Нам пишут

Случайные блуждания возвращаются

А. Ю. Юрьев

Теорема Пойа о случайном блуждании по координатной сетке [1] имеет несколько различных доказательств. Оригинальное рассуждение Пойа использует производящие функции. Одно из альтернативных доказательств — «электрическое» — основывается на связи между свойствами случайных блужданий и сопротивлением электрических цепей. Авторство этого доказательства, по-видимому, не установлено (небольшую историческую справку можно найти во введении книги [2]).

В книге [2] используется утверждение о том, что вероятность возвращения для бесконечной решётки равна пределу вероятностей возвращения для возрастающей последовательности октаэдров, см. [2, стр. 68–69, п. 2.1.5], однако строгого обоснования предельного перехода авторы не дают. Аналогичное утверждение оставлено без доказательства и в статье [3].

Эта заметка устраняет пробел в обосновании предельного перехода в «электрическом» доказательстве теоремы Пойа для случайного блуждания по трёхмерной сетке, приведённом в статье [3, стр. 45]. Уточнённое доказательство также использует только элементарные методы.

Рассматривается случайное блуждание по трёхмерной целочисленной сетке. Блуждание начинается в точке $(0,0,0)$, и на каждом шаге к одной из координат добавляется ± 1, при этом каждое из 6 направлений перемещения выбирается с равными вероятностями.

Пусть P — вероятность того, что при случайном блуждании по трёхмерной сетке мы когда-нибудь вернёмся в начальную точку. По определению, число P равно пределу последовательности P_T, $T \to \infty$, где P_T — вероятность вернуться в начальную точку, сделав не более T шагов (этот предел существует, так как P_T не убывает по T и ограничена сверху единицей; из этого также следует, что $P_T \leqslant P \leqslant 1$). Теорема Пойа утверждает, что $P < 1$.

Определение. Будем называть октаэдром с диагональю $2n$ подграф трёхмерной сетки с вершинами, имеющими координаты (x, y, z), причём $|x| + |y| + |z| \leqslant n$, соответственно его границей — все вершины, для которых $|x| + |y| + |z| = n$.

Рассмотрим случайное блуждание по октаэдру с диагональю $2n$. Во внутренних вершинах октаэдра этот процесс ничем не отличается от блуждания по трёхмерной сетке, а в граничных из 6 направлений доступна только часть.

Определение. Пусть $P_T^{(n)}$ — вероятность вернуться в центр октаэдра с диагональю $2n$, не попадая на его границу и сделав не более T шагов. Тогда вероятностью возврата в центр октаэдра с диагональю $2n$ до достижения его граничных точек называется величина $P^{(n)}$ — предел $P_T^{(n)}$ при $T \to \infty$.

Рассуждая по аналогии с P_T и P, получаем, что определение корректно (предел существует), и, кроме того, $P_T^{(n)} \leqslant P^{(n)} \leqslant P \leqslant 1$.

Теорема. *Верхняя оценка величины* P_T *имеет вид* $P_T \leqslant P^{(n)}$ *при* $n > T$.

Доказательство. Пусть $n > T$, тогда очевидно, что до границы октаэдра с диагональю $2n$ нельзя добраться за T или меньше шагов. Из этого следует, что $P_T = P_T^{(n)}$, так как при таких ограничениях на T блуждание по октаэдру не отличается от блуждания на всей трёхмерной сетке. Пользуясь тем фактом, что $P_T^{(n)} \leqslant P^{(n)}$, приходим к требуемой оценке: $P_T = P_T^{(n)} \leqslant P^{(n)}$. □

Перейдём к доказательству теоремы Пойа. При доказательстве мы будем ссылаться на леммы, доказанные в статье [3].

Доказательство теоремы Пойа. Возьмём произвольное $i > 0$, $n = 2^i - 1$ и октаэдр с диагональю $2n$. Пусть $C^{(n)}$ — проводимость между началом координат и границей этой фигуры. По лемме о вырезании дерева [3, стр. 45], из такой части сетки можно вырезать модифицированное троичное дерево глубины i с пересечениями рёбер на равном расстоянии от корня. Легко заметить, что проводимость дерева с такими пересечениями равна проводимости такого же дерева без пересечений.

По лемме о проводимости дерева [3, стр. 44], проводимости модифицированных троичных деревьев любой глубины больше 1. Поэтому и проводимости вырезаемых деревьев с пересечениями больше 1. По принципу монотонности [3, стр. 38] получаем, что $C^{(n)} > 1$.

Из физической интерпретации вероятности возврата [3, стр. 37] следует, что $P^{(n)} = 1 - C^{(n)}/6 < 5/6$.

Для произвольного T у нас есть верхняя оценка величины P_T: если взять достаточно большое i, а именно такое, что $2^i - 1 = n > T$, то P_T не будет превосходить $P^{(n)} < 5/6$.

Осталось выполнить предельный переход $P_T \to P$ и получить, что вероятность P возврата в начальную точку также не превосходит 5/6. □

Указание к задаче 10 из статьи [3]. Вырезать из квадрата $2n \times 2n$ модифицированное двоичное дерево с корнем в центре квадрата (см. задачу 12; при этом допускается склейка вершин на равных расстояниях от корня).

В заключение исправим несколько неточностей в статье [3], замеченных К. Душиным и Ф. Шаровым.

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
25	16 сверху	определения	иллюстрации (формальные определения даны в § 8 статьи «Сквозь сеть сопротивлений» в вып. 18 за 2014 год)
29	2 снизу	$b = (a + c + 2)/4$	$b = (a + e + 2)/4$
31	15 снизу	электрической цепи	электрической цепи с единичными проводимостями рёбер
32	6 снизу	возрастает	не убывает
34	16 снизу	$u(x) - \varepsilon(x)$	$u(x) + \varepsilon(x)$
34	13 снизу	$u(x) - \varepsilon(x) - u(y) + \varepsilon(y)$	$u(x) + \varepsilon(x) - u(y) - \varepsilon(y)$
35	7 снизу	резисторов	резисторов (т. е. резисторов ровно с одной общей вершиной, не граничной и не принадлежащей другим резисторам)
37	1 сверху	новой вершины	новой вершины (если она не граничная)
37	9 снизу	Если он начинает движение в точке a, то	Выходя из очередной вершины, он случайным образом выбирает, по какому ребру двигаться дальше, и проходит его целиком.
40	5 снизу	в качестве следствия	рассуждая аналогично доказательству
41	1 сверху	каких-либо вершин	каких-либо неграничных вершин

Список литературы

[1] *Pólya G.* Uber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz // Math. Ann. 1921. V. 84. P. 149–160.

[2] *Doyle P. G.*, *Snell J. L.* Random walks and electric networks // Mathematical Association of America, 1984 `http://arxiv.org/abs/math/0001057v1`.

[3] *Скопенков М., Смыкалов В., Устинов А.* Случайные блуждания и электрические цепи // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 16. М.: МЦНМО, 2012. С. 25–47.

А. Ю. Юрьев, Независимый московский университет

`alexander.yuriev@gmail.com`