Задачник

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Частица движется по прямой линии, при этом направление движения может меняться. В каждый момент времени ускорение частицы не превосходит 1 м/с^2 по абсолютной величине. Через одну секунду после начала движения частица вернулась в начальную точку. Докажите, что её скорость через 0,5 с после начала движения не превосходит 0,25 м/с. (*А. А. Колчев*)

2. а) В клетках квадрата 5×5 стоят знаки $+$ и $-$. Можно положить пятиклеточный крест центральной клеткой на клетку квадрата и поменять все знаки, закрытые крестом, на противоположные. Можно ли с помощью таких операций все знаки поменять на противоположные? (*Р. Г. Женодаров*)

   б) Дан граф, в вершинах которого стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается выбрать вершину и поменять знаки на противоположные в ней и в смежных вершинах. Докажите, что такими действиями можно заменить все знаки на противоположные. (*И. В. Митрофанов*)

3. Укажите на комплексной плоскости множество нулей всех многочленов с положительными коэффициентами степени не выше n. (*Р. М. Тригуб*)

4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентой порядка* k, если для некоторых $b_1, \ldots, b_k$ при всех $n \geqslant k$ выполняется равенство $b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0$. Пусть $b_0 = 1$, $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ либо содержит член, имеющий не менее 2016 различных простых делителей, либо является геометрической прогрессией: $a_n = c \cdot d^n$. (*А. Я. Канель-Белов*)

5. Имеется 9 точек на плоскости: три красные, три синие, три зелёные. Никакие 4 не лежат на одном цикле (окружности или прямой). Дугами циклов будем называть дуги окружностей и отрезки прямых. Докажите, что существуют три непересекающиеся дуги цикла, на каждой из которых лежит по точке каждого цвета. (*A. Oppenheim*)

6. Пусть точка D лежит на малой оси эллипсов Штейнера треугольника ABC на расстоянии $f\sqrt{2}$ от его центра, где f — расстояние от центра описанного эллипса Штейнера до его фокуса. Докажите, что C лежит на малой оси эллипсов Штейнера треугольника ABD. (Эллипсами Штейнера называются образы вписанной и описанной окружностей правильного треугольника при аффинном преобразовании, переводящем его в данный треугольник.) (*А. А. Заславский*)

7. Имеется n монет, разложенных в несколько стопок. За одну операцию из каждой непустой стопки берётся по монете, из них формируется новая стопка.
а) Докажите, что если $n = \binom{k}{2}$, то ситуация стабилизируется: возникнут стопки из $1, \ldots, k$ монет. Каков возможный период в общем случае?
б) Укажите максимально возможную длину предпериода. (*Фольклор*)

8. а) Дан полный граф на n вершинах. Двое по очереди красят его рёбра. Первый красит одно ребро красным, второй красит 100 рёбер в синий цвет, и так повторяется, пока все рёбра не будут покрашены. Может ли первый при достаточно больших n добиться появления полного подграфа со 100 вершинами и всеми красными рёбрами? (*А. Я. Канель-Белов*)
б) В красный цвет раскрашены 99 % рёбер полного графа из n вершин. Верно ли, что при достаточно большом n найдётся полный подграф из 1000 вершин с рёбрами одного цвета? (*А. Я. Канель-Белов*)
в) Каждое k-элементное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$ раскрашено в один из s цветов (например, при $k = 2$ получаем раскраску рёбер полного графа на n вершинах). Докажите, что при достаточно большом n найдётся такое подмножество $U \subset \{1, \ldots, n\}$, что все его k-элементные

подмножества — одного и того же цвета, причём если x — минимальный элемент из U, то число элементов в U не меньше $x + 2s$. (*Фольклор*)

9. а) Матрица A называется *нормальной*, если $AA^* = A^*A$, где A^* — матрица, транспонированная к матрице A. Какова максимальная размерность векторного подпространства комплексных $n \times n$-матриц, все элементы которого нормальны? (*Международная студенческая олимпиада, 2015*)
   б) Какова максимальная размерность подпространства попарно коммутирующих комплексных $(n \times n)$-матриц? (*Э. Б. Винберг*)

10. Дан многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, e — основание натуральных логарифмов. Докажите, что $\max_{x \in [0,1]} |P(x)| > e^{-n}$. (*Международная студенческая олимпиада, 2015*)

11. (Задача на исследование.) Пусть k и n — фиксированные натуральные числа. Двое играют в следующую игру. Вначале все целые числа считаются непокрашенными. На каждом ходу первый игрок выбирает непокрашенное целое число и красит его в красный цвет, а второй игрок выбирает k непокрашенных целых чисел и красит их в синий цвет. Первый стремится создать арифметическую прогрессию длины n, а второй стремится ему помешать.
    а) Докажите, что при любых n и k у первого есть выигрышная стратегия (алгоритм, позволяющий выиграть при любых действиях второго).
    б) Для $n = 3$ найдите минимальное число ходов, за которое первый заведомо сможет выиграть.
    в) Постарайтесь оценить минимальное необходимое число ходов в общем случае. Верна ли полиномиальная или хотя бы экспоненциальная оценка? (*А. Я. Канель-Белов*)

12. а) Дан n-мерный шар единичного объёма. Пусть M_1 и M_2 — два его подмножества объёма ε. Докажите, что расстояние между ними ограничено функцией, зависящей от ε, но не от размерности.
    б) Аналогичный вопрос для n-мерного куба единичного объёма. (*Н. А. Бобылев, А. Я. Канель-Белов*)