Мы хотели бы постоянно обсуждать тему «Учитель и ученик» в нашем журнале. В отечественной науке, как, пожалуй, нигде еще, практически для каждого крупного математика на начальном этапе его карьеры огромную роль играет общение с Учителем, который поставил первую задачу, был первым, кто выслушал её решение, ободрил и подсказал, чем заниматься дальше.

В июне прошлого года исполнилось 60 лет одному из крупнейших математиков современности, главе блестящей научной школы — академику Владимиру Игоревичу Арнольду. К его юбилею московское издательство «Фазис» выпустило замечательную книгу «Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60». Редакционную подготовку материалов осуществлял один из учеников В. И. Арнольда — Михаил Борисович Севрюк. Мы предлагаем читателям фрагмент из интервью, данного им В. М. Тихомирову для нашего журнала. Оно вполне соответствует теме «Учитель и ученик». Мы надеемся, что читателю будет интересно узнать, как постепенно В. И. Арнольд вводит своего ученика в науку, как экзаменует, как и какие ставит задачи и большие проблемы.

Мой научный руководитель — В. И. Арнольд

М. Б. Севрюк

Огромный вклад, внесённый Владимиром Игоревичем в математику второй половины уходящего века, относится ко всем сторонам научного творчества — и к решению задач, причем задач классических, которые стояли десятилетиями, и к постановке новых проблем, и к созданию новых теорий, и к совершенствованию математического образования.

Говоря о классических задачах, достаточно упомянуть решённую им тринадцатую проблему Гильберта. Владимир Игоревич ещё в студенческие годы сделал (вслед за прорывом в этой области, совершенным его учителем Андреем Николаевичем Колмогоровым) завершающий шаг в доказательстве того, что любую непрерывную функцию трёх переменных можно представить как суперпозицию непрерывных функций двух переменных. Другой пример — решение классической проблемы Биркгофа об устойчивости эллиптической неподвижной точки отображения плоскости на себя, сохраняющего площадь. Третий пример — доказательство существования большого числа квазипериодических движений в планетных системах (проблема, стоявшая в небесной механике, по крайней мере, со времен Пуанкаре).

В том, что касается построения теорий, необходимо сказать, что Владимир Игоревич открыл много новых путей в математике и нашёл очень много неожиданных связей между различными её областями. Большинство новых математических теорий, созданных им, основывается именно на таких связях. Он сам писал в одной из своих последних работ «От суперпозиций до теории КАМ» (мемуарного характера), что обнаружение связей между, казалось бы, совершенно далекими друг от друга вещами — это одно из самых больших наслаждений, которое может дать математику наша наука, и ему выпало счастье испытать это наслаждение несколько раз.

Например, в теории особенностей (а Владимир Игоревич является одним из её создателей) им была открыта фундаментальная связь между критическими точками гладких функций и группами Кокстера, что привело к современной классификации особенностей. Ему принадлежит установление связи между шестнадцатой проблемой Гильберта об овалах вещественных алгебраических кривых и четырёхмерной топологией. Это вызвало прорыв в исследованиях, связанных с шестнадцатой проблемой Гильберта. Владимир Игоревич нашёл совершенно замечательную связь между теорией кос, с одной стороны, и теорией особенностей и алгебраической геометрией, с другой. И во всех этих случаях речь идёт о построении новых обширных математических теорий, а иногда о совершенно новом взгляде на теории, существовавшие ранее.

Ему принадлежит также создание теорий несколько иного рода — когда в задаче, включающей в себя очень много различных структур, и алгебраических, и топологических, Владимир Игоревич устанавливал, какие именно структуры ответственны за тот или иной эффект, и на основе подобного тщательного анализа обобщал известный результат в самых разных направлениях. Знаменитым примером является создание симплектической топологии, которое началось с его статьи 1965 г. в C. R. Acad. Sci. Paris. В этой работе и в ряде последующих Владимир Игоревич выдвинул ряд гипотез, связанных с числом неподвижных точек симплектоморфизмов, и в дальнейшем он возвращался не раз к этой тематике в течение всей своей математической карьеры. В последние годы им обсуждаются псевдопериодическая топология, проективная топология, градиентная топология ...

Что же касается постановки новых задач, то я хотел бы сказать следующее. Каждый семестр первое заседание семинара по теории особенностей (на мехмате МГУ), которым Владимир Игоревич руководит на протяжении уже очень многих лет, он посвящает именно постановке новых задач, которые подхватываются его учениками, участниками семинара, и из этих задач часто впоследствии возникают целые новые направления. Творчество Владимира Игоревича очень обширно и охватывает самые разные разделы математики, механики и физики — от теории дифференциальных уравнений до теории чисел, от математической логики до алгебраической геометрии, от топологии до гидродинамики, от теории катастроф до космологии, и во многих областях науки его результаты являются основополагающими. В книге «Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60» приведены составленный самим автором полный список его основных результатов и основная тематика его исследований.

