Задача Майхилла о синхронизации ряда стрелков

М. Д. Турбин

§ 1. Введение

В сборнике «Математическое просвещение» [3] была опубликована следующая

Задача 8.12 (задача Майхилла о стрелках). Идеальный солдат является конечным автоматом (т. е. принимает конечное число состояний и воспринимает конечное число сигналов). Солдат понимает «лево-право», воспринимает сигналы только от своих непосредственных соседей и понимает, является ли он крайним в шеренге. За один такт он обменивается сигналами с соседями. Можно ли так запрограммировать солдат, что если поставить в шеренгу солдат, находящихся в некотором одинаковом состоянии, то после того как первому [крайнему в шеренге] будет дана команда, через некоторое время все они выстрелят одновременно? (Программа не должна зависеть от длины шеренги.)

Задача вместе с её обобщением была частью проекта, предложенного на 16-й Летней конференции Турнира городов [2]. Её решила команда, состоявшая из Дмитрия Баранова и Алексея Буфетова.

Эта «задача о ряде стрелков» (предложенная Джоном Майхиллом в 1957 году) есть классическая проблема синхронизации множества автоматов. Один из её аспектов — проблема синхронизации клеточных автоматов, возникшая при наблюдении деления клеток и изучении работы сердца [1]: возбуждения клеток сердца должны быть синхронизированы; когда происходит рассинхронизация, наблюдается *фибрилляция*, которую лечат разрядом, перезапускающим сердце.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14–01–00548.

Мы установим более сильный результат: покажем, что если команда вначале дана крайнему солдату и всего в строю n солдат, то одновременный выстрел можно осуществить через $2N-2$ единицы времени, т. е. за время пути сигнала от одного конца шеренги до другого и обратно. Ясно, что быстрее это произойти не может. Действительно, за меньшее время первый солдат не успеет получить отклик от последнего. Если он стреляет независимо от этого, то при большей длине шеренги он выстрелит через то же самое время. Но тогда при достаточно большой длине шеренги первый солдат выстрелит до того, как последний солдат получит сигнал, а в этот момент последний солдат заведомо не выстрелит — противоречие.

Впервые алгоритм для $2N-2$ единиц времени получен в работе [4]. Позже различным авторам удалось значительно сократить количество используемых состояний. Мы опишем новое доказательство, которое, на наш взгляд, более естественно придумывается школьником или студентом.

Вначале мы добьёмся одновременного выстрела (§ 2), затем будем оптимизировать время (§ 3). В статье изложены основные этапы доказательства для N вида 2^k+1 (k натуральное). Оно без труда обобщается на произвольное N. Полная версия статьи с формализованным изложением алгоритма публикуется в интернете.

§ 2. Решение задачи 8.12

Пусть в первый момент времени крайний слева стрелок посылает два сигнала, a и b. Сигнал a передаётся дальше сразу после получения, а сигнал b — с задержкой на 2 такта. Крайний справа стрелок получает инструкцию сразу после прихода сигнала отправлять его назад. Легко видеть, что сигналы встретятся в районе центра. Чтобы обработать эту ситуацию, вводим дополнительные инструкции: пусть каждый стрелок после получения сигнала b слева или сигнала a справа ждёт два такта. Если за это время стрелок получает и второй сигнал (или вообще получает их одновременно), он начинает считать себя «средним» в строю. Причём если сигналы получены одновременно, стрелок считает себя единственным средним, а а если второй сигнал получен в течение 2 тактов после первого — левым средним. В последнем случае он сообщает правому соседу об этом (специальным сигналом), и тот начинает считать себя правым средним в строю. С этого момента средние стрелки начинают считать себя крайними для соответствующих половин строя. Если средний — один, то он крайний для обеих половин. Далее, аналогичный процесс (отправка двух сигналов) осуществляется симметрично с двумя половинами строя. Когда же нужно стрелять? Введём дополнительную инструкцию: если стрелок получает свой только что отправленный сигнал обратно через один такт, то он отправляет соседу с этой стороны сигнал «стреляй» и через один такт стреляет сам. Очевидно, что для двух и трёх солдат данная схема работает. Для остальных случаев одновременность выстрела доказывается по индукции.

Задача 8.12 решена. Отметим, что при таком алгоритме выстрел произойдёт в течение $3N$ тактов. Наша дальнейшая цель — добиться максимально быстрого выстрела, т. е. за $2N-2$ такта.

§ 3. Как оптимизировать время

Сформулируем задачу о синхронизации стрелков в терминах автоматов. *Клеточный автомат* C есть целочисленная решётка или некоторая её часть, каждый элемент которой (*ячейка автомата*) имеет вид $M = \langle Q, q_0, N, \Delta\rangle$, где Q — множество состояний автомата; q_0 — начальное состояние автомата; $\{M, M_1, M_2, \ldots\}$ — некоторое множество клеточных автоматов, окрестность данного автомата M в решётке; Δ — множество переходов, причём $\Delta \subset Q(M) \times Q(M_1) \times Q(M_2) \times \ldots$

Таким образом, переход в новое состояние определяется состоянием всей окрестности автомата. При этом переход происходит одновременно у всех ячеек клеточного автомата. Состояние q будем представлять в виде $q = \langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$, где $f_i \in F_i$ — значения соответствующих параметров.

