Решения задач из прошлых выпусков

В скобках после условия задачи указан её автор, а после решения — автор решения.

6.10. Условие. Для тройки прямых можно определить окружность — окружность, описанную около соответствующего треугольника. Для четвёрки прямых общего положения можно определить точку — как пересечение всех окружностей троек прямых (исходная четвёрка без одной). Для пятёрки прямых можно определить окружность — как окружность, проходящую через все точки четвёрок, и т. д. Докажите, что вся эта цепочка определений корректна. (*Фольклор*)

Решение. Переформулируем утверждение задачи следующим образом. Назовём точку пересечения двух прямых центральной точкой этих прямых, а окружность, описанную около треугольника, — центральной окружностью трёх прямых, содержащих его стороны. Тогда надо доказать следующее утверждение.

Пусть даны n прямых ($n \geqslant 4$). Если n чётно, то пусть определены центральные окружности любых $n-1$ из этих прямых. Тогда они пересекаются в одной точке (назовём эту точку центральной точкой n прямых). Если n нечётно, то пусть определены центральные точки любых $n-1$ из этих прямых. Тогда они лежат на одной окружности (назовём её центральной окружностью n прямых).

При $n=4$ утверждение задачи хорошо известно (искомая точка называется точкой Микеля данных прямых) и доказывается простым счётом углов (см. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007. Задача 2.88. С. 40, 52–53). Сделав инверсию с центром в некоторой точке O, получим, что справедлива следующая

Лемма. *Пусть четыре окружности проходят через точку O. Тогда окружности, каждая из которых проходит через вторые точки пересечения трёх из данных окружностей, пересекаются в одной точке.*

Теперь утверждение задачи можно доказать по индукции. Пусть $n > 4$ и для меньших значений n утверждение верно.

Пусть n чётно. Обозначим данные прямые числами $1, \ldots, n$, центральную окружность прямых $2, \ldots, n$ через c_1, прямых $1, 3, \ldots, n$ — через c_2 и т. д. Аналогично центральную точку прямых $3, \ldots, n$ обозначим через A_{12} и т. д., центральную окружность прямых $4, \ldots, n$ через c_{123} и т. д., центральную точку прямых $5, \ldots, n$ через A_{1234} и т. д. (существование всех этих окружностей и точек следует из предположения индукции). Достаточно доказать, что окружности c_1, c_2, c_3, c_4 пересекаются в одной точке.

Из определения центральных окружностей и точек следует, что:

— окружности c_{123}, c_{124}, c_{134}, c_{234} проходят через точку A_{1234};
— точка A_{12} лежит на окружностях c_{123} и c_{124}, аналогичные утверждения верны для всех точек A_{ij} при $i, j = 1, \ldots, 4$;
— окружность c_1 проходит через точки A_{12}, A_{13}, A_{14} и т. д.

Поэтому искомое утверждение непосредственно следует из леммы, если в качестве O взять A_{1234}.

Пусть n нечётно. Обозначим данные прямые через $1, \ldots, n$, центральную точку прямых $2, \ldots, n$ через A_1, центральную окружность прямых $3, \ldots, n$ обозначим через c_{12}, центральную точку прямых $4, \ldots, n$ через A_{123}, центральную окружность прямых $5, \ldots, n$ через c_{1234} и т. д. (существование всех этих окружностей и точек следует из предположения индукции). Достаточно доказать, что точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности.

Из определения центральных окружностей и точек следует, что:

— точки A_{123}, A_{124}, A_{134}, A_{234} лежат на окружности c_{1234};
— окружность c_{12} проходит через точки A_{123} и A_{124}, и т. д.;
— точка A_1 лежит на окружностях c_{12}, c_{13}, c_{14}, и т. д.

Рассмотрим окружности c_{12}, c_{13}, c_{23} и c_{1234}. Они проходят через точку A_{123}, а вторыми точками их пересечения являются A_1, A_2, A_3, A_{124}, A_{134}, A_{234}. При этом описанными окружностями треугольников $A_1A_{124}A_{134}$, $A_2A_{124}A_{234}$ и $A_3A_{134}A_{234}$ будут окружности c_{14}, c_{24}, c_{34} соответственно. Эти окружности пересекаются в точке A_4, и по лемме окружность $A_1A_2A_3$ также проходит через эту точку.

Комментарий. Эта задача и её решение имеются в книге: *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. М.: Гостехиздат, 1952. С. 40–41, 295–303.

