Графы с большим хроматическим числом и большим обхватом

А. М. Райгородский

§ 1. Введение

В этой статье мы поговорим об одном классическом утверждении из теории графов и о той замечательной науке, которая из него выросла. Напомним, что *хроматическим числом* графа $G = G(V, E)$ с множеством вершин V и множеством рёбер E называется величина $\chi(G)$, равная наименьшему числу цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Напомним также, что *обхват* графа G — это длина кратчайшего цикла в нем, обозначаемая $g(G)$ от английского слова 'girth' — «обхват».

Понятно, что если в графе есть полные подграфы, то хроматическое число графа не меньше числа вершин в каждом из них. И разумеется, чем бóльшие полные подграфы есть в графе, тем больше его хроматическое число. Интуитивно кажется довольно естественным сделать обратное предположение: если в графе нет больших полных подграфов, то он красится в малое число цветов.

Однако еще в конце 40-х годов XX века Татт и Зыков (см. [3, 17]) независимо построили для каждого k примеры графов, в которых не было треугольников (т. е. в них вовсе не было полных подграфов, кроме вершин и рёбер, а их обхваты были больше трех), но которые не красились в k цветов должным образом. Это нанесло серьезный удар по интуиции! И возник вопрос[1]: а может быть, для каждого k и каждого l существуют графы G, у которых $\chi(G) > k$ и при этом $g(G) > l$? Это опровергло бы интуитивные

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15–01–03530 и гранта НШ-2964.2014.1 поддержки ведущих научных школ.

[1] В «Математическом просвещении», вып. 17, с. 197 опубликована задача 17.11 на эту тему: существует ли граф с хроматическим числом, бóльшим чем 2013, все циклы которого имеют длину больше 2013?

представления окончательно. Придумать конструкции, впрочем, не удавалось. И тем не менее в 1958 году выдающийся венгерский математик Пол Эрдёш дал утвердительный ответ (см. [18]) на поставленный вопрос! Только действовал он с помощью *вероятностного* метода. Что это значит? В следующем разделе мы докажем теорему Эрдёша, и все станет ясно.

§ 2. Доказательство теоремы Эрдёша

Зафиксируем произвольные числа k и l. Наша цель — показать, что существует граф (возможно, с очень большим количеством вершин n), у которого $\chi(G) > k$ и $g(G) > l$.

Пусть дано число $n \in \mathbb{N}$ и множество Ω_n всех графов на вершинах $V_n = \{1, \ldots, n\}$ (без петель, кратных рёбер и ориентации). Разумеется, $|\Omega_n| = 2^{C_n^2}$: любое ребро полного графа может либо присутствовать, либо отсутствовать в данном графе, а всего у полного графа C_n^2 рёбер. Возьмем число $p_n = n^{1/(2l)-1} \in (0, 1)$. Выберем *случайный* граф из множества Ω_n, полагая вероятность $\mathbb{P}(G)$ графа $G = (V_n, E)$ равной $p_n^{|E|}(1 - p_n)^{C_n^2 - |E|}$. Иными словами, граф G образуется в результате схемы испытаний Бернулли: мы C_n^2 раз бросаем монетку со смещенным центром тяжести и вероятностью «решки» p_n и всякий раз проводим очередное ребро, если монетка падает решкой кверху, и не проводим это ребро в противном случае.

В терминах теории вероятностей (см. [2, 9]) возникает *вероятностное пространство*, в котором графы суть элементарные исходы, а события — любые множества графов. Естественно, если A — событие, то

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{G \in A} \mathbb{P}(G).$$

И, конечно, если мы знаем, что $\mathbb{P}(A) > 0$, то мы можем определенно утверждать, что множество A не пусто.

Обозначим, стало быть, через $A_n \subset \Omega_n$ событие, состоящее из графов G, у которых одновременно $\chi(G) > k$ и $g(G) > l$. Мы покажем, что $\mathbb{P}(A_n) > 0$ при достаточно больших n, и, тем самым, теорема Эрдёша будет обоснована. Замечательно то, что по ходу дела мы увидим, насколько важно было правильно подобрать «веса», т. е. вероятности рёбер p_n.

Для каждого n введем *случайную величину* $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$, которая на данном графе $G \in \Omega_n$ принимает значение, равное количеству простых (т. е. без повторений вершин) циклов длины $\leqslant l$ в графе G. Это своего рода «число вредоносных циклов» — тех циклов, которых нет в графах из A_n.

