь по теореме 1 линейную систему уравнений (сумма углов в треугольниках равна π). Из-за указанной неоднозначности получаем такой набор систем линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \pm (\frac{\pi}{2} - \hat{u}) + \frac{\pi}{2} \pm (\frac{\pi}{2} - \hat{v}) + \hat{c} = \pi \pmod{2\pi}, \\ \frac{\pi}{2} \pm (\frac{\pi}{2} - \hat{v}) + \frac{\pi}{2} \pm (\frac{\pi}{2} - \hat{w}) + \hat{a} = \pi \pmod{2\pi}, \\ \frac{\pi}{2} \pm (\frac{\pi}{2} - \hat{w}) + \frac{\pi}{2} \pm (\frac{\pi}{2} - \hat{u}) + \hat{b} = \pi \pmod{2\pi}. \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку исходные неизвестные u, v, w не меняются при замене углов $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$ на смежные, систем (3) не 64, как кажется на первый взгляд, а всего лишь 8 (важно лишь с одинаковыми или разными знаками входит каждая переменная в уравнения этих систем).

Проанализируем возможные расстановки знаков. Если нечётное число переменных входит с разными знаками в уравнения системы (3), то такая система, как нетрудно видеть, вырожденная, и для её разрешимости должны выполняться соотношения на параметры. Эти соотношения после подходящей перемены знаков у углов $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ приводятся к виду $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 0$.

Покажем, что условие $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 0$ влечёт $D = 0$. По замечанию к теореме 1 углы $\pi - \hat{a}$, $\pi - \hat{b}$, $\pi - \hat{c}$ являются углами треугольника, стороны которого равны с точностью до пропорциональности $\sin \hat{a}$, $\sin \hat{b}$, $\sin \hat{c}$. Запишем теорему косинусов для этого треугольника в виде

$$\cos(\pi - \hat{a}) = \frac{\sin^2(\pi - \hat{b}) + \sin^2(\pi - \hat{c}) - \sin^2(\pi - \hat{a})}{2 \sin(\pi - \hat{b}) \sin(\pi - \hat{c})}.$$

Подставляя в это равенство выражения через параметры, получаем цепочку следствий

$$\sqrt{1 - \frac{a}{p}} = \frac{b/p + c/p - a/p}{2\tilde{b}\tilde{c}/p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p-a}{p} = \frac{(p-a)^2}{bc} \quad \Longrightarrow$$

$$(p-a)p = bc \quad \Longrightarrow \quad a^2 = (b-c)^2 \quad \Longrightarrow \quad (p-b)(p-c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = 0.$$

Итак, мы показали, что чётное число переменных входит в уравнения (3) с разными знаками. Если таких переменных две, то можно считать без ограничения общности, что знаки + выбраны у них в одном и том же уравнении. Поэтому имеем 4 системы линейных уравнений, дающие все решения исходной системы (1). Запишем две из них:

$$\begin{cases} \hat u+\hat v+\hat c=\pi \pmod{2\pi}, \\ \hat v+\hat w+\hat a=\pi \pmod{2\pi}, \\ \hat w+\hat u+\hat b=\pi \pmod{2\pi}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat u+\hat v-\hat c=\pi \pmod{2\pi}, \\ \hat v+\hat w+\hat a=\pi \pmod{2\pi}, \\ \hat w+\hat u+\hat b=\pi \pmod{2\pi}, \end{cases} \tag{4}$$

остальные получаются из правой системы в (4) циклическим сдвигом.

Решая системы (4), имеем

$$\begin{aligned} \hat u &= \frac{-\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c}{2}\pi-(\hat p-\hat a), & \hat u &= \frac{-\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c}{2}\pi+(\hat p-\hat b), \\ \hat v &= \frac{\sigma_a-\sigma_b+\sigma_c}{2}\pi-(\hat p-\hat b), & \hat v &= \frac{\sigma_a-\sigma_b+\sigma_c}{2}\pi+(\hat p-\hat a), \\ \hat w &= \frac{\sigma_a+\sigma_b-\sigma_c}{2}\pi-(\hat p-\hat c), & \hat w &= \frac{\sigma_a+\sigma_b-\sigma_c}{2}\pi-\hat p, \end{aligned}$$