(*А. А. Заславский*)

12.6. Условие. Докажите, что монотонная функция дифференцируема в некоторой точке. (*Теорема Лебега*)

Решение. Докажем, что монотонная функция дифференцируема почти всюду. Эта теорема обычно излагается в курсе теории меры Лебега. Приводимое доказательство не использует понятия меры множества и измеримости, но ограничивается понятием множества меры 0.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ назовём *множеством меры* 0, если для всякого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть счётной системой интервалов с суммой длин меньше ε.

Заметим, что класс Null множеств меры 0 замкнут относительно

i) взятия подмножеств: если $A \in \mathrm{Null}$, $B \subset A$, то $B \in \mathrm{Null}$ (очевидно);

ii) не более чем счётных объединений: если $A_i \in \mathrm{Null}$ при всех $i = 1, 2, \ldots$, то и $\cup A_i \in \mathrm{Null}$. В самом деле, при данном ε множество A_n можно покрыть интервалами с суммой длин меньше чем $\varepsilon/2^n$, тогда суммарная длина всех интервалов будет меньше ε.

Слова «почти все точки множества $E \subset \mathbb{R}$» означают «точки множества $E \setminus E_0$, где E_0 — некоторое множество меры 0». Один из популярных способов доказать, что некоторое подмножество промежутка $\Delta \subset \mathbb{R}$ не пусто — установить, что ему принадлежат почти все точки промежутка. Этого достаточно, поскольку имеет место фундаментальный факт.

Теорема 1. *Если отрезок покрыт интервалами, то сумма длин интервалов больше длины отрезка.*

Доказательство. Докажем сначала, что если отрезок покрыт n интервалами, то сумма их длин больше, чем длина отрезка. Индукция по n. База $n = 1$ очевидна. Переход от $n - 1$ к n: если отрезок $[a, b]$ покрыт n интервалами, пусть (c, d), $c < a < d$, — тот из них, что содержит точку a. Тогда отрезок $[d, b]$ покрыт $n - 1$ интервалом, сумма их длин по индукционному предположению больше чем $b - d$, а длина интервала (c, d) больше $d - a$, в сумме получается больше чем $b - a$. Индукционный переход завершён. А из бесконечного покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие. $\square$

Докажем, что множество точек, в которых не дифференцируема данная монотонная (пусть возрастающая) функция $f(x)$, имеет меру 0. Ключевую роль играет

Теорема 2 (теорема Витали о покрытии). *Предположим, что множество $E \subset \mathbb{R}$ покрыто отрезками таким образом, что каждая точка $x \in E$ содержится в сколь угодно малом отрезке покрытия. Тогда из отрезков* *покрытия можно выбрать непересекающуюся конечную или счётную подсистему, покрывающую почти всё множество E.*

Здесь и далее длину отрезка или интервала D обозначаем $|D|$.

Доказательство. Будем считать, что E ограничено, скажем, $E\subset(0,1)$, и все отрезки покрытия лежат в интервале $(0, 1)$ (общий случай получается рассмотрением каждого из множеств $E \cap (n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, и объединением соответствующих покрытий). Пусть уже выбраны непересекающиеся отрезки $d_1, \ldots, d_n$. Рассмотрим длины всех отрезков нашего покрытия, не пересекающихся с выбранными (на первом шаге — вообще всех). Пусть ℓ_n — точная верхняя грань этих длин. В качестве d_{n+1} возьмём отрезок покрытия, не пересекающийся с $d_1, \ldots, d_n$, длина которого больше $\ell_n/2$. Этот процесс либо оборвётся — и тогда покрыто уже всё множество E (это следует из того, что каждая точка в E покрыта сколь угодно малыми отрезками), либо даёт бесконечную последовательность отрезков $d_1, d_2, \ldots$ Докажем, что они покрывают почти всё множество E.

В самом деле, эти отрезки не пересекаются и лежат в $(0, 1)$, так что сумма их длин не больше 1. Пусть D_n — интервал с той же серединой, что d_n, и в 5 раз большей длиной. Докажем, что при каждом k совокупность интервалов $D_k, D_{k+1}, \ldots$ покрывает множество $X = E \setminus \bigcup d_i$. Из этого будет следовать, что X имеет меру 0, поскольку ряд $\sum |d_n|$ сходится, а значит, $\sum_{n\geqslant k} |D_n| = 5 \sum_{n\geqslant k} |d_n| \to 0$.

Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Поскольку $x \notin \cup d_i$, найдётся отрезок покрытия $e \ni x$, не пересекающийся с $d_1, \ldots, d_{k-1}$. Пусть e не пересекается с $d_1, \ldots, d_m$ при некотором $m \geqslant k - 1$. Тогда $2|d_{m+1}| > \ell_m \geqslant |e|$. Это неравенство показывает, что m при данном e не может быть сколь угодно велико, так что будем считать m максимально возможным. Иными словами, отрезок d_{m+1} уже пересекается с e, а тогда несложно видеть, что $e \subset D_{m+1}$ и, значит, $x \in D_{m+1}$. Это нам и нужно. □

Теперь докажем, что множество точек, в которых функция $f(x)$ не дифференцируема, имеет меру 0. Можно считать, что дело происходит не на всей оси, а на отрезке.