Напомним, что *математическое ожидание* случайной величины ξ на конечном пространстве Ω — это среднее значение функции ξ, выражаемое формулой

$$\mathbb{M}\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(\omega). \tag{1}$$

Из этой формулы мгновенно следует *линейность математического ожидания*, а именно, для любых случайных величин ξ_1, ξ_2 и любых чисел c_1, c_2 верно равенство

$$\mathbb{M}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1\mathbb{M}\xi_1 + c_2\mathbb{M}\xi_2.$$

С другой стороны, из этой же формулы (1) следует, очевидно, и то, что если $\xi \colon \Omega \to \{y_1, \ldots, y_k\}$, то

$$\mathbb{M}\xi = \sum_{i=1}^{k} y_i\mathbb{P}(\xi = y_i). \tag{2}$$

Вернемся к нашему пространству Ω_n и нашей случайной величине X_n. Можно представить X_n в следующем виде:

$$X_n = \sum_{r=3}^{l} X_{n,r},$$

где $X_{n,r}(G)$ — число простых циклов длины r в графе G. Далее, можно занумеровать все простые циклы C_i на r вершинах в *полном* графе K_n числами i от 1 до $C_n^r \cdot \frac{(r-1)!}{2}$, ведь C_n^r — это число способов выбрать вершины цикла, а $\frac{(r-1)!}{2}$ — это число способов построить цикл на данных r вершинах. Тогда, в свою очередь,

$$X_{n,r} = \sum_{i=1}^{C_n^r \frac{(r-1)!}{2}} X_{n,r,i}, \quad \text{где } X_{n,r,i} = \begin{cases} 1, & \text{если } C_i \subset G, \\ 0, & \text{если } C_i \not\subset G. \end{cases}$$

За счет линейности математического ожидания, а также формулы (2) получаем

$$\mathbb{M}X_n = \sum_{r=3}^{l} \sum_{i=1}^{C_n^r \frac{(r-1)!}{2}} \mathbb{P}(C_i \subset G) = \sum_{r=3}^{l} \sum_{i=1}^{C_n^r \frac{(r-1)!}{2}} p_n^r =$$
$$= \sum_{r=3}^{l} C_n^r \frac{(r-1)!}{2} p_n^r \leqslant \sum_{r=3}^{l} \frac{n^r}{r!} \frac{(r-1)!}{2} p_n^r < \sum_{r=3}^{l} n^r p_n^r.$$

У нас $np_n = n^{1/(2l)}$, откуда $\mathbb{M}X_n < l(np_n)^l = l\sqrt{n}$.

Напомним, что *неравенство Маркова* в теории вероятностей утверждает следующее (см. [9]): *Пусть ξ — случайная величина, принимающая* *только неотрицательные значения, и a — положительное число; тогда*

$$\mathbb{P}(\xi > a) \leqslant \frac{\mathbb{M}\xi}{a}.$$

В нашем случае неравенство Маркова влечет оценку

$$\mathbb{P}\Big(X_n > \frac{n}{2}\Big) \leqslant \frac{\mathbb{M}X_n}{n/2} < \frac{2l}{\sqrt{n}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Значит, найдется такое n_1, что $\mathbb{P}(X_n > n/2) < 1/2$ при всех $n \geqslant n_1$.

Обозначая через $A_{n,1}$ событие $\{X_n \leqslant n/2\}$, получаем при $n \geqslant n_1$

$$\mathbb{P}(A_{n,1}) > \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Иными словами, есть «много» (в смысле вероятности) графов, у каждого из которых «мало» (не больше $n/2$) вредоносных циклов.

Теперь займемся хроматическим числом. Нам нужно оценить его снизу, и мы ранее предлагали оценку числом вершин в самом большом полном подграфе (это число принято обозначать $\omega(G)$). Однако ясно, что в данной ситуации такая оценка не пригодится, ведь мы как раз стремимся избавиться и от полных подграфов, и даже от коротких циклов. Что ж, попробуем зайти с совершенно другой стороны. Напомним, что *независимым множеством* называется любое такое множество вершин графа G, что никакие два его элемента не соединены ребром. Соответственно, определим $\alpha(G)$ (*число независимости*) как мощность самого большого независимого множества вершин. Понятно, что в некотором смысле величины $\omega(G)$ и $\alpha(G)$ двойственны друг другу (отсюда и обозначения: α — первая буква греческого алфавита, ω — последняя). Оказывается,

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$$

В сущности, это очевидно. Каждый цвет в правильной раскраске графа — это независимое множество, ведь не должно быть рёбер с концами одного цвета. Поэтому даже при правильной покраске максимальными по мощности независимыми множествами (которая не обязательно существует) потребуется не менее $\dfrac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ цветов.