Наконец, говоря о вкладе Владимира Игоревича в математическое образование, мне хотелось бы процитировать отрывок из рецензии на третье издание его знаменитого учебника «Математические методы классической механики» в Math. Reviews, MR 93c:70001 (рецензент A. Iacob):

«Пусть $S_1 = \{$наиболее влиятельные книги второй половины XX века$\}$, $S_2 = \{$наиболее часто цитируемые книги$\}$, $S_3 = \{$книги, имеющие наибольшую вероятность сохранить свою актуальность в XXI веке$\}$, $S_4 = \{$книги, очень полезные в преподавании$\}$, $S_5 = \{$книги, написанные в совершенно необычном, присущем только данному автору стиле$\}$, $S_6 = \{$книги, читать которые доставляет подлинное наслаждение$\}$, $A =$ рецензируемая книга. Предложение: $A \in \cap_{i=1}^{6} S_i$.»

Мне кажется, что это предложение справедливо для всех книг Владимира Игоревича.

Я стал заниматься у Владимира Игоревича по совету многих людей, стал ходить на его семинары. На первом курсе я с ним переговорил и он дал мне список задач. Я ни одной из этих задач не решил, и когда я вернулся к нему совершенно обескураженный, он сказал, что в принципе этого и ожидал. Но затем, когда он мне дал ряд задач на лето между первым и вторым курсами (само собой разумеется, это были известные задачи), я тогда решил всё, причем одну из этих задач (я не помню, в чем она заключалась) я решил совершенно не тем способом, который он ожидал, хотя сама по себе задача никоим образом не была ни новой, ни сложной.

Сначала Владимир Игоревич предложил мне заниматься вопросом о числе нулей абелевых интегралов — одной из составных частей шестнадцатой проблемы Гильберта. Эта задача связана с числом предельных циклов, которые возникают при малом негамильтоновом возмущении гамильтоновой системы с одной степенью свободы (или, более общим образом, при малом возмущении векторного поля на плоскости, имеющего первый интеграл). В этой задаче у меня никаких существенных продвижений не было. А так как я с Владимиром Игоревичем стал заниматься очень рано, то к тому моменту, когда надо было писать курсовую работу на третьем курсе, ещё было время сменить тематику. И тогда он привлёк меня (видя, что в общем-то у меня продвижения нет) к задаче о представимости алгебраических функций большого числа переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. В качестве ключа к получению новых серьёзных результатов в этой области Владимир Игоревич предложил мне вычислить различные топологические характеристики (в частности, целочисленные гомологии и когомологии) некоторых специальных алгебраических подмножеств пространства комплексных бинарных форм произвольной фиксированной степени. Основное внимание уделялось таким довольно мощным средствам, как теория Ходжа, — предполагалось, что важную роль в дальнейших исследованиях вопросов представимости будут играть так называемые смешанные структуры Ходжа на рациональных когомологиях подходящих алгебраических подмножеств пространства бинарных форм.

Мне удалось получить ряд интересных результатов о гомологиях таких подмножеств. Я написал очень хорошую курсовую работу на третьем курсе, и на следующий год моя курсовая была снова посвящена этой тематике. Результаты этих работ составили содержание двух заметок, одной — в «Успехах математических наук», другой — в «Вестнике Московского университета». Но надежды на продвижение в первоначальной задаче о суперпозициях не оправдались, потому что вычисленные мной смешанные структуры Ходжа оказались слишком простыми. Тогда Владимир Игоревич привлёк меня к совершенно новой тематике — к динамическим системам, которыми я и занимаюсь с тех пор вплоть до настоящего времени.

Сначала я просто сдал экзамен по спецкурсу, который читал Владимир Игоревич — это было во втором семестре четвёртого курса. Спецкурс был по обыкновенным дифференциальным уравнениям, я сдавал экзамен по этому курсу как один из экзаменов, которые нужно было сдавать в соответствии с учебным планом. Но мне в качестве экзамена (а сдача экзаменов по спецкурсам Владимира Игоревича всегда заключалась исключительно в решении задач — разумеется, не обязательно новых) была дана интересная задача о свойствах пар (A, G) диффеоморфизмов плоскости с общей неподвижной точкой, удовлетворяющих соотношению $AGA = G$ (под произведением отображений здесь понимается их композиция).

Я сдавал Владимиру Игоревичу два спецкурса — по теории особенностей и по дополнительным главам обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве задачи по теории особенностей он предложил мне доказать одну классификационную теорему, принадлежащую М. Джусти и приведённую без доказательства в монографии В. И. Арнольда, А. Н. Варченко и С. М. Гусейн-Заде «Особенности дифференцируемых отображений I» (см. стр. 131). Я, конечно, всё это сделал. Задачу про диффеоморфизмы плоскости я также успешно решил (на уровне формальных степенных рядов). Не помню, до какой степени полученные результаты были новыми, но после этой задачи я стал заниматься *обратимыми системами*.