В этих терминах можно сформулировать задачу 8.12 следующим образом [1]:

Имеется цепь из N одинаковых автоматов. Каждый автомат имеет n возможных состояний, причём n не зависит от N. Состояние каждого автомата в следующий момент времени зависит от его состояния в текущий момент времени и состояний двух его соседей, правого и левого. В начальный момент все автоматы находятся в некотором начальном состоянии S_0. В этот момент на крайний левый автомат подаётся внешний сигнал, выводящий его из начального состояния. Существует ли такая конструкция автоматов (правила смены их состояний), что все автоматы через некоторое время перейдут одновременно в одно и то же состояние S и ни один из них не перейдёт в это состояние ни в один из предыдущих моментов?

Мы докажем, что существует решение задачи 8.12, переводящее цепочку в требуемое состояние за $2N-2$ такта.

Проанализируем приведённое выше *решение задачи 8.12* и наметим *план доказательства* сделанного утверждения.

Пусть $N = 2^k + 1$, где k натуральное. Тогда существует центральный автомат — на расстоянии 2^{k-1} от краёв цепочки. Заметим, что если мы будем передавать полученный сигнал дальше по цепочке в каждом такте, а после того как он дошёл до правого края — передавать его в обратную сторону, то спустя $2^k + 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1}$ тактов он окажется ровно в середине цепи, на пути назад. Также заметим, что если мы начнём передавать вместе с основным сигналом его копию, которая будет идти в 3 раза медленнее, то есть передача будет происходить в каждом третьем такте, то спустя $3 \cdot 2^{k-1}$ тактов эта копия тоже окажется ровно в середине, на пути вперёд. Таким образом, центральный автомат сможет узнать, что он центральный, спустя $3 \cdot 2^{k-1}$ тактов.

Далее он будет себя воспринимать как крайний для каждой из половин шеренги, и процесс повторится. На этом пути получается решение задачи 8.12, изложенное выше. Рассматривая сигналы различных типов, идущие с разными скоростями, их отражения и встречи, можно получить оценку на время выстрела $(2 + \varepsilon)N$, но при наивном подходе количество типов сигналов (а значит, и число состояний автомата) будет расти с уменьшением ε. Преодолеть возникшую трудность можно с помощью дополнительных сигналов, распространяющихся в обратном направлении. Пусть слева направо идёт сигнал («волна возбужения»), и каждый автомат, до которого он дошёл, отправляет налево два специальных сигнала с разницей по времени. Когда оба эти сигнала дойдут до крайнего левого автомата, он излучает следующую волну возбуждения. Она приходит к соседнему автомату, но дальше передаётся лишь после того, как этот автомат также получит справа два специальных сигнала, и т. д. Таким способом можно породить любое количество сигналов, идущих слева направо с различными замедлениями.

Первый сигнал, возвращаясь назад после отражения от правого края, дойдёт до автомата на расстоянии 2^{k-2} от левого конца за $2^k + 3 \cdot 2^{k-2} = 7 \cdot 2^{k-2}$ тактов. Если запустить ещё один сигнал с замедлением в 7 раз, то спустя $7 \cdot 2^{k-2}$ тактов автомат на расстоянии 2^{k-2} от левого края сможет узнать, что он центральный для левой половины автоматов. Аналогичное утверждение будет верно для сигнала с замедлением в $2^{k+1} - 1$ раз: спустя $2^{k+1} - 1 = 2N - 2 - 1$ тактов будет обнаружен автомат, находящийся на расстоянии 1 от левого края и, следовательно, центральный для цепочки из трёх самых левых автоматов.

Как только обнаружен центральный автомат во всей цепи, аналогичный процесс (излучение многих сигналов с различными замедлениями) запускается в каждой её половине, и т. д. В итоге через $2^{k+1} = 2N - 2$ тактов после начального момента все автоматы одновременно обнаружат, что они и центральные, и крайние на образовавшихся участках цепи. В этом случае они смогут одновременно перейти в состояние S, что и требуется.

Список литературы

[1] *Варшавский В. И., Поспелов Д. А.* Оркестр играет без дирижёра. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

[2] *Иванов-Погодаев И. А., Белов-Канель А. Я.* Задачи 16-й летней Конференции Турнира Городов. Автоматы и конечно-определённые полугруппы // Математическое образование. 2004. № 3(30). С. 83–93.

[3] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 247.

[4] *Goto E.* A minimal time solution of the firing squad problem. Cambridge, MA: Harvard University, 1962. (Dittoed course notes for Applied Mathematics; V. 298). P. 52–59.

[5] *Moore F. R., Langdon G. G.* A generalized firing squad problem // Information and Control. 1968. V. 12, № 3. P. 212–220.

М. Д. Турбин, Московский физико-технический институт
max.turbin95@gmail.com