По мотивам задачника

Разрезание параллелепипеда на бруски

Л. Радзивиловский, Д. Радченко, М. Танцюра, И. Фещенко

Рассмотрим множество длин всех рёбер N-мерного параллелепипеда. «Брусок» будет означать параллелепипед, у которого это множество содержит не более k элементов (определение бруска зависит от k, $1 \leqslant k \leqslant N$). Мы докажем, что параллелепипед можно разрезать на конечное количество брусков в точности тогда, когда длины его рёбер порождают линейное пространство размерности не выше k над $\mathbb{Q}$. Это обобщает известную теорему Макса Дена о разрезании прямоугольников на квадраты. Получено ещё несколько результатов о разрезаниях параллелепипедов.

§ 1. Введение

Следующий хорошо известный результат доказан Деном в 1903 г.:

Теорема 1 (Ден). *Прямоугольник можно представить как объединение неперекрывающихся квадратов в точности тогда, когда отношение его ширины к высоте рационально.*

Разумеется, вместо этого можно говорить о разрезаниях параллелограммов на ромбы.

В этой статье мы исследуем возможные многомерные обобщения теоремы 1.

Первоначальное доказательство Дена [9] было сложным. С тех пор предложено несколько доказательств этой теоремы. В 1940 г. Брукс, Смит,

Feshchenko I., Radchenko D., Radzivilovsky L., Tantsiura M. Dissecting a brick into bars // Geometriae Dedicata. 2010. V. 145, № 1. P. 159–168. Статья содержит решение задачи 13.10 из сборника «Математическое просвещение». Сер. 3. Вып. 13. М.: МЦНМО, 2009. С. 181. Перевод Б. Р. Френкина.

Стоун и Тутте [7] нашли удивительное доказательство, в котором вопрос переводится на язык электрических цепей.

В 1950-е годы Хадвигер [13] нашёл, вероятно простейший, метод, в котором с помощью функции Гамеля строятся аддитивные функции от прямоугольников [14]. Похожее доказательство было позже опубликовано В. Г. Покровским [3]. Как отметил В. Г. Болтянский [1, 2], в этих доказательствах можно обойтись без аксиомы выбора.

Другое доказательство, основанное на применении деформаций, можно найти в [4, теорема 5.6.1]. Фрейлинг и Ринне [11] опубликовали удачный обзор подобных результатов, который включает и ещё некоторые связанные с ними теоремы.

Мы воспроизведём доказательство Хадвигера — Покровского, поскольку применим похожие идеи в более общих ситуациях.

Очевидный путь обобщения теоремы Дена, отмеченный несколькими авторами, — выяснить, когда можно разрезать трёхмерный прямоугольный параллелепипед на кубы. Поскольку при этом каждая грань разрезается на квадраты, из теоремы Дена легко следует, что отношение длин любых двух рёбер параллелепипеда должно быть рационально.

Неочевидное обобщение теоремы, послужившее отправной точкой нашего исследования, — разрезание параллелепипедов на бруски.

Определение. *Трёхмерный брусок* — это параллелепипед, у которого не больше двух различных длин рёбер. Проще говоря, это коробка вида $a \times a \times b$.

Теорема 2. *В трёхмерном пространстве параллелепипед с рёбрами a, b, c можно разрезать на бруски в точности тогда, когда a, b, c связаны нетривиальным линейным соотношением с целыми коэффициентами. Другими словами, a, b, c должны порождать линейное пространство над $\mathbb{Q}$ размерности не выше 2.*

Чтобы обобщить понятие бруска на четырёхмерное пространство, возможны три способа: это будет либо параллелепипед типа $a \times a \times a \times b$ (равны три разнонаправленных ребра, всё равно какие), либо параллелепипед типа $a \times a \times b \times b$, либо оба. Приведём две теоремы, которые покажут, почему для получения результатов, аналогичных теоремам 1 и 2, нужны оба типа брусков.