где использовано обозначение $\hat p = \frac{1}{2}(\hat a+\hat b+\hat c)$, а переменные $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ принимают значения ± 1. Легко видеть, что с точностью до общего для всех переменных кратного π эти выражения равны

$$\begin{aligned} \hat u &= \frac{\pi}{2}-(\hat p-\hat a), & \hat u &= \frac{\pi}{2}-(\hat p-\hat a), \\ \hat v &= \frac{\pi}{2}-(\hat p-\hat b), & \hat v &= \frac{\pi}{2}-(\hat p-\hat b), \\ \hat w &= \frac{\pi}{2}-(\hat p-\hat c), & \hat w &= \frac{\pi}{2}-\hat p. \end{aligned}$$

Сдвиг всех угловых переменных на π приводит к изменению знака у переменных u, v, w. Поскольку $u=\sqrt{p}\sin\hat u, \ldots$, то получаем окончательные выражения для всех решений системы (1) через тригонометрические функции угловых параметров (выражение перед матрицей применяется к каждому элементу матрицы, каждая строчка матрицы даёт два решения системы, отличающиеся изменением знака у всех неизвестных):

$$(u,v,w) = \pm\sqrt{p}\cos\begin{pmatrix} \hat p-\hat a & \hat p-\hat b & \hat p-\hat c \\ \hat p & \hat p-\hat c & \hat p-\hat b \\ \hat p-\hat c & \hat p & \hat p-\hat a \\ \hat p-\hat b & \hat p-\hat a & \hat p \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Обратим внимание на то, что хотя $\sin\hat p$ и $\cos\hat p$ определены лишь с точностью до знака (половинный угол известного угла), решений это не добавляет.

Заметим, что формулы (5) могут быть записаны как алгебраические функции от исходных параметров.

4. Формулы для радиусов окружностей в задаче Мальфатти

Теперь покажем, как из решений основной системы получаются выражения для радиусов окружностей в задаче Мальфатти.

Будем использовать обозначения, введённые на рис. 2.

Для любого решения задачи Мальфатти выполняются равенства

$$\begin{cases} a = BC = \pm\, BB_C \pm B_CC_B \pm C_BC, \\ b = AC = \pm\, AA_C \pm A_CC_A \pm C_AC, \\ c = AB = \pm\, AA_B \pm A_BB_A \pm B_AB. \end{cases} \tag{6}$$

Выбор знаков зависит от рассматриваемой конфигурации.

Простые вычисления показывают, что $B_CC_B = 2\sqrt{r_br_c}$ (и ещё два аналогичных равенства получаются циклическим сдвигом $A \to B \to C \to A$). Коэффициент пропорциональности между r_b и BB_A зависит от величины угла $\angle ABC = \beta$ (он равен $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если окружность вписана во внутренний угол или вертикальный с ним, в противном случае он равен $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$). Введём неизвестные u, v, w, модули которых

$$|u| = \sqrt{AA_B} = \sqrt{AA_C};\ |v| = \sqrt{BB_C} = \sqrt{BB_A};\ |w| = \sqrt{CC_A} = \sqrt{CC_B},$$

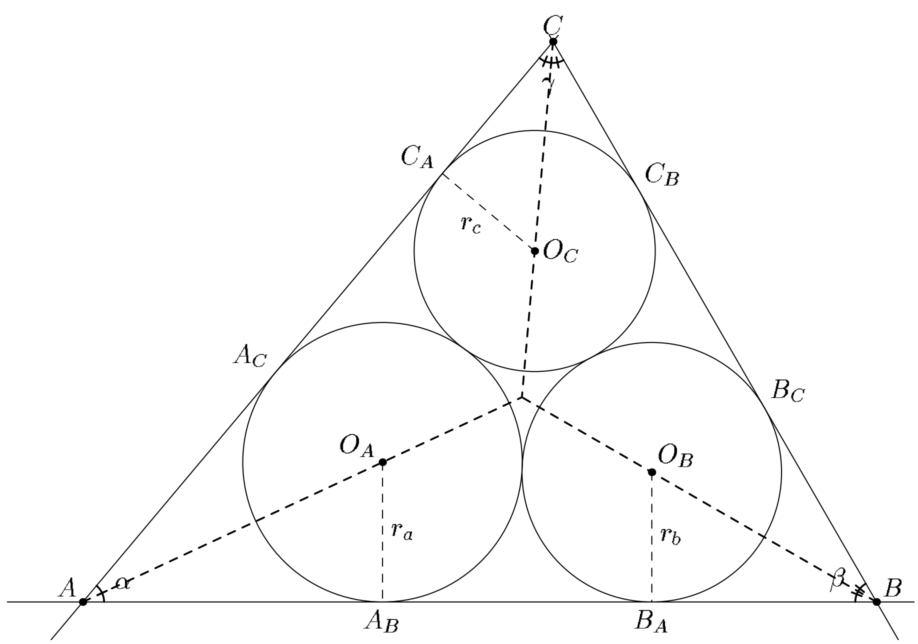

Рис. 2. *Случай, когда в (6) все знаки +.*

а аргументы будут выбираться для разных конфигураций по-разному из возможных значений $k\frac{\pi}{4}$, $k = 0\ldots 3$. Тогда