Наклоном функции f на отрезке $[u, v]$ назовём число $(f(v)-f(u))/(v-u)$.

Отсутствие производной возрастающей функции f в точке x_0 имеет одну из следующих причин.

1) Функция f имеет в точке x_0 бесконечную производную:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty;$$

множество таких точек x_0 обозначим E_∞.

2) Найдутся такие рациональные числа $0 < p < q$, что для сколь угодно маленьких отрезков с одним из концов в точке x_0 наклон функции f бывает как меньше p, так и больше q. Множество соответствующих точек обозначим $E_{p,q}$.

Достаточно доказать, что меру 0 имеют множество E_∞ и каждое из множеств $E_{p,q}$.

В обоих случаях нам понадобится простая

Лемма. *Пусть на отрезке d выбрана система непересекающихся отрезков суммарной длины s, на каждом из которых наклон возрастающей функции f не меньше c. Тогда наклон функции f на отрезке d не меньше $c \cdot s/|d|$.*

Теперь рассмотрим множество E_∞. Выберем $M > 0$. Каждая точка множества E_∞ покрыта сколь угодно малым отрезком с наклоном функции f не меньше M. По теореме Витали почти всё множество E_∞ покрывается не более чем счётным объединением таких непересекающихся отрезков. Тогда в силу леммы сумма их длин стремится к 0 с ростом M, что и требовалось.

Для множества $E_{p,q}$ рассуждение аналогичное, но чуть тоньше. Именно, мы покажем, как из покрытия почти всего множества $E_{p,q}$ системой непересекающихся интервалов с некоторой суммой длин Q получить покрытие с суммой длин не больше $\frac{p}{q}Q$. Итерируя такой процесс, получим покрытие со сколь угодно малой суммой длин.

Итак, пусть почти всё множество $E_{p,q}$ покрыто интервалами $I_1, I_2 \ldots$ с суммой длин Q. Можно считать их непересекающимися. Внутри каждого интервала I_n применим теорему Витали к покрытию множества $E_{p,q} \cap I_n$ отрезками, наклон на которых меньше p. Затем рассмотрим интервалы, соответствующие этим отрезкам. Они не пересекаются и покрывают почти всё множество $E_{p,q}$. В каждом из них применим теорему Витали к отрезкам, наклон на которых не меньше q. Полученные интервалы снова покрывают почти всё $E_{p,q}$, и в силу леммы сумма их длин не больше, чем $\frac{p}{q}Q$, что и требовалось. (*Ф. Петров*)

12.9. Условие [1]. В клетках бесконечной целочисленной решётки стоят целые числа. Докажите, что сумма чисел в некотором квадрате делится на 2008. (*С. В. Охитин, А. Я. Белов*)

Замечание. Упрощёнными вариантами данной задачи являются задача 3 старшего основного варианта весеннего тура XVII Турнира городов (1996 г.) и задачи A1 а, б) проекта «Почти-периодичность и символическая динамика» XVII Летней конференции Турнира городов (2005 г.).

---

[1] Задача и её решение впервые опубликованы в [1].

Решение. Зафиксируем оси координат OX и OY, идущие по линиям сетки. Будем искать искомый квадрат в положительном квадранте. Каждой вершине решётки с координатами (x, y) мы сопоставим «цвет» $S(x, y)$, т. е. остаток по модулю 2008 суммы чисел, записанных в клетках с координатами (a, b), где $0 \leqslant a \leqslant x$, $0 \leqslant b \leqslant y$. Из двумерного обобщения теоремы ван дер Вардена [2, стр. 152] следует, что для любой конечной фигуры на решётке существует гомотетичная ей фигура одного цвета[2)]. В частности, существует квадрат с вершинами одного цвета. Пусть их координаты суть (x, y), $(x + k, y)$, $(x, y + k)$, $(x + k, y + k)$. Из совпадения величины S для вершин квадрата следует искомое, поскольку сумма чисел Σ в клетках квадрата, как легко убедиться, равна

$$\Sigma = S(x, y) - S(x + k, y) - S(x, y + k) + S(x + k, y + k) \equiv 0 \pmod{2008}.$$

Комментарий. Задача очевидным образом обобщается для k-мерного куба. Разбив куб на мелкие кубики, получаем аналогичный результат:

Теорема. *В клетках k-мерной решётки записаны целые числа. Тогда для любых m и n найдётся куб с ребром $L \cdot n$, где L — натуральное число, разбитый на n^k кубиков с ребром L, таких что сумма чисел в каждом из кубиков делится на m. (L, вообще говоря, зависит от k, n, m и расположения чисел.)*

Для одномерного случая это утверждение означает следующее: если на клетчатой ленте записаны целые числа, то найдётся n одинаковых отрезков, идущих подряд, на каждом из которых сумма чисел делится на m.