Теорема 3. *В четырёхмерном пространстве можно разрезать параллелепипед вида $a \times a \times b \times b$ на параллелепипеды вида $x \times x \times x \times y$ в точности тогда, когда a, b связаны нетривиальным линейным соотношением с целыми коэффициентами.*

Теорема 4. *В четырёхмерном пространстве можно разрезать параллелепипед вида* $a \times a \times a \times b$ *на параллелепипеды вида* $x \times x \times y \times y$ *в точности тогда, когда* a, b *связаны нетривиальным линейным соотношением с целыми коэффициентами.*

Таким образом, теоремы 3 и 4 подсказывают, что для обобщения теоремы 2 требуется следующее

Определение. Будем называть *k-бруском* в n-мерном пространстве параллелепипед, у которого не больше k различных длин рёбер.

Теорема 5. *В n-мерном пространстве параллелепипед с длинами рёбер* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *можно разрезать на k-бруски в точности тогда, когда* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *порождают линейное пространство над* $\mathbb{Q}$ *размерности не выше* k.

Будем называть прямоугольник хорошим, если длина какого-либо его ребра целая. Хорошо известен следующий факт, напоминающий предыдущие теоремы:

Теорема 6. *Любой прямоугольник, который можно разрезать на хорошие, является хорошим.*

Для теоремы 6 было предложено много изящных доказательств. В [22] S. Wagon опубликовал набор из 14 доказательств, и этот набор далеко не полон, там же отмечено, что некоторые из этих доказательств можно обобщить на высшие размерности и на произвольные аддитивные подгруппы в $\mathbb{R}$, не ограничиваясь подгруппой $\mathbb{Z}$. Наш метод даёт ещё одно доказательство этой теоремы. На самом деле мы докажем следующее её обобщение. Пусть дана аддитивная подгруппа G в $\mathbb{R}$, а также число $K \leqslant N$. Назовём N-мерный параллелепипед хорошим, если G содержит длины его рёбер, идущих не менее чем в K различных направлениях.

Теорема 7. *Любой параллелепипед, который можно разрезать на хорошие, сам является хорошим.*

Теоремы 6 и 7 полезны для решения некоторых очень естественных головоломок. Однажды семилетний мальчик спросил папу, почему у него не получается заполнить коробку $6 \times 6 \times 6$ брусками $1 \times 2 \times 4$. Папа оказался математиком и для ответа на вопрос развил некую алгебраическую теорию (N. G. de Bruijn [8]). Утверждение следует из теоремы 7. В разделе 5 приведены и другие приложения наших теорем к головоломкам.

В этой статье мы докажем все вышеприведённые теоремы. Доказательства таких теорем состоят из двух частей. Надо доказать, во-первых, что при выполнении некоторого алгебраического условия параллелепипед разрезается нужным образом и, во-вторых, что при невыполнении этого условия нужное разрезание не существует.

Первое доказывается построением нужного разрезания (его существование в некоторых случаях очевидно, но не всегда). Вторая часть доказательства состоит в построении некоторой аддитивной функции. Функции различны для различных теорем, но в их применении есть некоторые общие черты. Поэтому перед доказательствами теорем мы рассмотрим общие способы построения аддитивных функций от параллелепипедов.

§ 2. Аддитивные функции

Определение. Пусть S — множество всех параллелепипедов, грани которых параллельны граням данного параллелепипеда. Будем называть *функцию* $f\colon S \to \mathbb{R}$ *аддитивной*, если для любого $P \in S$, разрезанного на два параллелепипеда P_1 и P_2 гиперплоскостью, параллельной двум его граням, справедливо равенство $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$.

Предложение 1. *Для любой аддитивной функции f и любого параллелепипеда P, разрезанного на n параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, справедливо равенство $f(P) = f(P_1) + \ldots + f(P_n)$.*

Можно сформулировать и доказать более тонкое утверждение.

Определение. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}$, где $T \subset S$, называется *аддитивной*, если для любого $P \in T$, разрезанного на два параллелепипеда $P_1, P_2 \in T$ гиперплоскостью, параллельной его граням, выполнено равенство $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$.

