Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон

Ф. А. Шаров

§ 1. Основной результат

Рассмотрим такую задачу: *дан набор прямоугольников; какие фигуры можно разрезать на прямоугольники, подобные данным?* Поставленная задача в целом сложна, до сих пор не имеет решения и вряд ли может быть в разумном смысле решена в общем виде. Однако интересно было бы исследовать её частные случаи. В нашей статье мы выясним, какие прямоугольники можно разрезать на подобные n данным при условии, что отношения сторон данных прямоугольников — квадратичные иррациональности.

Сформулируем основную теорему нашей статьи. Этот результат — новый, причём доказательство использует только элементарные методы.

Теорема 1 (основная). *Пусть $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, ..., $x_n = a_n + b_n\sqrt{p}$ — такие числа, что $x_i > 0$, $a_i, b_i, p \in \mathbb{Q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Тогда*:

1) *если существуют такие числа i и j, что $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и*
$$(a_i - b_i\sqrt{p})(a_j - b_j\sqrt{p}) < 0,$$
то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда $z \in \{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q}\}$;
2) *если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполнено неравенство $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда*
$$z \in \left\{e + f\sqrt{p} \mid e, f \in \mathbb{Q},\ e > 0,\ \frac{|f|}{e} \leqslant \max_i \frac{|b_i|}{a_i}\right\} =: M(x_1, \ldots, x_n);$$
3) *если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполнено неравенство $a_i - b_i\sqrt{p} < 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямо-*

угольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} \mid e, f \in \mathbb{Q},\ f > 0,\ \frac{|e|}{f} \leqslant \max_i \frac{|a_i|}{b_i} \right\} =: N(x_1, \ldots, x_n).$$

Условия второго и третьего пунктов теоремы имеют простой геометрический смысл. Изобразим число вида $z=e+f\sqrt{p}$ на координатной плоскости в виде точки (e, f). На рис. 1 *а* показан случай, когда $n = 2$, $a_1 - b_1\sqrt{p} > 0$ и $a_2 - b_2\sqrt{p} > 0$: заштрихованная область изображает множество $M(x_1, x_2)$. Это наименьший симметричный относительно оси Oe угол, который содержит все точки (a_i, b_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Аналогично на рис. 1 *б* показан случай, когда $n = 2$, $a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$ и $a_2 - b_2\sqrt{p} < 0$: здесь изображено множество $N(x_1, x_2)$, симметричное относительно оси Of.

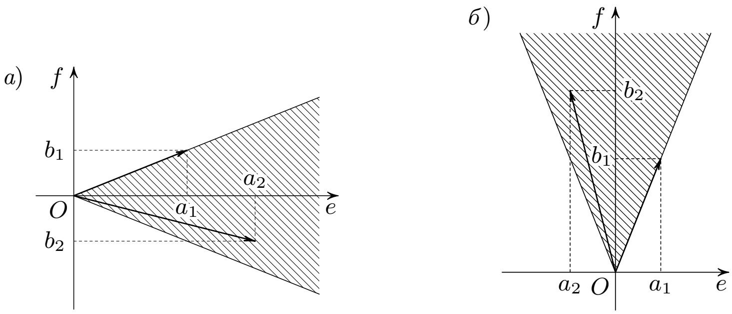


Рис. 1

Ясно, что множество $M(x_1, \ldots, x_n)$ совпадает с $M(x_k)$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Поэтому если для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, то все прямоугольники, которые можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$, можно разрезать и на прямоугольники с отношением сторон x_k. Аналогичное утверждение справедливо и для множества $N(x_1, \ldots, x_n)$, когда для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $a_i - b_i\sqrt{p} < 0$.

§ 2. Обзор известных результатов

Обсуждаемой проблемой занимались многие математики (см. список литературы). Ниже приведены некоторые из полученных результатов.

Теорема 2 (Ден, 1903, см. [6]). *Если прямоугольник разрезан на квадраты (необязательно равные), то отношение его сторон рационально.*

Теорема 3 (Ден, 1903, см. теорему 1 в [7]). *Если прямоугольник с отношением сторон x можно разрезать на прямоугольники с отношениями* *сторон* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то число* x *можно выразить через числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *с помощью сложения, вычитания, умножения и деления.*

У теорем 2 и 3 существуют элементарные доказательства: для теоремы 2 оно приведено[1)] в [4], теорема 3 доказана в [3], но не сформулирована там явно. Она немедленно следует из двух результатов: теоремы о сопротивлении цепи и отношении сторон прямоугольника и леммы о сопротивлении цепи.

Теорема 4 (Лацкович, Ринн, Секереш, Фрайлинг, 1994, см. [8, 12]). *Для числа* $r > 0$ *следующие три условия эквивалентны*:

1) *квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон* r;
2) *для некоторых положительных рациональных чисел* c_i *выполнено равенство*
$$c_1 r + \cfrac{1}{c_2 r + \cfrac{1}{c_3 r + \ldots + \cfrac{1}{c_n r}}} = 1;$$
3) *число* r *является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, у которого все комплексные корни имеют положительную действительную часть.*

Частным случаем теоремы Лацковича — Ринна — Секереша — Фрайлинга является следующая теорема, элементарное доказательство которой приведено в [3].