Другое обобщение заключается в следующем: в формулировке теоремы считаем, что записаны произвольные действительные числа, а в утверждении теоремы фразу *сумма чисел в каждом из кубиков делится на m* заменяем на фразу *отстоит от целого числа меньше, чем наперёд заданное число ε*. Доказательство повторяет те же соображения, только «цвета» получаются так: отрезок $[0, 1]$ разбиваем на $N > (n)^k \varepsilon^{-1}$ равных частей и «цветом» каждой точки с координатами $(x_1, \ldots, x_k)$ считаем номер части, куда попадает дробная часть суммы чисел, записанных в точках с координатами $(y_1, \ldots, y_k)$, где $1 \leqslant y_i \leqslant x_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Библиография

[1] *Белов А. Я., Охитин С. В.* Об одной комбинаторной задаче // УМН. 1993. Т. 48, вып. 2(290). С. 169–170.

2) Вопросы, связанные с теоремой ван дер Вардена, изложены в замечательной книжке Грэхема «Начала теории Рамсея» [3], которую мы рекомендуем читателю.

[2] *Бугаенко В. О.* Обобщённая теорема ван дер Вардена // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 10. М.: МЦНМО, 2006. С. 151–160.
[3] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

(*А. Я. Канель-Белов*)

13.6. Условие. Докажите, что в алгебре [квадратных] матриц порядка n выполняются следующие тождества.

а) Тождество Размыслова:

$$n\cdot \operatorname{tr}(A)\cdot \sum_{\sigma\in S_{n^2}}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2x_{\sigma(3)}\cdot\ldots\cdot x_{\sigma(n^2-1)}y_{n^2-1}x_{\sigma(n^2)} =$$

$$=\sum_{\sigma\in S_{n^2}}(-1)^\sigma Ax_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2\cdot\ldots\cdot y_{n^2-1}x_{\sigma(n^2)}+$$

$$+\sum_{\sigma\in S_{n^2}}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1Ax_{\sigma(2)}y_2\cdot\ldots\cdot y_{n^2-1}x_{\sigma(n^2)}+\ldots+$$

$$+\sum_{\sigma\in S_{n^2}}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2\cdot\ldots\cdot y_{n^2-1}Ax_{\sigma(n^2)}.$$

б) Тождество Амицура — Левицкого:

$$\sum_{\sigma\in S_{2n}}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot x_{\sigma(2n)}=0.$$

Здесь x_i, y_i, A — произвольные матрицы, S_k — группа перестановок k элементов, $(-1)^\sigma=+1$ для чётных перестановок и $(-1)^\sigma=-1$ для нечётных.

Решение. а) Напомним, что понятие *определителя* в учебниках линейной алгебры определяется тремя способами. Первый способ — через объём: с матрицей (a_{ij}) связывается линейное преобразование, переводящее вектор $\vec{e_i}$ в $\sum_i a_{ij}\vec{e_j}$, и $\det(a_{ij})$ есть коэффициент искажения объёмов. Второй способ определить это понятие — через известное равенство:

$$\det(a_{ij})=\sum_\sigma(-1)^\sigma\prod_i a_{i,\sigma(i)}.$$

Согласно третьему, аксиоматическому способу введения этого понятия, определитель есть полилинейная кососимметрическая функция на наборе векторов $\vec{v_i}$, равная 1 на наборе базисных векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, …

Основное соображение, принадлежащее Ю. П. Размыслову, таково. Пусть $F(v_1,\ldots,v_m)$ — многочлен, полилинейный и кососимметричный относительно системы векторов v_i, а V — векторное пространство размерности m, порождённое векторами v_i. Тогда значение $F(v_1,\ldots,v_m)$ пропорционально объёму параллепипеда, образованного набором векторов $v_1, \ldots, v_m$, или, что то же самое, *определителю* матрицы, образованной векторами строк $v_1, \ldots, v_m$. Рассмотрим оператор $A \in \mathrm{End}(V)$. Пусть функция f полилинейна и кососимметрична относительно $\{x_i\}$ и произвольным образом зависит от y. Тогда для $x = (x_1, \ldots, x_m)$ имеем

$$f(A \cdot x, Y) = f(Ax_1, \ldots, Ax_m, Y) = \det(A) f(x, Y).$$

Теперь положим $A = E + ta$ и разложим по степеням t. В силу тождества Гамильтона — Кэли

$$f(A \cdot x, Y) = \left(\sum_{k=0}^{m} \Phi_k(a) t^k \right) f(x, Y), \tag{1}$$

где $\Phi_k(a)$ есть *форма k-го порядка* от оператора a. Она равна сумме главных миноров порядка k матрицы оператора[3)] a. В частности, $\Phi_1(a) = \mathrm{tr}(a)$, $\Phi_m(a) = \det(a)$, $\Phi_0(a) = 1$.