Определение. Пусть P — параллелепипед, разрезанный на n параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, и пусть координатные оси параллельны его рёбрам. Тогда каждый из параллелепипедов разрезания определяется его границами по каждой координате. Через X_k будем обозначать множество границ параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ по координате x_k, а через $S' \subset S$ — множество параллелепипедов, границы которых по координате x_k принадлежат X_k при каждом k.

Предложение 1$'$. *Если функция $f\colon S' \to \mathbb{R}$ аддитивна, то $f(P) = f(P_1) + \ldots + f(P_n)$.*

Предложение 1$'$ имеет следующую мотивировку. В некоторых наших теоремах о параллелепипедах потребуется строить $\mathbb{Q}$-линейные функции над $\mathbb{R}$. При этом используется базис Гамеля и, следовательно, аксиома выбора. Было бы странно, если бы наши результаты о разрезании «коробки» на конечное количество частей зависели от аксиомы выбора, и в действительности это не имеет места. Чтобы избежать использования аксиомы выбора, можно строить $\mathbb{Q}$-линейные функции не на всём $\mathbb{R}$, а на его подходящем подпространстве, а именно конечномерном над $\mathbb{Q}$.

Чтобы не затемнять суть дела, будем использовать базисы Гамеля, но хотим отметить, что то же самое доказательство проходит и без аксиомы выбора. Те немногие читатели, которые не принимают аксиому выбора, смогут освободить от неё все наши доказательства с помощью последнего определения и предложения $1'$.

Доказательство предложения 1 можно разделить на две леммы.

Лемма 1. *Рассмотрим семейство из $n-1$ гиперплоскостей, параллельных некоторому множеству граней параллелепипеда P. Если они разрезают параллелепипед P на параллелепипеды $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то $f(P) = f(p_1) + \ldots + f(p_n)$.*

Лемма 2. *Рассмотрим q конечных семейств параллельных гиперплоскостей, причём гиперплоскости каждого семейства соответственно параллельны некоторому множеству граней параллелепипеда P. Если они разрезают параллелепипед P на параллелепипеды $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то $f(P) = f(p_1) + \ldots + f(p_n)$.*

Доказательство лемм. Лемма 1 непосредственно следует из определения индукцией по k. Лемма 2 доказывается индукцией по q. Базой индукции служит лемма 1.

Проведём индуктивный переход. Возьмём семейство параллельных гиперплоскостей, разрезающее параллелепипед P на $P_1, \ldots, P_m$. Каждый P_j разрезается уже лишь $q-1$ семействами гиперплоскостей на части p_i. По предположению индукции

$$f(P_1) + f(P_2) + \ldots + f(P_m) = f(p_1) + \ldots + f(p_n),$$

а по лемме 1

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2) + \ldots + f(P_m).$$

Отсюда $f(P) = f(p_1) + \ldots + f(p_n)$. $\square$

Предложение 1 вытекает из леммы 2 следующим образом. Продолжим все гиперплоскости граней параллелепипедов, полученных при разрезании. Они разрезают параллелепипеды $P_1, \ldots, P_m$ на меньшие части $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Следовательно, по лемме 2

$$f(P) = f(p_1) + \ldots + f(p_n) = f(P_1) + f(P_2) + \ldots + f(P_m). \qquad \square$$

Мы видим, что это доказательство пригодно и для более сильного предложения $1'$.

Для построения аддитивных функций от параллелепипедов мы применим две конструктивные идеи.

Идея первая. Пусть $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ — некоторое множество аддитивных функций вещественной переменной, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_N$ — длины рёбер параллелепипеда P с направлениями $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Положим

$$f(P) = \phi_1(a_1) \cdot \phi_2(a_2) \cdot \ldots \cdot \phi_N(a_N).$$

Ясно, что эта функция аддитивна, так же как любая линейная комбинация таких функций и любая полилинейная функция от $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

Идея вторая. Параллелепипед P имеет $2N$ граней, а именно, нижнюю и верхнюю границу по каждой координате, которые и будут называться нижними и верхними гранями соответственно. Вершина параллелепипеда P будет называться чёрной, если она принадлежит чётному числу нижних граней, и белой в противном случае.