Теорема 5. *Пусть* $x = a + b\sqrt{2} > 0$, *где* $a, b \in \mathbb{Q}$. *Тогда из прямоугольников с отношением сторон* x *можно составить квадрат тогда и только тогда, когда* $a - b\sqrt{2} > 0$.

В статье [7] Фрайлинг, Лацкович и Ринн свели задачу о разрезании прямоугольника на прямоугольники, подобные данному, к сложной алгебраической проблеме — они нашли алгебраический критерий возможности разрезания, правда, не дающий алгоритма её проверки. Но они полностью решили задачу для частного случая, когда отношения сторон являются квадратичными иррациональностями. Приведём эту теорему (теорема 7 в [7]) в формулировке, равносильной авторской.

Теорема 6 (Фрайлинг, Лацкович, Ринн, 1997). *Пусть* $u = \alpha + \beta\sqrt{p} > 0$, *где* $\alpha, \beta, p \in \mathbb{Q}$ *и* $\beta\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. *Пусть также* $v = \delta u + \gamma$ *для некоторых рациональных* γ *и* δ. *Тогда прямоугольник с отношением сторон* v *можно*

[1)] См. также [2], в настоящем сборнике.

разрезать на прямоугольники с отношением сторон и в том и только том случае, когда выполнено одно из двух условий:

1) $\gamma = 0$ *и* $\delta > 0$; 2) $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\gamma(\alpha^2 - \beta^2 p)}{\alpha} > 0$ *и* $\delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0$.

Эта теорема равносильна случаю $n = 1$ в нашей основной теореме (равносильность доказана в § 7). Поэтому в § 6 попутно с доказательством основной теоремы мы получим и элементарное доказательство теоремы 6.

К. Китинг и Дж. Л. Кинг решили задачу, близкую к поставленной в начале статьи, — о разрезании прямоугольника на прямоугольники и так называемые антипрямоугольники (см. [9, 10]).

§ 3. Определения и обозначения

Сначала введём некоторые определения и обозначения.

Определение 1. Будем говорить, что прямоугольник P *разрезан* или *разбит* на прямоугольники $P_1, \ldots, P_n$, если $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = P$ и любые два прямоугольника из $P_1, \ldots, P_n$ не имеют общих внутренних точек.

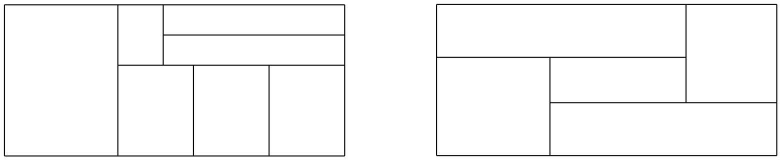
Определение 2. *Отношением сторон* прямоугольника со сторонами a и b будем называть каждое из чисел a/b и b/a.

Множества всех положительных и всех отрицательных рациональных чисел будем обозначать соответственно $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{Q}^-$, положим $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\} = \mathbb{Q}_0^+$, а также $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ и $\mathbb{R}^- := \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}$.

Определение 3. Числа, которые можно представить в виде $x = a + b\sqrt{p}$ с рациональными a, b и p, причём p положительно и не является квадратом рационального числа, называются *квадратичными иррациональными числами* (*КИЧ*) или *квадратичными иррациональностями*. Множество всех квадратичных иррациональностей $x = a + b\sqrt{p}$ при фиксированном p будем обозначать $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$. Множество всех КИЧ $x = a + b\sqrt{p}$ с положительными a и b при фиксированном p будем обозначать $\mathbb{Q}^+[\sqrt{p}]$.

Определение 4. Разрезание любого прямоугольника на один прямоугольник будем называть *тривиальным*. Далее тривиальные разрезания определяются по индукции: если даны два тривиальных разрезания прямоугольников P_1 и P_2 с общей стороной, но без общих внутренних точек, то разрезание их объединения, полученное объединением данных разрезаний прямоугольников P_1 и P_2, также будем называть *тривиальным*.

На рис. 2 *а* изображено тривиальное разрезание, на рис. 2 *б* — нетривиальное. Неформально говоря, представим разрезаемый прямоугольник в виде прямоугольного листа бумаги с нарисованным на нём разбиением



а) *б)*

Рис. 2

на прямоугольники. Этот бумажный прямоугольник разрешается разрезать вдоль любого отрезка на два прямоугольника, потом производить такие операции по отдельности с каждой из получившихся частей, и так далее. Если таким образом можно реализовать исходное разбиение, то разрезание будет тривиальным.

Обозначим через $A(x_1, \ldots, x_n)$ множество всех таких чисел z, что прямоугольник с отношением сторон z можно тривиально разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$. Аналогично обозначим через $B(x_1, \ldots, x_n)$ множество всех таких чисел z, что прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ (не обязательно тривиальным образом). Очевидно, $A(x_1, \ldots, x_n) \subset B(x_1, \ldots, x_n)$.