С другой стороны, коэффициент при t^k равен

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} f(x_1, \ldots, x_m, Y)\big|_{ax_{i_\alpha} \to x_{i_\alpha}}$$

(здесь x_{i_α} заменяется на ax_{i_α}, а подстановка осуществляется в k местах, где появляется множитель t), в частности

$$\mathrm{tr}(a) f(x_1, \ldots, x_m, Y) = \sum_i f(x_1, \ldots, a \cdot x_i, \ldots, x_m, Y).$$

С матрицей A порядка n можно связать *оператор левого умножения* $L(A)$, переводящий каждую матрицу B в произведение AB. Покажем, что $\det(L(A)) = (\det(A))^n$. Пространство матриц есть прямая сумма своих подпространств R_i, отвечающих матрицам, у которых i-й столбец произвольный, а остальные — нулевые. Оператор $L(A)$ действует на каждом из этих подпространств стандартным образом, и все эти его ограничения имеют определитель, равный $\det(A)$. Поскольку на каждом из этих n подпространств объёмы изменяются в $\det(A)$ раз, итоговое изменение объёма окажется равным $(\det(A))^n$. Соответственно след $\mathrm{tr}(L(A))$ будет равен сумме следов на подпространствах, т. е. $n \cdot \mathrm{tr}(A)$.

Этот факт имеет альтернативное доказательство. Ясно, что $L(AB) = L(A)L(B)$, поэтому $\det(L(AB)) = \det(L(A)) \det(L(B))$. Если $A = \lambda \cdot E$,

---

[3)] То есть следу оператора $\bigwedge^k(a)$, действующего на векторном пространстве $\bigwedge^k(V)$. О внешнем произведении см. решение задачи 17.10, «Математическое просвещение», вып. 19, с. 263.

где E — единичная матрица, то $AB = \lambda B$, т. е. оператор умножения на A есть гомотетия в n^2-мерном пространстве $n \times n$-матриц. Его определитель равен $\lambda^{n^2} = (\lambda^n)^n = (\det(A))^n$. Если же $A(e_i) = e_i + e_j$, то A есть элементарная матрица с единичным определителем. С другой стороны, подстановка в кососимметрический многочлен $x_i = x_j$ приводит к нулевому результату, а из полилинейности тогда следует, что подстановка $x_i + x_j \to x_i$, $i \neq j$, результат не меняет, так что определитель $L(A)$ для такой элементарной матрицы A равен 1. Остаётся заметить, что произвольная матрица есть произведение элементарных.

В качестве f (см. начало решения) мы возьмём *многочлен Капелли*

$$C_n(x_1, \ldots, x_{n^2}, y_1, \ldots, y_{n^2-1}) = \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 \ldots y_{n^2-1} x_{\sigma(n^2)};$$

в качестве V — пространство всех $n \times n$-матриц, так что $m = n^2$. Тогда

$$\begin{aligned} C_n(A \cdot x_1, \ldots, A \cdot x_{n^2}, y_1, \ldots, y_{n^2-1}) &= \\ = \det(L(A)) C_n(x_1, \ldots, x_{n^2}, y_1, \ldots, y_{n^2-1}) &= \\ = \det(A)^n C_n(x_1, \ldots, x_{n^2}, y_1, \ldots, y_{n^2-1}). \end{aligned}$$

И соответственно

$$\sum_i C_n(x_1, \ldots, a x_i, \ldots, x_{n^2}, y_1, \ldots, y_{n^2-1}) = n \operatorname{tr}(a) C_n(x_1, \ldots, x_{n^2}, y_1, \ldots, y_{n^2-1}),$$

что нам и требовалось установить.