Пусть дана функция $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Тогда можно определить следующую функцию от параллелепипедов: $f(P) =$ сумме значений функции F в чёрных вершинах параллелепипеда P минус сумма её значений в его белых вершинах.

Нетрудно видеть, что функция f аддитивна на параллелепипедах.

§ 3. Низшие размерности

Доказательство теоремы 1. Пусть w, h — ширина и высота прямоугольника.

В одну сторону доказательство очевидно: если $w/h = m/n$, где $m, n \in \mathbb{N}$, то $w/m = h/n =: a$, и прямоугольник можно замостить квадратами со стороной a.

Для доказательства в другую сторону возьмём $\mathbb{Q}$-линейную функцию $f(x)$. Тогда функция $F(\text{прямоугольник}) = w \cdot f(h) - h \cdot f(w)$ аддитивна, а на квадратах равна нулю. Если ширина и высота прямоугольника несоизмеримы, то можно построить $\mathbb{Q}$-линейную функцию f, для которой $f(w) = 0$, $f(h) = 1$ (выбрав базис в $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$, содержащий и w, и h). Тогда $F(\text{прямоугольник}) \neq 0$. Но если прямоугольник можно разрезать на квадраты, то $F(\text{прямоугольник}) = 0$ в силу аддитивности. Теорема доказана. □

Можно использовать в доказательстве и другую аддитивную функцию. Построим $\mathbb{Q}$-линейную функцию $f(x)$, положительную в точке w и отрицательную в точке h. Рассмотрим функцию

$$F(\text{прямоугольник}) = f(\text{ширина}) \cdot f(\text{высота}).$$

Она неотрицательна на любом квадрате и отрицательна на исходном прямоугольнике.

Доказательство теоремы 2 (о трёхмерных брусках и параллелепипедах). В отличие от теоремы 1, здесь доказательство в обе стороны нетривиально.

В одну сторону: пусть a, b, c линейно зависимы над $\mathbb{Z}$. Их нетривиальная линейная комбинация может иметь не более одного нулевого коэффициента. Если есть нулевой коэффициент, то имеется также положительный и отрицательный коэффициент. В этом случае условие принимает вид $ka = mb$, где $k, m \in \mathbb{N}$. Выберем два семейства гиперплоскостей — пусть одно разрезает a-рёбра на m равных частей, а другое разрезает b-рёбра на k равных частей. Тогда параллелепипед распадётся на бруски.

Если в линейной комбинации все коэффициенты ненулевые, то два из них имеют одинаковый знак, а один — противоположный. Без потери общности можно записать $ka + mb = nc$, где k, m, n — натуральные числа. Поэтому одной гиперплоскостью можно разрезать каждое ребро длины c на две части: ka/n и mb/n. Эта гиперплоскость разрежет параллелепипед на два меньших. Оба они имеют по два соизмеримых ребра разных направлений, а для этого случая задача уже решена.

В другую сторону: пусть f, g — две $\mathbb{Q}$-линейные функции над $\mathbb{R}$. Рассмотрим параллелепипед P, заданный длинами трёх рёбер: a в направлении x, b в направлении y и c в направлении z. Положим

$$F(P) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что F аддитивна и равна нулю для любого бруска.

Если a, b, c линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то можно построить такую $\mathbb{Q}$-линейную функцию f, что $f(a) = f(c) = 0$, $f(b) = 1$, и такую $\mathbb{Q}$-линейную функцию g, что $g(a) = g(b) = 0$, $g(c) = 1$. Тогда $F(P) \neq 0$ и, значит, P нельзя разрезать на бруски. □

Доказательство теоремы 3. Здесь нас интересует разрезание параллелепипеда P вида $a \times a \times b \times b$ на параллелепипеды вида $a \times a \times a \times b$.

