Непустота пересечения цепочки множеств

А. Д. Матушкин

Теорема. *Пусть $n \geqslant 2$ и $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества M, доля каждого из которых в M (т. е. $|A_k|/|M|$) больше, чем $1 - \frac{1}{n-1}$. Если A_k и A_{k+1} независимы (т. е. $|A_k| \cdot |A_{k+1}| = |A_k \cap A_{k+1}| \cdot |M|$) для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.*

Данная теорема сформулирована в работе [1] в качестве задачи 11(b). По словам авторов, им не было известно её решение. Теорема была доказана независимо А. Ляховцом и О. Орёл.

Доказательство теоремы. При $n = 2$ утверждение теоремы тривиально. Пусть $n > 2$. Оценим мощность пересечения $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$:

$$\begin{aligned}|A_1 \cap \ldots \cap A_n| &= |A_2 \cap \ldots \cap A_n| - |\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \geqslant \\ &\geqslant |A_2 \cap \ldots \cap A_n| - |\bar{A}_1 \cap A_2| \geqslant \\ &\geqslant |A_3 \cap \ldots \cap A_n| - |\bar{A}_2 \cap A_3| - |\bar{A}_1 \cap A_2| \geqslant \ldots \geqslant \\ &\geqslant |A_n| - \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{A}_k \cap A_{k+1}|.\end{aligned}$$

Положим $x_i := \frac{|A_i|}{|M|}$. В силу независимости множеств A_k и A_{k+1} имеем

$$\frac{|\bar{A}_k \cap A_{k+1}|}{|M|} = (1 - x_k)x_{k+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{|A_1 \cap \ldots \cap A_n|}{|M|} \geqslant x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)x_{k+1} =: f(x_1, \ldots, x_n).$$

Заметим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ линейна по каждому из своих аргументов x_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, причем коэффициент при x_k положителен: он равен

$x_2 > 0$ при $k = 1$, $x_{k+1} + x_{k-1} - 1 > 2 - \dfrac{2}{n-1} - 1 \geqslant 0$ при $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ и $x_{n-1} > 0$ при $k = n$. Следовательно, на множестве

$$X = \left\{(x_1, \ldots, x_n)\colon 1 \geqslant x_i \geqslant 1 - \frac{1}{n-1}\right\}$$

функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ возрастает по каждому из аргументов. Поэтому

$$f(x_1, \ldots, x_n) > f\left(\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right) = \frac{n-2}{n-1} - (n-1) \cdot \frac{n-2}{(n-1)^2} = 0.$$

Получаем, что $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| > 0$. Что и требовалось доказать. $\square$

Список литературы

[1] *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 164–177. http://arxiv.org/pdf/1411.3171.pdf.

А. Д. Матушкин, Московский физико-технический институт
1alexmatushkin1@gmail.com