Замечание. Рассмотрим алгебру, в которой выполняется тождество Капелли порядка $k + 1$, т. е. все многочлены, полилинейные и кососимметрические по $k + 1$ переменным, обращаются в ноль (в матричном случае $k = n^2$). Пусть $C_n(x_1, \ldots, x_k, \vec{y})$ — многочлен Капелли порядка k. Определим операторы

$$\delta_m(z)(f) = \sum_{i_1 < \ldots < i_m} C_n(x_1, \ldots, x_k, \vec{y})\big|_{x_{i_\alpha} z \to x_{i_\alpha}}.$$

При этом естественно ожидать, что операторы $\delta_m(z)$ будут вести себя аналогично матричному случаю. И это действительно так. Если многочлен $F(x_1, \ldots, x_n, Y, t)$ полилинеен относительно набора $\{x_1, \ldots, x_n, t\}$ и кососиметричен относительно $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (и произвольным образом зависит от Y), то имеет место равенство

$$F(x_1, \ldots, x_n, Y, z^n) = \sum (-1)^m \delta_m(z)(f).$$

Это равносильно умножению на следы элементов, а добавление следов ведёт к конечномерности над кольцом, порождённым следами. Элементы алгебры оказываются алгебраическими над операторами $\delta_m(f)$ и тем самым конечномерными над ними. Это соображение оказалось необходимым в теории тождеств, в частности, для решения проблемы Шпехта.

б) Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, линейная по каждому x_i. *Оператором альтернирования* Alt назовём оператор

$$\mathrm{Alt}(F)\colon F(x_1, \ldots, x_n) \to \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Ясно, что

$$\mathrm{Alt}(F + G) = \mathrm{Alt}(F) + \mathrm{Alt}(G). \tag{2}$$

Кроме того, если F, G — полилинейные многочлены от непересекающихся множеств из k и $n-k$ переменных и $\mathrm{Alt}(F) = 0$, то

$$\mathrm{Alt}(F \cdot G) = 0. \tag{3}$$

В самом деле, пусть H — подгруппа перестановок из S_n, не смешивающих переменные x_i и y_i. Для каждого разбиения γ набора из n переменных $\{x_i, y_j\}$ на две группы из k и $n-k$ переменных (обозначим их Z^γ, T^γ) зафиксируем нумерацию переменных в каждой группе и соответственно элемент $\tau_\gamma\colon x_i \to z_i^\gamma, y_j \to t_j^\gamma$. Легко видеть, что тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(F \cdot G) &= \sum_\gamma (-1)^{\tau_\gamma} \sum_{\sigma_1 \in S_k} (-1)^{\sigma_1} F\bigl(z^\gamma_{\sigma_1(1)}, \ldots, z^\gamma_{\sigma_1(k)}\bigr) \times \\ &\quad \times \sum_{\sigma_2 \in S_{n-k}} (-1)^{\sigma_2} G\bigl(t^\gamma_{\sigma_2(1)}, \ldots, t^\gamma_{\sigma_2(n-k)}\bigr) = \\ &= \sum_\gamma (-1)^{\tau_\gamma} \cdot 0 \cdot \sum_{\sigma_2 \in S_{n-k}} (-1)^{\sigma_2} G\bigl(t^\gamma_{\sigma_2(1)}, \ldots, t^\gamma_{\sigma_2(n-k)}\bigr) = 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим моном $M = x_1 \ldots x_{2k}$. Каждой чётной перестановке σ и члену $x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2k-1)} x_{\sigma(2k)}$ сопоставляется член $x_{\sigma(2k)} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2k-1)}$ и соответствующая нечётная перестановка. При этом $\mathrm{Alt}(M)$ есть линейная комбинация выражений вида

$$x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2k-1)} x_{\sigma(2k)} - x_{\sigma(2k)} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2k-1)} = [x_{\sigma(2k)}, x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2k-1)}],$$

где $[a, b] = ab - ba$. Поскольку $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, имеем

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Alt}(x_1 \ldots x_{2k})) = 0. \tag{4}$$

Аналогично *оператор симметрирования* Sym действует как

$$\mathrm{Sym}(F)\colon F(x_1, \ldots, x_n) \to \sum_{\sigma \in S_n} F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Он обладает свойствами, аналогичными (2) и (3).

Пусть $F(x, Y)$ — многочлен, однородный степени k относительно переменной x и произвольным образом зависящий от группы переменных Y, причём $Y \not\ni x$. Подставим $\sum_{i=1}^{k} x_i$ вместо x (при этом переменные x_i не входят в Y) и рассмотрим члены, линейные по каждому x_i, — они входят по разу, пусть их сумма равна G. Она называется (*полной*) *линеаризацией* многочлена F.