$$A_B B_A = 2\sqrt{r_a r_b} = 2|u||v|\sqrt{\operatorname{tg}^{\pm 1}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^{\pm 1}\frac{\beta}{2}}$$
$$B_C C_B = 2\sqrt{r_b r_c} = 2|v||w|\sqrt{\operatorname{tg}^{\pm 1}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^{\pm 1}\frac{\gamma}{2}}$$
$$C_A A_C = 2\sqrt{r_c r_a} = 2|w||u|\sqrt{\operatorname{tg}^{\pm 1}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}^{\pm 1}\frac{\alpha}{2}}.$$

Тангенс или котангенс в этих формулах выбираются в зависимости от того, вписана ли соответствующая окружность во внутренний (или вертикальный ему) угол, либо же в смежный с ним.

Выразим тангенсы половинных углов треугольника через его стороны. Для этого воспользуемся формулой $S^2 = p^2 r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

и аналогичные формулы для двух других углов. Из этих формул получаются следующие соотношения (опять-таки приводится одно соотношение, из которого перестановками сторон можно получать аналогичные):

$$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{p-c}{p}} = \sqrt{1-\frac{c}{p}}, \quad \sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{p-a}{p-b}}, \tag{7}$$

$$\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{p}{p-c}}. \tag{8}$$

Подставляя полученные выражения в систему (6), будем получать системы уравнений относительно $|u|, |v|, |w|$ и сводить их к системе (1) выбором аргументов неизвестных и преобразованиями параметров.

4.1. Первая восьмёрка решений

Пусть все три окружности вписаны во внутренние углы. Тогда коэффициенты при средних слагаемых в левых частях системы (6) имеют вид (7), поэтому система (6) сразу имеет вид (1) с точностью до знаков слагаемых в левых частях уравнений.

Положительные знаки в системе (6) соответствуют первой конфигурации на рис. 1 (см. стр. 143). Для этой конфигурации выполняется система (1), если считать неизвестные u, v, w положительными. Уравнения (6) для второй конфигурации можно привести к виду (1), поменяв знак у одной из неизвестных (это изменит два знака в средних слагаемых).

Решим систему (1), как описано выше. Одновременная замена знаков не меняет геометрического решения (мы используем квадраты неизвестных и попарные произведения). Поэтому получается четыре различных решения. Но как было показано выше, решения, соответствующие первой и второй конфигурациям, удовлетворяют системе (1) при различных значениях переменных. Таким образом, формула (5) даёт решения для этих конфигураций.

Чтобы найти решения, соответствующие третьей и четвёртой конфигурациям на рис. 1, заметим, что этим конфигурациям отвечает выбор отрицательных знаков у средних слагаемых в (6) и, как и в предыдущем случае, перемена знака у одной из неизвестных. Изменение знака у средних слагаемых можно выразить в терминах угловых параметров как сдвиг на π значений всех угловых параметров. Поэтому (выбираем подходящий знак!) в (5) синусы и косинусы поменяются местами.

4.2. Остальные решения

Нетрудно убедиться, разглядывая рис. 1, что во всех остальных конфигурациях одна окружность вписана во внутренний (или вертикальный ему) угол, а две другие — во внешние углы треугольника, образованного прямыми. Понять это можно и с помощью рассуждения — если одна окружность вписана во внешний угол, а две другие — нет, то одну из пар окружностей будет разделять одна из прямых l_1, l_2, l_3. Аналогично в случае, когда все три окружности вписаны во внешние углы.

Итак, все остальные решения разбиваются на три группы, в зависимости от того, в какой из внутренних углов вписана окружность. Мы будем считать без ограничения общности, что вершина, соответствующая этому углу, — это B. Две другие серии решений получаются из данной циклическими перестановками вершин.