§ 4. Вспомогательные утверждения

Основную теорему мы докажем сначала для случая тривиальных разрезаний. В этом случае доказательство основной теоремы более наглядно, чем для произвольных разбиений. Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений, сформулированных в виде лемм 1–6.

Лемма 1. *Множество $A(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто относительно сложения, т. е. для любых чисел $a, b \in A(x_1, \ldots, x_n)$ выполнено $(a + b) \in$ $\in A(x_1, \ldots, x_n)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in A(x_1, \ldots, x_n)$. Это означает, что из прямоугольников с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ мы можем тривиально составить любые прямоугольники с отношениями сторон a и b, в том числе прямоугольник со сторонами 1 и a и прямоугольник со сторонами 1 и b. Приложим эти два прямоугольника друг к другу по стороне 1. Получим прямоугольник со сторонами 1 и $a + b$. □

Лемма 2. *Множество $A(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто относительно операции взятия обратного числа по умножению, т. е. для любого числа $a \in A(x_1, \ldots, x_n)$ выполнено $a^{-1} \in A(x_1, \ldots, x_n)$.*

Доказательство. Действительно, если число a — отношение сторон некоторого прямоугольника, то по определению число a^{-1} также является отношением сторон того же прямоугольника. □

Лемма 3. *Множество $A(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто относительно умножения на положительные рациональные числа, т. е. для любого $a \in A(x_1, \ldots, x_n)$ и любого $q \in \mathbb{Q}^+$ выполнено включение $qa \in A(x_1, \ldots, x_n)$.*

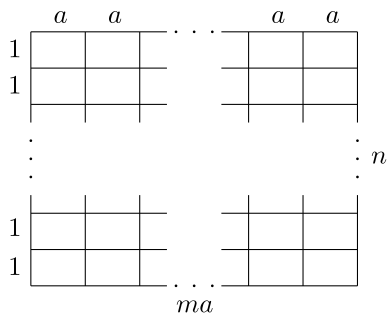


Рис. 3

Доказательство. Действительно, пусть $a \in A(x_1, \ldots, x_n)$ и $q = m/n$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Прямоугольник со сторонами n и ma, отношение сторон которого равно $ma/n = qa$, можно тривиально разрезать на прямоугольники со сторонами 1 и a (см. рис. 3), а у этих прямоугольников, в свою очередь, существует тривиальное разбиение на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$, так как $a \in A(x_1, \ldots, x_n)$. □

Лемма 4. *Пусть $(a + b\sqrt{p}), (a - b\sqrt{p}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$. Тогда из прямоугольников с отношением сторон $x = a + b\sqrt{p}$ можно тривиально сложить прямоугольник с отношением сторон $a - b\sqrt{p}$ и любой прямоугольник с рациональным положительным отношением сторон.*

Доказательство. Сначала докажем, что можно сложить прямоугольник с отношением сторон $a - b\sqrt{p}$. По лемме 2 имеем

$$\frac{a - b\sqrt{p}}{a^2 - pb^2} = \frac{1}{a + b\sqrt{p}} = \frac{1}{x} \in A(x).$$

Так как $(a^2 - pb^2) \in \mathbb{Q}^+$, по лемме 3 получаем $(a - b\sqrt{p}) \in A(x)$, что и требовалось.

Теперь докажем, что можно сложить любой прямоугольник с рациональным положительным отношением сторон. Так как

$$(a - b\sqrt{p}) + (a + b\sqrt{p}) = 2a > 0,$$

по лемме 1 прямоугольник с отношением сторон $2a$ можно тривиально сложить из двух прямоугольников с отношениями сторон $a-b\sqrt{p}$ и $a+b\sqrt{p}$. Из прямоугольников с отношением сторон $2a \in \mathbb{Q}^+$ по лемме 3 можно тривиально сложить прямоугольник с любым рациональным положительным отношением сторон. □

Лемма 5. *Пусть* $(a+b\sqrt{p}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$ *и* $(a-b\sqrt{p}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^-$. *Тогда из прямоугольников с отношением сторон* $x = a+b\sqrt{p}$ *можно тривиально сложить любой прямоугольник с отношением сторон* $q\sqrt{p}$ *(где* $q \in \mathbb{Q}^+$*) и прямоугольник с отношением сторон* $b\sqrt{p}-a$.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4 — оставляем его читателю.

Лемма 6. *Пусть множество* P *замкнуто относительно операции сложения и операции взятия обратного по умножению. Тогда если* $x_1, \ldots, x_n \in P$, *то* $P \supset A(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ будем называть *базовыми*. Доказательство проведём индукцией по количеству базовых прямоугольников в разбиении.

База индукции. Из одного базового прямоугольника можно тривиально сложить лишь прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n, 1/x_1, \ldots, 1/x_n$. Из условия леммы следует, что $1/x_1, \ldots, 1/x_n \in P$. Значит, база индукции выполняется.