Пусть

$$m_n = \left\lceil \frac{3 \ln n}{p_n} \right\rceil.$$

Разумеется, $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим случайную величину Y_n, равную числу независимых множеств мощности m_n в случайном графе.

Заметим, что $\mathbb{P}(\alpha(G)<m_n)=\mathbb{P}(Y_n=0)$, откуда за счет неравенства Маркова получаем $\mathbb{P}(\alpha(G) < m_n) = 1 - \mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) \geqslant 1 - \mathbb{M}Y_n$.

Из линейности математического ожидания следует равенство

$$\mathbb{M}Y_n = C_n^{m_n}(1-p_n)^{C_{m_n}^2}.$$

Действительно, пусть $Y_{n,i}=1$, если i-е множество мощности m_n независимо, и равно 0 в противном случае. Тогда $\mathbb{M}Y_{n,i} = (1-p_n)^{C_{m_n}^2}$ и $Y_n = \sum_{i=1}^{C_n^{m_n}} Y_{n,i}$.

Далее,

$$\mathbb{M}Y_n \leqslant n^{m_n} \exp\Bigl(-(1+o(1))\frac{p_n m_n^2}{2}\Bigr) = \exp\Bigl(m_n \ln n - (1+o(1))\frac{p_n m_n^2}{2}\Bigr) =$$
$$= \exp\Bigl(\frac{(1+o(1))3\ln^2 n}{p_n} - \frac{(1+o(1))4{,}5\ln^2 n}{p_n}\Bigr) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Значит, $\mathbb{P}(\alpha(G) < m_n) \to 1$, $n \to \infty$, т. е. найдется n_2, начиная с которого

$$\mathbb{P}(A_{n,2}) > \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где $A_{n,2} = \{\alpha(G) < m_n\}$.

Из (3) и (4) следует, что существуют графы на $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ вершинах, которые принадлежат пересечению событий $A_{n,1}$, $A_{n,2}$. Возьмем любой такой граф G. У него не больше $n/2$ вредоносных циклов и $\alpha < m_n$. Удалим из графа G по одной вершине из каждого вредоносного цикла. Получится новый граф G'. У этого графа число вершин не меньше $n/2$, нет вредоносных циклов (т. е. $g(G') > l$) и $\alpha < m_n$ (число независимости при удалении вершин вырасти, очевидно, не может). Значит,

$$\chi(G') \geqslant \frac{n/2}{\alpha(G')} > \frac{n/2}{m_n} = (1+o(1))\frac{np_n}{6\ln n} = (1+o(1))\frac{n^{1/2l}}{6\ln n}.$$

Сколь бы большими ни были числа l и k, отыщется такое n_3, что при $n>n_3$

$$(1+o(1))\frac{n^{1/2l}}{6\ln n} > k.$$

Таким образом, при $n \geqslant \max\{n_1, n_2, n_3\}$ граф G' и есть искомый граф. Теорема доказана.

§ 3. Вокруг теоремы Эрдёша

Теорема Эрдёша, как мы видели, носит неконструктивный характер. С одной стороны, она показывает, тем самым, «силу и славу» вероятностного метода. С другой стороны, перебор, который она сулит, необозрим, и задача отыскания явных конструкций остается актуальной. Первым эту задачу решил Ловас в 1968 году (см. [20]). Его конструкция исключительно нетривиальна, и мы не будем приводить ее в настоящей статье.

Скажем несколько слов об одной замечательной конструкции графа с большим хроматическим числом и без треугольников — конструкции, отличной от ранних конструкций Татта и Зыкова. А именно, пусть даны натуральные числа n и $r \leqslant n/2$. Обозначим через $KG_{n,r}$ граф, у которого вершины — все возможные r-элементные подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, а рёбра — пары вершин, пересечение которых (как подмножеств) пусто. Этот граф называется *кнезеровским*. Очевидно, что если $r > n/3$, то в множестве $\{1, \ldots, n\}$ нет трех r-элементных подмножеств, которые бы попарно не пересекались. Это значит, что в таком кнезеровском графе нет треугольников. А что с его хроматическим числом?

Нетрудно заметить, что $\chi(KG_{n,r}) \leqslant n$. В самом деле, мы можем покрасить в i-й цвет все вершины, которые содержат (как подмножества) элемент i. Конечно, такие цвета пересекаются, но, удаляя пересечения, мы и получим нужную раскраску, ведь если множества попарно пересекаются по данному элементу, то между ними заведомо нет рёбер. Доказанную оценку можно слегка улучшить: верно, что $\chi(KG_{n,r}) \leqslant n-2r+2$. Действительно, рассмотрим только цвета, порожденные элементами $1, \ldots, n-2r+1$. Тогда непокрашенными останутся лишь те вершины, которые целиком содержатся в множестве $\{n-2r+2, \ldots, n\}$, имеющем мощность $2r-1$. Однако сами-то вершины имеют мощности r, и, стало быть, точно пересекаются. Красим их в последний цвет с номером $n-2r+2$, и оценка установлена.