Перепишем систему (6) с учётом соотношений (7–8). Получаем

$$\begin{cases} c = \pm\,|u|^2 \pm 2|u||v|\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}} \pm |v|^2 = \pm|u|^2 \pm 2|u||v|\sqrt{\dfrac{p-a}{p-b}} \pm |v|^2, \\ a = \pm\,|v|^2 \pm 2|u||v|\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}} \pm |w|^2 = \pm|v|^2 \pm 2|u||v|\sqrt{\dfrac{p-c}{p-b}} \pm |w|^2, \\ b = \pm\,|w|^2 \pm 2|w||u|\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}} \pm |u|^2 = \pm|w|^2 \pm 2|w||u|\sqrt{\dfrac{p}{p-b}} \pm |u|^2. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим конфигурацию 5 на рис. 1. Расставим для неё знаки в (9) и введем новые параметры $a' = -a$, $b' = b$, $c' = -c$. Получим

$$\begin{cases} c' = |u|^2 + 2|u||v|\sqrt{-\left(1 - \dfrac{c'}{p'}\right)} - |v|^2, \\ a' = -|v|^2 + 2|u||v|\sqrt{-\left(1 - \dfrac{a'}{p'}\right)} + |w|^2, \\ b' = |w|^2 + 2|w||u|\sqrt{1 - \dfrac{b'}{p'}} + |u|^2. \end{cases} \tag{10}$$

Если считать, что неизвестные u, w — положительные, а v — чисто мнимая с отрицательной мнимой частью, то система (10) превращается в систему (1) относительно параметров a', b', c' (эту замену можно проинтерпретировать как переход к комплексному треугольнику со сторонами $(-a, b, -c)$).

Решения этой системы задаются формулами (5). Нам нужно убедиться, что среди них есть решение для конфигурации 5. Для этого выразим решения (5) через гиперболические функции[3)] от мнимых частей угловых параметров.

Пусть

$$\hat{a} = \varphi_a + it_a,\ \hat{b} = \varphi_b + it_b,\ \hat{c} = \varphi_c + it_c.$$

Тогда, используя формулу Эйлера, для углового параметра $\hat{c}$ можно записать следующие равенства

$$\begin{aligned} \cos\hat{c} &= -i\sqrt{\frac{p-a}{p-b}} = \operatorname{ch} t_c \cos\varphi_c - i \operatorname{sh} t_c \sin\varphi_c, \\ \sin\hat{c} &= \sqrt{\frac{c}{p-b}} \qquad = \operatorname{ch} t_c \sin\varphi_c + i \operatorname{sh} t_c \cos\varphi_c. \end{aligned}$$

Из этих и аналогичных равенств получаем выражения для вещественной и мнимой части $\hat{c}$ и $\hat{a}$:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \frac{\pi}{2},\ t_c = \operatorname{arcch}\sqrt{\frac{c}{p-b}} = \operatorname{arcsh}\sqrt{\frac{p-a}{p-b}}; \\ \varphi_a &= \frac{\pi}{2},\ t_a = \operatorname{arcch}\sqrt{\frac{a}{p-b}} = \operatorname{arcsh}\sqrt{\frac{p-c}{p-b}}. \end{aligned}$$

[3)] Напомним, что гиперболические функции определяются так: $\operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} (e^x + e^{-x})/2$, $\operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} (e^x - e^{-x})/2$. Подробнее о свойствах гиперболических функций можно прочитать в [8].

Для углового параметра $\hat{b}$ формулы несколько отличаются:

$$\begin{aligned}
&\cos\hat{b} = -\sqrt{\frac{p}{p-b}} = \operatorname{ch} t_b \cos\varphi_b - i \operatorname{sh} t_b \sin\varphi_b,\\
&\sin\hat{b} = -i\sqrt{\frac{b}{p-b}} = \operatorname{ch} t_b \sin\varphi_b + i \operatorname{sh} t_b \cos\varphi_b,\\
&\varphi_b = \pi,\\
&t_b = -\operatorname{arcch}\sqrt{\frac{p}{p-b}} = -\operatorname{arcsh}\sqrt{\frac{b}{p-b}}.
\end{aligned}$$

Через t обозначим $(t_a+t_b+t_c)/2$. Получаем искомое выражение формул (5) через мнимые части угловых параметров.

$$(u,v,w) = \pm\sqrt{p-b}\begin{pmatrix} \operatorname{sh}(t-t_a) & i\operatorname{ch}(t-t_b) & \operatorname{sh}(t-t_c)\\ -i\operatorname{ch} t & \operatorname{sh}(t-t_c) & i\operatorname{ch}(t-t_b)\\ \operatorname{sh}(t-t_c) & -i\operatorname{ch} t & \operatorname{sh}(t-t_a)\\ i\operatorname{ch}(t-t_b) & \operatorname{sh}(t-t_a) & -i\operatorname{ch} t \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Первая строка соответствует решению для конфигурации 5. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что $(t-t_a)$, $(t-t_c)$ отрицательны. Элементарными вычислениями с учётом неравенства треугольника для (a,b,c) проверяется, что $\operatorname{sh}(t_b+t_c) < 0 < \operatorname{sh} t_a$, откуда в силу монотонности гиперболического синуса следует, что $t_b+t_c < t_a$. Второе неравенство доказывается аналогично.