Шаг индукции. Пусть все прямоугольники, которые можно тривиально сложить не более чем из k прямоугольников с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$, имеют отношения сторон, принадлежащие множеству P. Любой прямоугольник $ABCD$, тривиально составленный из $k+1$ базового прямоугольника, можно разрезать на два прямоугольника $ABEF$ и $ECDF$, каждый из которых разрезан не более чем на k базовых прямоугольников. По предположению индукции отношения сторон каждого из них принадлежат множеству P. Найдём отношения сторон прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 4). Так как

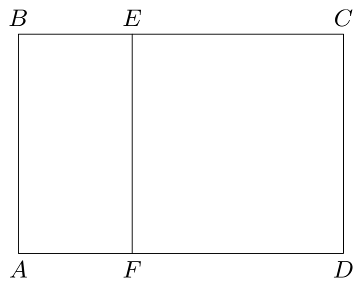


Рис. 4

$$\frac{BE}{AB}, \frac{EC}{CD} \in P,$$

получаем, что

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BE}{AB} + \frac{EC}{CD} \in P$$

(из замкнутости P по сложению) и

$$\frac{AB}{BC}=\left(\frac{BC}{AB}\right)^{-1}\in P$$

(из замкнутости P относительно взятия обратного по умножению). $\square$

§ 5. Доказательство основной теоремы для тривиальных разрезаний

Докажем первый пункт теоремы. По условию этого пункта существуют два таких числа i и j, что $1\leqslant i,j\leqslant n$, $a_i-b_i\sqrt{p}>0$ и $a_j-b_j\sqrt{p}<0$.

Докажем, что $P:=\mathbb{Q}[\sqrt{p}]\cap\mathbb{R}^+\subset A(x_1,\ldots,x_n)$. Возьмём произвольное $z=(e+f\sqrt{p})\in P$ и рассмотрим три случая.

Случай 1: $e>0$, $f>0$. Поскольку $(a_i+b_i\sqrt{p}),(a_i-b_i\sqrt{p})\in\mathbb{Q}[\sqrt{p}]\cap\mathbb{R}^+$ и $e\in\mathbb{Q}^+$, по лемме 4 получаем

$$e\in A(a_i+b_i\sqrt{p})=A(x_i)\subset A(x_1,\ldots,x_n).$$

Аналогично, поскольку $(a_j+b_j\sqrt{p})\in\mathbb{Q}[\sqrt{p}]\cap\mathbb{R}^+$ и $(a_j-b_j\sqrt{p})\in\mathbb{Q}[\sqrt{p}]\cap\mathbb{R}^-$ и $f\in\mathbb{Q}^+$, по лемме 5 получаем

$$f\sqrt{p}\in A(a_j+b_j\sqrt{p})=A(x_j)\subset A(x_1,\ldots,x_n).$$

Следовательно, по лемме 1 имеем $e+f\sqrt{p}\in A(x_1,\ldots,x_n)$.

Случай 2: $e<0$ (очевидно, что при этом $f>0$ и $pf^2-e^2>0$). Тогда $\dfrac{1}{z}=\dfrac{-e+f\sqrt{p}}{pf^2-e^2}\in\mathbb{Q}^+[\sqrt{p}]\subset A(x_1,\ldots,x_n)$ (по случаю 1), и по лемме 2 получаем, что $z\in A(x_1,\ldots,x_n)$.

Случай 3: $f<0$ (очевидно, что при этом $e>0$ и $e^2-pf^2>0$). Тогда $\dfrac{1}{z}=\dfrac{e-f\sqrt{p}}{e^2-pf^2}\in\mathbb{Q}^+[\sqrt{p}]\subset A(x_1,\ldots,x_n)$ (по случаю 1), и по лемме 2 получаем, что $z\in A(x_1,\ldots,x_n)$.

Очевидно, что множество P замкнуто относительно операций сложения и взятия обратного по умножению. По лемме 6 получаем $P\supset A(x_1,\ldots,x_n)$.

Мы доказали, что $P\supset A(x_1,\ldots,x_n)$ и $P\subset A(x_1,\ldots,x_n)$, следовательно, $P=A(x_1,\ldots,x_n)$. Первый пункт теоремы доказан.

Докажем второй пункт. Покажем, что $M(x_1,\ldots,x_n)\subset A(x_1,\ldots,x_n)$. Для определённости будем считать, что $|b_1|/a_1=\max_i(|b_i|/a_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$. Если $b_1=0$, то все числа $x_1,\ldots,x_n$ рациональны, $M(x_1,\ldots,x_n)=\mathbb{Q}^+$, а $\mathbb{Q}^+\subset A(x_1,\ldots,x_n)$ по лемме 3. В дальнейшем будем считать, что $b_1\neq 0$.