Как мы уже знаем, если a, b соизмеримы, то параллелепипед можно разрезать даже на кубы.

Если Q — четырёхмерный параллелепипед $a \times b \times c \times d$, то положим

$$F(Q) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ f(a) & f(c) \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} b & d \\ f(b) & f(d) \end{pmatrix},$$

где f — некоторая $\mathbb{Q}$-линейная функция над $\mathbb{R}$. Функция F полилинейна по a, b, c, d и, следовательно, аддитивна.

Функция F равна нулю на параллелепипедах вида $x \times x \times x \times y$, $x \times x \times y \times x$, $x \times y \times x \times x$, $y \times x \times x \times x$.

Если a, b в исходном параллелепипеде P несоизмеримы, то можно выбрать f так, что $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Тогда

$$F(P) = \left(\det\begin{pmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{pmatrix}\right)^2 = a^2 \neq 0.$$

Следовательно, P не разрезается на части, на которых F равна нулю. □

Доказательство теоремы 4. Здесь мы рассматриваем разрезание параллелепипедов вида $a \times a \times a \times b$ на параллелепипеды вида $x \times x \times y \times y$. Опять-таки, если a, b соизмеримы, то параллелепипед разрезается на кубы.

Пусть a, b несоизмеримы. Предположим, что разрезание возможно, и пусть f — некоторая функция вещественной переменной. Для каждого параллелепипеда P размера $x \times y \times z \times t$ положим $F(P) = f(x)f(y)f(z)f(t)$. Пусть теперь f — такая $\mathbb{Q}$-линейная функция, что $f(a) = -1, f(b) = 1$. Если R — параллелепипед с размерами $a \times a \times a \times b$, то $F(R) = -1 < 0$. Но если P имеет размеры $x \times x \times y \times y$, $x \times y \times x \times y$ или $x \times y \times y \times x$, то $F(P) = f^2(x)f^2(y) \geqslant 0$. Так как F аддитивна, R нельзя разрезать на части, на которых F неотрицательна. □

§ 4. Положительный базис и высшие размерности

Теорема о положительном базисе. *Рассмотрим*[2)] *векторы $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Q}^k$, принадлежащие открытому полупространству H. Тогда существует базис из k векторов $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{Q}^k$ того же полупространства, через который векторы $v_1, \ldots, v_n$ выражаются с неотрицательными коэффициентами.*

Следствие. *Если положительные вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ порождают k-мерное линейное пространство над $\mathbb{Q}$, то найдутся такие положительные числа $e_1, \ldots, e_k$, что $x_1, \ldots, x_n$ — их линейные комбинации с неотрицательными рациональными коэффициентами (и даже с неотрицательными целыми коэффициентами).*

Это следствие — в действительности частный случай теоремы о положительном базисе: положительные элементы пространства, натянутого на $x_1, \ldots, x_n$, составляют полупространство, и потому существует базис $e_1, \ldots, e_k$, через который можно выразить $x_1, \ldots, x_n$ с неотрицательными коэффициентами. Чтобы обеспечить их целочисленность, достаточно раз-

---

[2)] В [10] дано другое доказательство этой теоремы.

делить каждый элемент базиса на наименьший общий знаменатель всех коэффициентов в этих выражениях.

Теорема о положительном базисе (точнее, её следствие) ниже применяется для доказательства теоремы 5 в одну сторону.

Доказательство теоремы о положительном базисе. Выберем базис $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ в граничной гиперплоскости B полупространства H и положим $f_k = -f_1 - \ldots - f_{k-1}$. Произвольный вектор u из B можно представить как $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{k-1} f_{k-1}$. Без ограничения общности пусть α_1 — наименьший из этих коэффициентов. Если $\alpha_1 < 0$, то $u = -\alpha_1 f_k + (\alpha_2 - \alpha_1) f_2 + \ldots$, и в этом представлении все коэффициенты неотрицательны. В любом случае вектор из B оказывается неотрицательной линейной комбинацией векторов $f_1, \ldots, f_{k-1}, f_k$. Если теперь h — произвольный вектор из H, то $h, f_1, \ldots, f_{k-1}$ — базис в $\mathbb{Q}^k$, а выпуклая оболочка векторов $h, f_1, \ldots, f_k$ совпадает с $H \cup B$.