Сравнивая аргументы неизвестных в (11) и требуемые наборы знаков в системах (6) для конфигураций 6 и 7, убеждаемся, что остальные три строки также дают решения задачи Мальфатти: третья — для конфигурации 6, вторая — для конфигурации 7, когда отмеченная на рис. 1 вершина $H=C$, четвёртая — для конфигурации 7, когда $H=A$.

Как и в случае первой восьмёрки решений, выписывая системы (6) для конфигураций 8–10, можно проверить, что при подходящем выборе аргументов неизвестных u,v,w эти системы совпадают с системой (10), если изменить знаки коэффициентов при средних слагаемых. Это означает сдвиг угловых параметров на π (напомним, что знаки синусов угловых параметров выбираются произвольно). Получаем следующие решения:

$$(u,v,w) = \pm\sqrt{p-b}\begin{pmatrix} i\operatorname{ch}(t-t_a) & -\operatorname{sh}(t-t_b) & i\operatorname{ch}(t-t_c)\\ -\operatorname{sh} t & i\operatorname{ch}(t-t_c) & -\operatorname{sh}(t-t_b)\\ i\operatorname{ch}(t-t_c) & -\operatorname{sh} t & i\operatorname{ch}(t-t_a)\\ -\operatorname{sh}(t-t_b) & i\operatorname{ch}(t-t_a) & -\operatorname{sh} t \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

В этих формулах первая строка соответствует конфигурации 8, а третья — конфигурации 9. В этом можно убедиться, сравнивая значения $|v|$ в одном и другом случае. Вторая и четвёртая строки соответствуют двум случаям конфигурации 10.

5. Геометрическая интерпретация решений

В заключение коротко опишем геометрическую интерпретацию решений.

Для первой восьмёрки решений рассмотрим сферу радиуса $\sqrt{p}/2$ и сферический треугольник $\tilde{\Delta}$ на ней, стороны которого стягиваются хордами длин $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. Плоскости, проходящие через центр сферы и стороны $\tilde{\Delta}$ разбивают сферу на 8 сферических треугольников. Каждый из этих треугольников определяет одно из решений. А именно, впишем в треугольник окружность, тогда расстояния между вершинами треугольника и точками касания дают модули искомых неизвестных u, v, w.

В остальных случаях нужно провести аналогичное построение в пространстве, снабжённом псевдометрикой $d^2 = x^2 - y^2 - z^2$. Роль сфер в этом пространстве играют двуполосные гиперболоиды (псевдосферы), а их центральные плоские сечения суть «большие круги». Три таких сечения разбивают псевдосферу на 8 областей, одна из них имеет линейные размеры $\sqrt{a'}$, $\sqrt{b'}$, $\sqrt{c'}$. В псевдометрике они являются либо вещественными, либо чисто мнимыми числами. Окружность, вписанная в псевдосферический треугольник, определяется точками касания образующих его дуг с общей касательной плоскостью. Модули расстояний от точек касания вписанной окружности до вершин треугольника дают модули искомых неизвестных.

Список литературы

[1] *Malfatti.* Memoirie di matematica. Tomo X. Parte I. Modena. 1803.

[2] *Steiner J.* Einige geometrische Betrachtungen. // Crelle J. Parte I. 1826.

[3] *Petersen J.* Methodes et theories pour la resolution des problemes des constructions geometriques. Paris: Gautier-Villars. 1880.

[4] *Адлер А.* Теория геометрических построений. Одесса: изд-во “Mathesis”. 1910.

[5] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы математики, ч. 2. Геометрия (планиметрия). М.: Гостехиздат. 1952. (Серия «Библиотека математического кружка».)

[6] *Беленький В. З., Заславский А. А.* О задаче Мальфатти. // Квант. 1994. №4.

[7] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия, часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз. 1948.

[8] *Шерватов В. Г.* Гиперболические функции. М.: Гостехиздат. 1954. (Серия «Популярные лекции по математике».)