Пусть $z=(e+f\sqrt{p})\in M(x_1,\ldots,x_n)$. По условию теоремы $e\in\mathbb{Q}^+$, $f\in\mathbb{Q}$ и $|f|/e\leqslant|b_1|/a_1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $f \in \mathbb{Q}_0^+$. Докажем, что

$$z = e + f\sqrt{p} = \frac{f}{|b_1|}(a_1 + |b_1|\sqrt{p}) + \Big(e - \frac{fa_1}{|b_1|}\Big) \in A(x_1, \ldots, x_n).$$

Действительно, $(e - fa_1/|b_1|) \in \mathbb{Q}_0^+$ (так как $|f|/e \leqslant |b_1|/a_1$) и $f/|b_1| \in \mathbb{Q}_0^+$ (так как $f \in \mathbb{Q}_0^+$). По лемме 4 выполнено $(a_1 - b_1\sqrt{p}) \in A(x_1, \ldots, x_n)$, следовательно, $(a_1 + |b_1|\sqrt{p}) \in A(x_1, \ldots, x_n)$ независимо от знака b. Также по лемме 4 для любых $q \in \mathbb{Q}^+$ выполнено $q \in A(x_1, \ldots, x_n)$. Применяя леммы 1 и 3, получаем требуемое.

Случай 2: $f \in \mathbb{Q}^-$. Докажем, что

$$z = e + f\sqrt{p} = \frac{|f|}{|b_1|}(a_1 - |b_1|\sqrt{p}) + \Big(e - \frac{|f|a_1}{|b_1|}\Big) \in A(x_1, \ldots, x_n).$$

Действительно, $(e - |f|a_1/|b_1|) \in \mathbb{Q}_0^+$ (так как $|f|/e \leqslant |b_1|/a_1$) и $|f|/|b_1| \in \in \mathbb{Q}^+$. Применяя леммы 1 и 3, получаем требуемое.

Таким образом, $z \in A(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. $M(x_1, \ldots, x_n) \subset A(x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь проверим, что $M(x_1, \ldots, x_n) \supset A(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, $x_1, \ldots, x_n \in M(x_1, \ldots, x_n)$, поэтому достаточно проверить замкнутость множества $M(x_1, \ldots, x_n)$ относительно операций сложения и взятия обратного по умножению и воспользоваться леммой 6.

Докажем, что $M(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто по сложению. Действительно, пусть $(e + f\sqrt{p}), (g + h\sqrt{p}) \in M(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $|f| \leqslant e|b|/a$ и $|h| \leqslant g|b|/a$. Сложив эти неравенства, получим

$$|f + h| \leqslant |f| + |h| \leqslant (e + g)\frac{|b|}{a}.$$

Кроме того, очевидно, $(e + g) \in \mathbb{Q}^+$ и $(f + h) \in \mathbb{Q}$. Следовательно,

$$\big((e + g) + (f + h)\sqrt{p}\big) \in M(x_1, \ldots, x_n).$$

Покажем, что $M(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто относительно операции взятия обратного по умножению. Действительно, пусть $(e + f\sqrt{p}) \in M(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$$\frac{1}{e + f\sqrt{p}} = \frac{e - f\sqrt{p}}{e^2 - pf^2}.$$

Очевидно, что это число также принадлежит множеству $M(x_1, \ldots, x_n)$.

Таким образом,

$$M(x_1, \ldots, x_n) \supset A(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{и} M(x_1, \ldots, x_n) \subset A(x_1, \ldots, x_n),$$

следовательно, $M(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$. Второй пункт нашей теоремы доказан.

Доказательство третьего пункта почти дословно повторяет доказательство второго (вместо леммы 4 нужно использовать лемму 5).

§ 6. Доказательство основной теоремы в общем случае

Приступим к доказательству основной теоремы в общем случае, т. е. без предположения тривиальности разрезаний. Для этого нам потребуется доказать ещё две леммы и дать одно определение.

Лемма 7. *Если* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$, *то* $B(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Если $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ и $z \in B(x_1, \ldots, x_n)$, то по теореме 3 получаем, что z можно выразить через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с помощью сложения, вычитания, умножения и деления. Поскольку множество $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ замкнуто относительно этих операций, $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$. Число z — отношение сторон прямоугольника, поэтому $z > 0$ и $B(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$. □

Итак, основную теорему достаточно доказать в случае $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$, так как это условие необходимо выполнено как при $z \in M(x_1, \ldots, x_n)$ или $z \in N(x_1, \ldots, x_n)$, так и при $z \in B(x_1, \ldots, x_n)$ (по лемме 7). Далее будем считать, что $e + f\sqrt{p} = z \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$.

Определение 5. Пусть $A, B, C \in \mathbb{R}$. *«Площадью»* S прямоугольника со сторонами $\alpha + \beta\sqrt{p}$ и $\gamma + \delta\sqrt{p}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, называется число

$$S := \alpha\gamma A + \beta\gamma B + \alpha\delta B + \beta\delta C.$$

Легко проверить, что данное определение «площади» не зависит от перестановки сторон прямоугольника.