Выберем $\varepsilon > 0$ и положим $e_j = f_j + \varepsilon h$ $(j = 1, \ldots, k)$. Заметим, что $h = (e_1 + \ldots + e_k)/(k\varepsilon)$, т. е. h принадлежит выпуклой оболочке векторов $e_1, \ldots, e_k$, а при малом ε они соответственно близки к $f_1, \ldots, f_k$. Поэтому выпуклая оболочка векторов $e_1, \ldots, e_k$ близка к выпуклой оболочке векторов $h, f_1, \ldots, f_k$, т. е. заполняет почти всё H. При достаточно малом ε в неё попадают данные векторы $v_1, \ldots, v_n$.

Теперь достаточно показать, что $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — базис в $\mathbb{Q}^k$. Пусть

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j e_j = 0.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{k-1} (\beta_j - \beta_k) f_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \beta_j h = 0.$$

Следовательно, все β_j равны между собой, их сумма равна нулю и потому они сами равны нулю, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы 5. Нужно разрезать на k-бруски n-мерный параллелепипед, рёбра которого, идущие в n различных направлениях $1, \ldots, n$, равны соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Предположим, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ порождают линейное пространство над $\mathbb{Q}$ размерности не выше k. Тогда по следствию из теоремы о положительном базисе существуют положительные $e_1, e_2, \ldots, e_k$, такие что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно выражаются через них с неотрицательными целыми коэффициентами.

Следовательно, можно построить такие n семейств параллельных гиперплоскостей, что каждое семейство разрезает ребро длины a_j, идущее в направлении j, на отрезки с длинами $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Значит, параллелепипед разрезается на параллелепипеды с рёбрами длины $e_1, e_2, \ldots, e_k$, т. е. с не более чем k различными длинами рёбер.

Пусть теперь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ порождают линейное пространство над $\mathbb{Q}$ размерности выше k. Тогда среди них можно выбрать подмножество из $k+1$ чисел, линейно независимых над $\mathbb{Q}$. Без ограничения общности это $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Построим $\mathbb{Q}$-линейные функции $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, такие что при $i, j \leqslant k+1$ выполнено равенство $f_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Для любого параллелепипеда P, рёбра которого, идущие в направлениях $1, \ldots, n$, равны соответственно $l_1, l_2, \ldots, l_n$, рассмотрим $(k+1)\times(k+1)$-матрицу $M(P)$ с элементами $m_{i,j} = f_i(l_j)$. Положим $F(P) = \det(M(P)) \cdot l_{k+2} l_{k+3} \cdot \ldots \cdot l_n$. Функция F аддитивна (поскольку полилинейна по l_j), равна 0 на брусках (поскольку тогда два столбца матрицы равны) и не равна нулю на исходном параллелепипеде. Поэтому исходный параллелепипед нельзя разрезать на бруски. $\square$

§ 5. «Хорошие» прямоугольники и параллелепипеды

Применив теперь вторую идею построения аддитивных функций, докажем утверждение, чуть более общее, чем теорема 6.

Определение. Пусть G — фиксированная аддитивная подгруппа в $\mathbb{R}$ (таким образом, $\mathbb{Z}$ — лишь один из возможных примеров). Назовём n-мерный параллелепипед хорошим, если длина хотя бы одного его ребра принадлежит G.

Теорема 6′. *Параллелепипед, который можно разрезать на хорошие параллелепипеды, является хорошим.*

Доказательство теоремы 6′. Выберем в $\mathbb{R}^n$ систему координат с осями, параллельными рёбрам параллелепипеда. Подгруппу G^n и все её параллельные сдвиги (которые являются элементами факторгруппы $\mathbb{R}^n/G^n$), будем называть решётками.