Знаменитая гипотеза Кнезера состояла в том, что $\chi(KG_{n,r}) = n-2r+2$. При $r > n/3$, т. е. в случаях, когда $g(KG_{n,r}) > 3$, совсем не ясно, почему эта гипотеза могла бы быть правильной. Мы знаем оценку

$$\chi(KG_{n,r}) \geqslant \frac{|V(KG_{n,r})|}{\alpha(KG_{n,r})} = \frac{C_n^r}{\alpha(KG_{n,r})}.$$

Но $\alpha(KG_{n,r}) \geqslant C_{n-1}^{r-1}$, так как мы уже приводили отличный пример независимого множества мощности C_{n-1}^{r-1}: это то самое множество вершин, каждая из которых содержит данный элемент i. А значит, из нашей оценки нельзя получить ничего лучшего, нежели неравенство

$$\chi(KG_{n,r}) \geqslant \frac{C_n^r}{C_{n-1}^{r-1}} = \frac{n}{r},$$

правая часть которого меньше трех. Факт, что $\alpha(KG_{n,r}) = C_{n-1}^{r-1}$, был доказан Эрдёшем, Ко и Радо в 1961 году (см. [6]). Гипотеза же Кнезера была доказана упомянутым выше Ловасом с помощью придуманного им же топологического метода (см. [7, 8, 21]).

Теперь, зная, что $\chi(KG_{n,r}) = n - 2r + 2$, получаем, что, например, при $r = [n/3] + 1$ и достаточно больших n будет и $g(KG_{n,r}) > 3$, и $\chi(KG_{n,r}) > k$.

Еще одно важное направление исследований состоит в минимизации числа вершин графа с данными k, l. Но это предмет отдельного обсуждения, к которому в этой заметке мы не станем приступать. Зато в следующем разделе мы поговорим о варианте задачи, возникающем в связи с классической проблематикой комбинаторной геометрии. А в завершение этого раздела отметим, что с вероятностными методами в комбинаторике и со случайными графами можно более детально познакомиться по книгам [1, 4, 11, 15, 19].

§ 4. Теорема Эрдёша и дистанционные графы

Одной из самых известных и ярких проблем комбинаторной геометрии является задача Нелсона — Хадвигера о хроматическом числе пространства. А именно, речь идет об отыскании минимального числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, в которые можно так покрасить все точки пространства $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Практически очевидно, что $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$. Однако уже для плоскости все печально: известно лишь, что

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7.$$

И обе оценки очень простые! Подробности об истории задачи можно найти в обзорах и книгах [10, 12, 13, 16, 24–26], а сейчас заметим, что нижняя оценка хроматического числа плоскости получается следующим образом. Берется граф G, изображенный на рис. 1 («Мозеровское веретено»). У него рёбра — отрезки длины 1. Хроматическое число этого графа, как нетрудно видеть, равно четырем. Значит, $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant \chi(G) = 4$. Таким образом, мотивированным оказывается определение *дистанционного графа* в $\mathbb{R}^n$, т. е. графа, вершины которого — точки пространства, а рёбра — пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1.

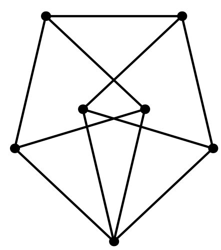

Рис. 1. Мозеровское веретено

Тут есть одна тонкость. Иногда требуют, чтобы в дистанционном графе были проведены все рёбра — отрезки длины 1. А иногда разрешают часть рёбер не проводить. Мы будем в первом случае говорить о «полных» дистанционных графах.

При чем же здесь теорема Эрдёша? В 1976 году Эрдёш спросил: *Верно ли, что дистанционный граф на плоскости, имеющий хроматическое* *число 4, обязан содержать треугольники, подобно графу, изображенному на* рис. 1? В 1979 году Уормалд дал отрицательный ответ на этот вопрос, построив пример нужного графа на 6448 вершинах. В 1996 году О'Доннелл и Хохберг уменьшили число вершин до двадцати трех! Их конструкция описана в популярной статье [5], и пока она остается рекордной. В 2000 году О'Доннелл обосновал аналог теоремы Эрдёша (см. [22,23]): *Для любого l существует дистанционный граф на плоскости с хроматическим числом 4 и обхватом, большим l.*

Еще интереснее устроена жизнь в случае, когда размерность дистанционного графа стремится к бесконечности. Здесь известно (см. [10]), что

$$(1{,}239\ldots + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n,$$

т. е. по существу хроматические числа пространств растут экспоненциально. И тут имеются следующие аналоги теоремы Эрдёша, доказанные автором настоящей статьи и его учениками (см. [24]).