Лемма 8. *Если прямоугольник разрезан на прямоугольники со сторонами, принадлежащими множеству* $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, *то «площадь» разрезаемого прямоугольника равна сумме «площадей» прямоугольников, на которые он разрезан.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что сумма «площадей» двух имеющих общую сторону прямоугольников со сторонами, принадлежащими множеству $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, равна «площади» их объединения. В общем случае сделаем продолжение каждого разреза, как показано на рис. 5. Очевидно, что тогда каждый прямоугольник нового разрезания будет также иметь квадратичные иррациональные стороны. Применяя утверждение предыдущего абзаца, получаем требуемое. □

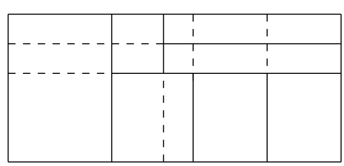


Рис. 5

Доказательство основной теоремы в случае $n = 1$. Возможность разрезаний, когда $a_1 - b_1\sqrt{p} > 0$ и $z \in M(x_1)$ или когда $a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$ и $z \in N(x_1)$, нами уже доказана: по основной теореме для тривиальных разрезаний, если выполнена одна из этих двух систем условий, то существует тривиальное разрезание прямоугольника с отношением сторон z на прямоугольники с отношением сторон x_1.

Остаётся доказать, что разрезание невозможно ни когда $a_1 - b_1\sqrt{p} > 0$ и $z \notin M(x_1)$, ни когда $a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$ и $z \notin N(x_1)$. Предположим противное — пусть прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон x_1 и выполнена одна из двух систем условий: либо $a_1 - b_1\sqrt{p} > 0$ и $|f|/e > |b_1|/a_1$, либо $a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$ и $|e|/f > |a_1|/b_1$.

Будем называть разрезаемый прямоугольник с отношением сторон z *большим*, а прямоугольники с отношением сторон x_1, на которые он разрезается — *маленькими*.

Пусть большой прямоугольник имеет стороны $e + f\sqrt{p}$ и 1, т. е. $\alpha = e$, $\beta = f$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$. По теореме о силах тока и длинах сторон и лемме о сопротивлении цепи из [3] стороны маленьких прямоугольников в этом случае должны выражаться через x_1 с помощью сложения, вычитания, умножения и деления. Тогда, поскольку множество $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ замкнуто относительно этих операций, то длины сторон маленьких прямоугольников являются квадратичными иррациональностями. Таким образом, мы можем воспользоваться введённым выше определением «площади» для большого и маленьких прямоугольников.

Рассмотрим «площадь», для которой $A = f$, $B = -e$, $C = \dfrac{2fa_1^2}{b_1^2} - pf$. «Площадь» большого прямоугольника в этом случае

$$S_Б = e \cdot 1 \cdot f + f \cdot 1 \cdot (-e) + e \cdot 0 \cdot (-e) + f \cdot 0 \cdot \left(\frac{2fa_1^2}{b_1^2} - pf\right) = 0.$$

Теперь оценим «площадь» маленьких прямоугольников. Пусть стороны какого-то маленького прямоугольника равны $\alpha + \beta\sqrt{p}$ и $\gamma + \delta\sqrt{p}$, причём

$$\frac{\gamma + \delta\sqrt{p}}{\alpha + \beta\sqrt{p}} = a_1 + b_1\sqrt{p}.$$

Тогда $\gamma + \delta\sqrt{p} = \alpha a_1 + p\beta b_1 + \sqrt{p}(\beta a_1 + \alpha b_1)$ и выполнены равенства $\gamma = \alpha a_1 + p\beta b_1$, $\delta = \beta a_1 + \alpha b_1$. Поэтому «площадь» маленького прямоугольника записывается в виде

$$S_M = \alpha\gamma f - \beta\gamma e - \alpha\delta e + \beta\delta\left(\frac{2fa_1^2}{b_1^2} - pf\right) = \alpha f(\alpha a_1 + p\beta b_1) - \\ - \beta e(\alpha a_1 + p\beta b_1) - \alpha e(\beta a_1 + \alpha b_1) + \beta\left(\frac{2fa_1^2}{b_1^2} - pf\right)(\beta a_1 + \alpha b_1) = \\ = \alpha^2(fa_1 - eb_1) + 2\alpha\beta\left(\frac{fa_1^2}{b_1} - ea_1\right) + \beta^2\left(\frac{2fa_1^3}{b_1^2} - pfa_1 - peb_1\right).$$

Заметим, что по предположению $|f|/e \neq |b_1|/a_1$, поэтому $fa_1 - eb_1 \neq 0$. Следовательно, выражение S_M/β^2 — квадратный трёхчлен относительно α/β. Покажем, что его дискриминант D отрицателен. Тем самым будет доказано, что при фиксированных числах a_1, b_1, e, f величина S_M либо всегда положительна, либо всегда отрицательна, а значит, сумма всех «площадей» маленьких прямоугольников не равна нулю, т. е. не равна площади большого прямоугольника. Таким образом, мы получим противоречие.

Итак,

$$\frac{D}{4} = \frac{f^2a_1^4}{b_1^2} - \frac{2fea_1^3}{b_1} + e^2a_1^2 - \frac{2f^2a_1^4}{b_1^2} + pf^2a_1^2 + pfa_1eb_1 + \frac{2fea_1^3}{b_1} - pfa_1eb_1 - pe^2b_1^2 =$$
$$= \frac{-f^2a_1^4}{b_1^2} + e^2a_1^2 + pf^2a_1^2 - pe^2b_1^2 = (a_1^2 - pb_1^2)\left(e^2 - \frac{f^2a_1^2}{b_1^2}\right).$$

Имеем два случая:

1) $a_1 - b_1\sqrt{p} > 0$ и $|f|/e > |b_1|/a_1 \quad \Leftrightarrow \quad e < a_1|f|/|b_1|$;
2) $a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$ и $|e|/f > |a_1|/b_1r \quad \Leftrightarrow \quad |e| > f|a_1|/b_1$.

