Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Помимо *решения* задач, в высшей степени полезно упражняться в *изложении решений.* Мы советуем всем, решившим какую-либо из задач, постараться записать её решение в максимально простом и понятном виде и прислать в редакцию. В последующих номерах мы опубликуем самые изящные из полученных решений.

К сожалению, нам известны авторы далеко не всех предлагаемых ниже задач. Многие из них известны десятилетиями и стали частью «математического фольклора». Одна из целей, преследуемых составителями данного раздела, — записать этот «фольклор», многие части которого стремительно исчезают в наше время.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи. Ждем ваших писем.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи неизвестен, мы указываем того, кто предложил эту задачу.

1. Дана возрастающая функция $f(x)$ такая, что $f(0) > 0$, $f(1) < 1$. Докажите, что существует такое x, что $f(x) = x$ и, кроме того, x — точка непрерывности функции f.

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(0) = 0$. Докажите, что если $P(Q(x))$ — чётная функция, то $Q(x)$ — чётная или нечётная функция.

   (О. Ф. Крижановский)

3. Пусть $a_0 = a$, $a_{n+1} = a^{a_n}$, q — произвольное натуральное число, большее 1. Докажите, что последовательность остатков от деления a_n на q стабилизируется (т. е. все остатки, начиная с некоторого, равны).

4. Можно ли числа от 1 до 2^{1000} раскрасить в два цвета так, чтобы не существовало арифметических прогрессий длины 2000, составленных из чисел одного цвета?

5. Дано выпуклое тело в пространстве. Докажите, что можно отметить 4 точки на его поверхности так, чтобы касательная (т. е. опорная плоскость) в каждой отмеченной точке была параллельна плоскости, проходящей через остальные три. *(А. Я. Белов)*

6. Из произвольной точки P вне эллипса проведены два касательных к эллипсу луча l_1 и l_2. Кроме того, из P проведены лучи s_1 и s_2 через фокусы эллипса. Докажите, что угол между l_1 и s_1 равен углу между l_2 и s_2. *(В. В. Произволов)*

7. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1{,}99; +1{,}99]$? *(А. Я. Канель)*

8. Выяснить, равномерно ли сходится на отрезке $[0; 1]$ ряд
$$\sum \frac{x^n}{(1+x^n)^n}.$$
(А. Д. Соловьёв)

9. Даны матрицы $A_1, \dots, A_k$ размера $n \times n$. Известно, что все произведения вида $A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_h}$, где $h \leqslant n$ нильпотентны. Докажите, что любое произведение вида $A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_{n^2}}$ равно нулю. *(И. П. Шестаков и И. В. Львов)*

10. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята такая точка O, что $\angle AOP = \angle COQ$, где P и Q — точки пересечения продолжений сторон AB, CD и BC, AD соответственно. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BCD перпендикулярны друг другу. *(С.Маркелов)*