Теорема 1. *Существует константа $c > 1$ и такая последовательность полных дистанционных графов $G_n \subset \mathbb{R}^n$, что $g(G_n) > 3$ и $\chi(G_n) > (c + o(1))^n$.*

Теорема 2. *Для любого l существует константа $c > 1$ и такая последовательность дистанционных графов $G_n \subset \mathbb{R}^n$, что $g(G_n) > l$ и $\chi(G_n) > (c + o(1))^n$.*

Принципиальная разница между теоремами 1 и 2 в том, что доказательство теоремы 1 конструктивно и в нем дистанционные графы полны, а доказательство теоремы 2, подобно доказательству теоремы Эрдёша, вероятностное, и в нем дистанционные графы заведомо не являются полными. Отметим, что для доказательства теоремы 2 требуется существенно более трудная вероятностная техника, нежели та, которую мы использовали во втором разделе. Разумеется, здесь мы подробности не приводим.

В связи с теоремой 2 возникает вопрос: существуют ли полные дистанционные графы, обладающие характеристиками из теоремы 2? И этот вопрос исключительно труден! Сейчас удается лишь доказать следующий факт, полученный Алоном и Купавским в [14].

Теорема 3. *Для любого l существует константа c и такая последовательность полных дистанционных графов $G_n \subset \mathbb{R}^n$, что $g(G_n) > l$ и $\chi(G_n) > c\dfrac{n}{\ln n}$.*

Даже до n не дотянули! Может быть, кто-то из читателей улучшит этот результат?

Список литературы

[1] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[2] *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматлит, 1988.

[3] *Зыков А. А.* О некоторых свойствах линейных комплексов // Матем. сб. 1949. Т. 24, № 2. С. 163–188.

[4] *Колчин В. Ф.* Случайные графы. 2-е изд. М.: Физматлит, 2004.

[5] *Райгородский А., Рубанов О., Кошелев В.* Хроматические числа // Квант. 2008. № 3. С. 13–22.

[6] *Райгородский А. М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2015.

[7] *Райгородский А. М.* Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2011.

[8] *Райгородский А. М.* Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике // Квант. 2011. № 1. С. 7–15.

[9] *Райгородский А. М.* Комбинаторика и теория вероятностей. Долгопрудный: Интеллект, 2013.

[10] *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2015.

[11] *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011.

[12] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // УМН. 2001. Т. 56, № 1. С. 107–146.

[13] *Райгородский А. М.* Хроматические числа. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2015.

[14] *Alon N., Kupavskii A.* Two notions of unit distance graphs // J. Comb. Theory. Ser. A. 2014. V. 125. P. 1–17.

[15] *Bollobás B.* Random Graphs. 2nd edition. Cambridge Univ. Press, 2001.

[16] *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. New York: Springer, 2005.

[17] *Descartes B.* A three-colour problem // Eureka. 1947. V. 9. P. 21.

[18] *Erdős P.* Graph theory and probability // Canad. J. Math. 1959. V. 11. P. 34–38.

[19] *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* Random graphs. New York: Wiley, 2000.

[20] *Lovász L.* On chromatic number of finite set-systems // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1968. V. 19. P. 59–67.

[21] *Matoušek J.* Using the Borsuk — Ulam theorem // Universitext. Berlin: Springer, 2003.

[22] *O'Donnell P.* Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph description // Geombinatorics. 2000. V. 9, № 3. P. 145–152.

[23] *O'Donnell P.* Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. II. Graph embedding // Geombinatorics. 2000. V. 9, № 4. P. 180–193.

[24] *Raigorodskii A. M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. AMS. Contemp. Math. 2014. V. 625. P. 93–109.

[25] *Raigorodskii A. M.* Coloring distance graphs and graphs of diameters // Thirty essays on geometric graph theory. Springer, 2013. P. 429–460.

[26] *Soifer A.* The mathematical coloring book. New York: Springer, 2009.

А. М. Райгородский, МГУ им. М. В. Ломоносова,
Московский физико-технический институт,
Институт математики и информатики Бурятского ГУ
`mraigor@ya.ru`