Пусть F — некоторая функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, значения которой определены решёткой (и не зависят от сдвигов на G^n). Такая функция не единственна, она зависит от выбора функции $\mathbb{R}^n/G^n \to \mathbb{R}$. Мы выберем её позже.

Вспомним, что вершина параллелепипеда P считается чёрной, если содержится в чётном количестве нижних граней, и белой в противном случае. Определим следующую аддитивную функцию от параллелепипедов: $f(P)$ = сумма значений функции F по чёрным вершинам параллелепипеда P минус сумма её значений по белым вершинам.

Если длина некоторого ребра принадлежит G, то можно вычеркнуть все пары вершин, соединённых параллельными ему рёбрами. Следовательно, если исходный параллелепипед разрезается на хорошие параллелепипеды, то любая функция f указанного вида равна на нём нулю.

Но если у исходного параллелепипеда нет сторон с длинами из G, то все его вершины принадлежат разным решёткам. Поэтому можно считать F равной 1 на одной из его чёрных вершин и равной 0 на всех других вершинах, чёрных и белых. Тогда f будет равна 1 на исходном параллелепипеде. Противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 7. Предположим[3)], что в G входят менее чем k разнонаправленных рёбер параллелепипеда, однако разрезание на хорошие параллелепипеды существует. Обозначим разнонаправленные рёбра через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и пусть лишь первые из них принадлежат G, так что $a_k, \ldots, a_n$ заведомо не принадлежат G.

Рассмотрим $(n-k+1)$-мерную грань параллелепипеда с рёбрами $a_k, \ldots, a_n$. Наше разрезание порождает разрезание этой грани на хорошие параллелепипеды в смысле теоремы $6'$, откуда получаем противоречие. $\square$

Несколько примеров

Пример 1. Семилетний Ф. В. де Брёйн спросил своего папу [8]: можно ли заполнить коробку $6 \times 6 \times 6$ плитками $1 \times 2 \times 4$?

Ответ отрицательный. Назовём параллелепипед хорошим, если длина одного из его рёбер целая и кратна четырём. Плитки $1 \times 2 \times 4$ — хорошие, коробка — плохая, и по теореме $6'$ её нельзя заполнить этими плитками.

Пример 2 (XXIV Турнир городов, весна 2003 г., младший тренировочный вариант, задача 5). Можно ли замостить доску 2003×2003 доминошками 1×2, которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3, которые разрешается располагать только вертикально? (Две стороны доски условно считаются горизонтальными, а две другие — вертикальными.)

Ответ отрицательный. Сожмём доску и все плитки замощения по вертикали в три раза и по горизонтали в два раза. У всех плиток одна сторона будет целой, и по теореме 6 доска, если её можно замостить, должна иметь целую сторону. Но это не выполнено.

Пример 3 (XXVI Турнир городов, осень 2004 г., старший основной вариант, задача 5). Пусть A и B — два прямоугольника. Из прямоугольников, равных A, сложили прямоугольник, подобный B. Докажите, что из прямоугольников, равных B, можно сложить прямоугольник, подобный A.

[3)] В [10] приведено и другое доказательство этой теоремы.

Доказательство. Предположим, что A имеет несоизмеримые стороны w и h. Прямоугольник B', подобный B, можно составить из прямоугольников, подобных A. По теореме 6 одна из сторон прямоугольника B' равна nw, где n целое. Точно так же у него есть сторона, равная mh, где m целое. Эти две стороны имеют разную длину, поскольку w, h несоизмеримы. Склеив $m \times n$ одинаково ориентированных экземпляров прямоугольника B, получим прямоугольник, подобный A. Если же стороны прямоугольника A соизмеримы, то соизмеримы и стороны любого прямоугольника, составленного из его копий, и утверждение задачи тривиально. □

Разумеется, для всех этих примеров существуют более элементарные доказательства, но они требуют некоторой изобретательности, тогда как теоремы 6 и $6'$ создают общий и простой метод.