Обратимые системы — это замечательный класс динамических систем, инвариантных относительно одновременного применения двух операторов — обращения времени и некоторого диффеоморфизма фазового пространства (если два диффеоморфизма A и G связаны соотношением $AGA = G$, т. е. $GAG^{-1} = A^{-1}$, то динамическая система с дискретным временем, порождённая диффеоморфизмом A, обратима относительно преобразования G). И вот начиная с задачи, которая на четвёртом курсе была предложена мне Владимиром Игоревичем просто в качестве задачи при сдаче спецкурса, мои занятия обратимыми системами привели к получению достаточно большого числа результатов, сделавших меня одним из лидеров этого направления, и составили существенную часть как моей математической деятельности, так и моей жизни в целом. Владимир Игоревич предложил мне заниматься обратимыми системами прежде всего применительно к той теории, в которой он является одним из основателей — теории КАМ (Колмогорова–Арнольда–Мозера).

Основателем теории обратимых систем по праву нужно считать Дж. Д. Биркгофа, который исследовал такие системы ещё в начале века. К тому моменту, когда я стал заниматься обратимыми системами и теорией КАМ, работ по обратимым системам было ещё относительно немного. С другой стороны, в ряде случаев, когда Владимир Игоревич ставит перед учеником новую задачу, он обрисовывает её исключительно на уровне идей. Он не даёт своему ученику ни списка основных публикаций, которые уже существуют в данной области, ни списка результатов или тех людей, которые занимались данными вопросами, не предлагает ученику ознакомиться с какой-либо вводной литературой по данной тематике. Он просто рассказывает на чисто идейном уровне, какие проблемы существуют в данной области, почти без указания каких-либо конкретных имен и публикаций, и предполагает, что ученик сам должен всё это находить. Такой подход часто оказывается чрезвычайно плодотворным — не только с той точки зрения, что он развивает в ученике самостоятельность, но также и потому, что позволяет иногда человеку, только начинающему заниматься данной тематикой, получать такие результаты, которые вряд ли могли быть им найдены, если бы этот человек до начала самостоятельной работы основательным образом проштудировал работы своих предшественников. Так произошло и со мной.

Я сразу стал пытаться (практически ещё ничего не зная об обратимых системах и не имея никакого опыта в теории КАМ) доказывать теорему КАМ для обратимых систем без стандартного предположения о том, что обращающий диффеоморфизм фазового пространства является инволюцией (отображением, квадрат которого есть тождественное преобразование), и мне удалось получить обратимую теорему КАМ без такого предположения! Я и по настоящее время чрезвычайно горжусь этим достижением. Результат, который и по сей день кажется мне совершенно удивительным и замечательным, заключается в следующем. Предположим, что у нас есть интегрируемая обратимая система. Ее фазовое пространство расслоено на инвариантные торы, движение по которым в подходящих угловых координатах происходит с постоянной скоростью. Обращающий диффеоморфизм заключается в изменении знака угловых координат на этих торах и является инволюцией. Теперь предположим, что мы эту систему чуть пошевелим, не выводя её из класса обратимых, но при этом будем возмущать не только саму систему, но и обращающий диффеоморфизм, *не предполагая, что возмущённый обращающий диффеоморфизм по-прежнему является инволюцией.* Тогда, если исходная система была невырожденной в том смысле, что частоты движения на невозмущённых инвариантных торах невырожденным образом зависели от параметра, нумерующего торы, то в аналитической категории возмущённая система будет иметь много инвариантных торов (близких к невозмущённым торам и инвариантных также относительно обращающего диффеоморфизма), движение по этим торам будет квазипериодическим ... — т. е. будет иметь место стандартная ситуация обычной (гамильтоновой) теории КАМ, но при этом, кроме того, возмущённый обращающий диффеоморфизм *обязательно будет являться инволюцией.* Итак, возмущая невырожденную интегрируемую обратимую систему, мы не выходим за рамки обратимых систем с инволютивным обращающим диффеоморфизмом, но этого, оказывается, не нужно требовать a priori — это получается само собой *(жёсткость инволютивности).*

Эта теорема, аналогичное локальное утверждение и другие результаты составили содержание моей дипломной работы, а затем вошли в книгу, которую я под непосредственным наблюдением Владимира Игоревича написал во время обучения в аспирантуре. Она была опубликована в серии Lecture Notes in Mathematics. И после окончания аспирантуры и защиты диссертации мне много раз выпадала счастливая возможность принимать щедрую помощь и поддержку Владимира Игоревича.