В обоих этих случаях $D < 0$. □

Доказательство основной теоремы для произвольного $\boldsymbol{n}$. Докажем первый пункт теоремы. По основной теореме для тривиальных разрезаний $B(x_1, \ldots, x_n) \supset A(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$. По лемме 7 выполняется также обратное включение. Таким образом, $B(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$, что и требуется.

Докажем второй пункт теоремы. Без ограничения общности $|b_1|/a_1 = \max_i(|b_i|/a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Докажем, что тогда $B(x_1) = B(x_1, \ldots, x_n)$. По основной теореме для тривиальных разрезаний $x_2, \ldots, x_n \in A(x_1)$. Пусть $z \in B(x_1, \ldots, x_n)$. В разрезании прямоугольника с отношением сторон z на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ заменим каждый прямоугольник с отношением сторон из множества $\{x_2, \ldots, x_n\}$, на его тривиальное разрезание на прямоугольники с отношением сторон x_1. Получим разрезание прямоугольника с отношением сторон z на прямоугольники с отношением сторон x_1. Тем самым мы доказали, что $B(x_1, \ldots, x_n) \subset B(x_1)$. Обратное включение следует из определения множества $B(x_1, \ldots, x_n)$. По основной теореме для случая $n = 1$

$$B(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1) = \left\{e + f\sqrt{p} \mid e \in \mathbb{Q}^+,\ f \in \mathbb{Q},\ \frac{|f|}{e} \leqslant \frac{|b_1|}{a_1}\right\}.$$

Вспоминая, что по предположению $|b_1|/a_1 = \max_i(|b_i|/a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, получаем утверждение второго пункта основной теоремы.

Третий пункт теоремы доказывается аналогично второму. □

§ 7. Связь основной теоремы с теоремой 6

Основная теорема является обобщением теоремы 6, но на первый взгляд они выглядят совершенно разными. Покажем, что на самом деле при $n = 1$ основная теорема равносильна теореме 6.

Утверждение. *Пусть* $u = \alpha + \beta\sqrt{p}$ *и* $v = \delta u + \gamma$ (*где* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p \in \mathbb{Q}$ *и* $\beta\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$) — *положительные квадратичные иррациональности. Тогда одна из двух систем условий*:

1°) $\alpha - \beta\sqrt{p} > 0$ *и* $v \in M(u)$; $\quad 2^\circ$) $\alpha - \beta\sqrt{p} < 0$ *и* $v \in N(u)$

выполнена тогда и только тогда, когда выполнена одна из двух систем условий:

1^*) $\gamma = 0$ *и* $\delta > 0$; $\quad 2^*$) $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\gamma(\alpha^2 - \beta^2 p)}{\alpha} > 0$ *и* $\delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим два случая: $\alpha - \beta\sqrt{p} > 0$ и $\alpha - \beta\sqrt{p} < 0$.

1) Пусть
$$\alpha - \beta\sqrt{p} > 0. \tag{1}$$
Это условие равносильно неравенству $\alpha > |\beta|\sqrt{p}$, так как $\alpha + \beta\sqrt{p} = u > 0$. Заметим также, что по условию $\beta\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, т. е. $\beta \neq 0$. Далее произведём ряд равносильных преобразований, которые верны лишь при условии (1). Дано, что
$$v = \delta u + \gamma = \delta(\alpha + \beta\sqrt{p}) + \gamma = \delta\alpha + \gamma + \beta\delta\sqrt{p}.$$
Поэтому неравенство $v \in M(u)$ по основной теореме равносильно системе двух условий
$$\delta\alpha + \gamma > 0 \quad \text{и} \quad \frac{|\beta\delta|}{\delta\alpha + \gamma} \leqslant \frac{|\beta|}{\alpha}. \tag{2}$$

Если $\gamma = 0$, то система условий (2) равносильна неравенству $\delta > 0$, так как $\alpha > |\beta|\sqrt{p} > 0$. Если же $\gamma \neq 0$, то, пользуясь первым неравенством из (2) и условием $\alpha > |\beta|\sqrt{p} > 0$, второе неравенство можно преобразовать так:

$$\frac{|\beta\delta|}{\delta\alpha + \gamma} \leqslant \frac{|\beta|}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad |\delta| \leqslant \delta + \frac{\gamma}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2\delta \leqslant \dfrac{\gamma}{\alpha}, \\ 0 \leqslant \dfrac{\gamma}{\alpha} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0, \\ \gamma > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha \neq 0, \\ \delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0, \\ \dfrac{\gamma(\alpha^2 - \beta^2 p)}{\alpha} > 0. \end{cases}$$

Получаем, что в случае (1) система условий (1°) выполнена тогда и только тогда, когда выполнена одна из двух систем условий (1^*) или (2^*).