Лемма. *Функция G симметрична относительно $\{x_i\}$. Если $F(x, Y) = H(x_1, \ldots, x_k, Y)|_{x \to x_i}$, где H полилинейно по $x_1, \ldots, x_k$, то $G = \mathrm{Sym}(H)$.*

Пусть теперь A — произвольная матрица порядка n. Тогда по теореме Гамильтона — Кэли A удовлетворяет характеристическому уравнению

$$A^n - \xi_1(A) + \ldots + (-1)^k \xi_k(A) + \ldots + (-1)^n \xi_n(A) = 0. \qquad (5)$$

Здесь $\xi_1(A) = \mathrm{tr}(A)$, $\xi_n(A) = \det(A)$, и если A диагонализуема и имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то k-й коэффициент характеристического многочлена $\xi_k(A)$ равен $\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}$. Положим $s_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m$.

По основной теореме о симметрических многочленах, $\xi_k = P_k(s_1, \ldots, s_n)$ для некоторых многочленов P_k, так что $\xi_k(A) = P_k(\mathrm{tr}(A), \ldots, \mathrm{tr}(A^k))$. Например, $P_2(x, y) = (x^2 - y^2)/2$ и $\xi_2(A) = (\mathrm{tr}^2(A) - \mathrm{tr}(A^2))/2$. Перепишем уравнение (5) в виде

$$A^n = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k P_k(\mathrm{tr}(A), \ldots, \mathrm{tr}(A^k)) A^{n-k}. \qquad (6)$$

Многочлены от матриц и следов их произведений называются *многочленами со следом*. В нашем случае возникают мономы со следом вида $M = A^{n-k}\,\mathrm{tr}(A^{i_1}) \ldots \mathrm{tr}(A^{i_s})$, где $\sum i_\alpha = k$, линейные комбинации которых и порождают все $P_k(\mathrm{tr}(A), \ldots, \mathrm{tr}(A^k)) A^{n-k}$.

Подставим вместо A сумму $\sum_{i=1}^{n} A_i$ и рассмотрим возникающие члены, линейные относительно каждого из A_i. Согласно лемме моному A^n отвечает сумма $\sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)} \ldots A_{\sigma(n)}$, а моному $M = A^{n-k}\,\mathrm{tr}(A^{i_1}) \ldots \mathrm{tr}(A^{i_s})$ будет отвечать сумма

$$S_M = \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)} \ldots A_{\sigma(n-k)} \times$$
$$\times \mathrm{tr}(A_{\sigma(n-k+1)} \ldots A_{\sigma(n-k+i_1)}) \ldots \mathrm{tr}(A_{\sigma(n-k+i_1+\ldots+i_{s-1})} \ldots A_{\sigma(n-k+i_1+\ldots+i_s)}).$$

Теперь положим $A_k = x_{2k-1}x_{2k}$, получим выражение $\widehat{S}_M$ и проальтернируем результат по x_j. Таким образом, сумма $\sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)} \ldots A_{\sigma(n)}$ превратится в $n! \cdot \mathrm{Alt}_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$.

Из формул (2)–(4) следует, что каждому моному M, содержащему следы, будет отвечать ноль.

Но тогда $n! \cdot \mathrm{Alt}_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$, в силу равенства (6), оказывается линейной комбинацией нулей, поэтому $\mathrm{Alt}_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = 0$ будет тождеством, что и требуется. Теорема Амицура — Левицкого доказана.

Замечание. Линеаризация многочленов $\xi_k(A)$ устроена следующим образом. Рассмотрим перестановку σ переменных x_i, она состоит из циклов. Каждому такому циклу $a_{i_1} \to a_{i_2} \to \ldots \to a_{i_s} \to a_{i_1}$ сопоставим следовый моном $\mathrm{tr}(a_{i_1} \ldots a_{i_k})$, а перестановке σ — их произведение, обозначим его A_σ. Результат линеаризации $\xi_k(A)$ есть $\sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma A_\sigma$. Если тождество Гамильтона — Кэли для матриц порядка n умножить на x_0, взять от него след и линеаризовать, то в матрицах порядка $n+1$ этому соответствует линеаризация многочлена ξ_n. (*А. Я. Канель-Белов*)

15.5. Условие. Даны две бесконечно дифференцируемые функции

$$f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots,$$
$$g(x) = x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$$

Известно, что $f(g(x)) = x$ и что все числа $k!a_k$ — целые. Докажите, что все числа $k!b_k$ — тоже целые. (*Е. Ю. Бунькова*)