Вывод: даже в трудной задаче искусная конструкция аддитивной функции может привести к изящному решению.

Благодарности

Авторы хотели бы поблагодарить профессора Джона Джейна, руководителя 15-й Международной математической олимпиады студентов университетов (IMC 15), во время которой возник замысел этой статьи. Первый из авторов благодарен Израильскому математическому союзу за спонсирование участия Израиля в этом мероприятии. Авторы также благодарны Егору Шелухину и Асафу Лави за проверку текста и ценные замечания.

Список литературы

[1] *Болтянский В. Г.* Равновеликие и равносоставленные фигуры. М.: Гостехиздат, 1956.

[2] *Болтянский В. Г.* Третья проблема Гильберта. М.: Наука, 1977.

[3] *Покровский В. Г.* О разрезаниях n-мерных параллелепипедов // Матем. заметки. Т. 33, № 2. 1983. С. 273–280.

[4] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: МЦНМО, 2015.

[5] *Barnes F. W.* Algebraic theory of brick packing I // Discrete Math. 1982. V. 42, № 1. P. 7–26.

[6] *Barnes F. W.* Algebraic theory of brick packing II // Discrete Math. 1982. V. 42, № 2. P. 129–144.

[7] *Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T.* The dissection of rectangles into squares // Duke Math. J. 1940. V. 7, № 1. P. 312–340.

[8] *de Bruijn N. G.* Filling boxes with bricks // Amer. Math. Monthly. 1969. V. 76. P. 37–40.

[9] *Dehn M.* Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke // Math. Ann. 1903. V. 57, № 3. P. 314–332.

[10] *Feshchenko I., Radchenko D., Radzivilovsky L., Tantsiura M.* Dissecting a brick into bars // Geometriae Dedicata. 2010. V. 145, № 1. P. 159–168. http://arxiv.org/abs/0809.1883.

[11] *Freiling C., Rinne D.* Tiling a square with similar rectangles // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 547–558.

[12] *Hadwiger H.* Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder // Math. Z. 1952. V. 55, № 3. P. 292–298.

[13] *Hadwiger H.* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin: Springer-Verlag, 1957.

[14] *Hamel G.* Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ // Math. Ann. 1905. V. 60. P. 459–62.

[15] *Hüngerbuhler N., Nüsken M.* Delian metamorphoses // Elem. Math. 2006. V. 61. P. 1–19.

[16] *Kazarinoff N. D., Weitzenkamp R.* Squaring rectangles and squares // Amer. Math. Monthly. 1973. V. 80. P. 877–888.

[17] *Keating K.* Signed shape tilings of squares // Discrete Math. 2000. V. 215, № 1–3. P. 133–145. arXiv:math/9809118v2 [math.CO].

[18] *Keating K., King J.* Signed tilings with squares // J. Combin. Theory. Ser. A. 1999. V. 85, iss. 1. P. 83–91.

[19] *Kenyon R.* Tiling with square and square-tileable surfaces // Ecole Normale Superieure de Lyon. 1993. V. 119. P. 1–26.

[20] *King J. L. F.* Tiling stuff, an online collection of several brick-tiling articles: http://www.math.ufl.edu/~squash.

[21] *Laczkowich M., Szekeres G.* Tilings of the square with similar rectangles // Discrete Comput. Geom. 1995. V. 13. P. 569–572.

[22] *Wagon S.* Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle // Amer. Math. Monthly. 1987. V. 94, № 7. P. 601–617.

Л. Радзиviловский, Тель-Авивский университет (Израиль)
levr78@hotmail.com

Д. Радченко, Математический институт Макса Планка (Бонн, Германия)
danrad@mpim-bonn.mpg.de

М. Танцюра, Институт математики НАН Украины
mtan@meta.ua

И. Фещенко, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
ivanmath007@gmail.com