2) Пусть
$$\alpha - \beta\sqrt{p} < 0. \tag{3}$$
Это условие равносильно неравенству $\alpha < |\beta|\sqrt{p}$, так как $\alpha + \beta\sqrt{p} = u > 0$. Заметим, что $\beta > 0$, так как иначе, очевидно, $u < 0$. Далее произведём ряд равносильных преобразований, которые верны лишь при условии (3). Включение $v \in N(u)$ по основной теореме равносильно системе двух условий:
$$\beta\delta > 0 \quad \text{и} \quad \frac{|\delta\alpha + \gamma|}{\beta\delta} \leqslant \frac{|\alpha|}{\beta}. \tag{4}$$
Если $\gamma = 0$, то система условий (4) равносильна неравенству $\delta > 0$, так как $\beta > 0$. Если же $\gamma \neq 0$, то, пользуясь первым условием из (4), а также неравенствами $\alpha < |\beta|\sqrt{p}$ и $\beta > 0$, второе условие преобразуем так:
$$\frac{|\delta\alpha + \gamma|}{\beta\delta} \leqslant \frac{|\alpha|}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad |\delta\alpha + \gamma| \leqslant \delta|\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha \neq 0, \\ |\delta + \dfrac{\gamma}{\alpha}| \leqslant \delta \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0, \\ \dfrac{\gamma}{\alpha} \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha \neq 0, \\ \delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0, \\ \dfrac{\gamma(\alpha^2 - \beta^2 p)}{\alpha} > 0. \end{cases}$$
Получаем, что в случае (2) система условий (2°) выполнена тогда и только тогда, когда выполнена одна из двух систем условий (1^*) или (2^*). □

§ 8. Что дальше?

Естественным образом у читателя может возникнуть несколько вопросов, касающихся обобщения нашего результата. Ниже приведены два наиболее интересных, по нашему мнению, вопроса.

1. Какие прямоугольники можно разрезать на прямоугольники, подобные n данным, если отношения сторон данных прямоугольников — кубические иррациональности?
2. Какие прямоугольники можно разрезать на прямоугольники, подобные n данным, если отношения сторон данных прямоугольников — квадратичные иррациональности $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p_1}, \ldots, x_n = a_n + b_n\sqrt{p_n}$?

Автор не видит простого способа обобщить основную теорему на эти случаи. Проблема заключается в нахождении аналогов лемм 4 и 5.

В заключение приведём ещё несколько близких открытых вопросов.

1. Какие прямоугольники можно разрезать на подобные n данным?
2. Какие многоугольники можно разрезать на прямоугольники с данным отношением сторон x?

3. Какие многоугольники можно разрезать на трапеции, гомотетичные данной?

Благодарности

Автор благодарен М. Б. Скопенкову за постоянное внимание к данной работе.

Список литературы

[1] *Покровский В. Г.* О разрезаниях n-мерных параллелепипедов // Матем. заметки. 1983. Т. 33, № 2. С. 137–140.

[2] *Радзивиловский Л., Радченко Д., Танцюра М., Фещенко И.* Разрезание параллелепипеда на бруски // Математическое просвещение. Сер. 3. 2016. Вып. 20. С. 215–227

[3] *Скопенков М., Малиновская О., Дориченко С.* Собери квадрат // Квант. 2015. № 2. С. 6–11.

[4] *Скопенков М., Прасолов М., Дориченко С.* Разрезания металлического прямоугольника // Квант. 2011. № 3. С. 10–16.

[5] *Benjamini I., Schramm O.* Random walks and harmonic functions on infinite planar graphs using square tilings // Ann. Probab. 1996. V. 24, № 3. P. 1219–1238.

[6] *Dehn M.* Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke // Math. Ann. 1903. V. 57, № 3. P. 314–332.

[7] *Freiling C., Laczkovich M., Rinne D.* Rectangling a rectangle // Discr. Comp. Geom. 1997. V. 17, № 2. P. 217–225.

[8] *Freiling C., Rinne D.* Tiling a square with similar rectangles // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 547–558.

[9] *Keating K., King J. L.* Shape tiling // Electron. J. Combin. 1997. V. 4, № 2. P. R12.

[10] *Keating K., King J. L.* Signed tilings with squares // J. Comb. Theory. Ser. A. 1999. V. 85, № 1. P. 83–91.

[11] *Kenyon R.* Tilings and discrete Dirichlet problems // Israel J. Math. 1998. V. 105, № 1. P. 61–84.

[12] *Laczkovich M., Szekeres G.* Tiling of the square with similar rectangles // Discr. Comp. Geom. 1995. V. 13. P. 569–572.

[13] *Su Z., Ding R.* Tilings of orthogonal polygons with similar rectangles or triangles // J. Appl. Math. Comp. 2005. V. 17, № 1. P. 343–350.

[14] *Szegedy B.* Tilings of the square with similar right triangles // Combinatorica. 2001. V. 21, № 1. P. 139–144.

Ф. А. Шаров, НИУ ВШЭ

fedorsharov@mail.ru