Решение. Из условия следует, что значение k-й производной функции $f(x)$ в нуле целое ($k = 0, 1, 2, \ldots$), и нужно доказать, что значение k-й производной функции $g(x)$ в нуле также целое ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Воспользуемся индукцией по k. База очевидна. Значение k-й производной функции $f(g(x))$ равно $f'(g(x))g^{(k)}(x) + P(x)$, где в $P(x)$ входят разнообразные слагаемые из произведений $f^{(l)}(g(x))$, $1 \leqslant l \leqslant k$, и степеней m-х производных функции $g(x)$ при $1 \leqslant m < k$. При $x = 0$ это выражение с учётом равенств $g(0) = 0$ и $f'(x)|_{x=0} = 1$ принимает вид $g^{(k)}(0) + P(0)$, причём $P(0)$ целое по предположению индукции. С другой стороны, ввиду условия $f(g(x)) = x$ это выражение равно 1 при $k = 1$ и 0 при $k > 1$, т. е. также целое. Отсюда и следует доказываемое утверждение. (*Д. Максимов, Ф. Петров*)

16.3. Условие. Пусть у функции, определённой на отрезке [или на прямой], в каждой точке этого отрезка [прямой] есть конечный предел (не обязательно совпадающий со значением в точке). Насколько такая функция может отличаться от непрерывной? Более точно: каким может быть множество точек разрыва у такой функции? (*М. Прасолов*)

Ответ: множеством точек разрыва такой функции может служить любое не более чем счётное множество точек отрезка [прямой].

Решение. Пусть у функции f на отрезке I в каждой точке есть предел. Положим функцию g в точке x отрезка I равной пределу функции f в точке x. Докажем, что функция g непрерывна и что множество точек, где f отличается от g больше, чем на произвольное фиксированное число $c > 0$, конечно.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для точки x_0 на отрезке I выберем такую окрестность U, в которой f отличается от $g(x_0)$ не больше, чем на ε, за исключением, быть может, самой точки x_0. Тогда в U функция g тоже отличается от $g(x_0)$ не больше, чем на ε, потому что в каждой точке окрестности U функция g равна пределу функции f. Непрерывность g доказана.

Предположим, что множество точек x, где $|f(x) - g(x)| > c$, бесконечно. Тогда оно имеет предельную точку x_0. Выберем в этом множестве последовательность $x_n \to x_0$. Тогда

$$0 = g(x_0) - g(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) - \lim_{x_n \to x_0} g(x_n) = \lim_{x_n \to x_0} (f(x_n) - g(x_n)).$$

Но последний предел не может равняться нулю, потому что последовательность состоит из чисел, больших чем $c > 0$. Значит, указанное множество конечно.

Поскольку любая точка разрыва функции f принадлежит такому множеству для некоторого c, множество этих точек не более чем счётно.

Теперь возьмём непрерывную функцию g на отрезке I, последовательность a_n, предел которой равен 0, счётное подмножество x_n отрезка I и определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_n, \\ g(x_n) + a_n, & x = x_n. \end{cases}$$

Тогда f имеет в каждой точке предел, причём любая функция, имеющая в каждой точке предел, может быть получена таким способом, что следует из доказательства, приведённого выше. В качестве примера такой функции подойдёт функция Римана, равная 0, если значение аргумента иррационально, и q, если оно представимо несократимой дробью со знаменателем q.

Полученные результаты справедливы и для функции, заданной на прямой, поскольку прямая есть объединение счётного множества отрезков.

(*М. Прасолов*)

17.1. Условие. Можно ли в куб достаточно большой размерности с ребром 1 см вложить здание МГУ? (*Ф. Ивлев*)

Ответ: да, можно.

Решение. Рассмотрим, например, размерность $3\,000\,000\,000\,000 = 3\cdot 10^{12}$ и положим наш куб одной вершиной в начало координат, а рёбрами параллельно осям координат. Рассмотрим четыре вершины: точку A с нулевыми координатами, точку B, первые $2\cdot 10^{12}$ координат которой равны 1, а остальные равны 0, точку C, у которой последние два триллиона координат равны 1, а остальные нулю, и, наконец, точку D, у которой первый триллион координат равен единице, следующий триллион координат равен нулю, а затем опять идёт триллион единиц. Попарные расстояния между любыми двумя из этих точек по многомерной теореме Пифагора равны $\sqrt{2\cdot 10^{12}}$. Следовательно, эти четыре точки образуют правильный тетраэдр с ребром, равным $\sqrt{2}\cdot 10^6$. А это больше, чем 14 км. Очевидно, что Главное здание МГУ можно поместить в правильный тетраэдр с таким большим ребром, а весь этот тетраэдр лежит внутри нашего куба.

Можно было рассматривать не тетраэдр, а куб, порождённый векторами $(a;0;0)$, $(0;a;0)$ и $(0;0;a)$ (здесь вместо каждого нуля надо подставить 10^{12} нулей, а вместо a — 10^{12} единиц). Тогда он тоже весь лежит внутри нашего гиперкуба, при этом его ребро по длине равно 10 км. (*Ф. Ивлев*)

19.3. Условие. Решите уравнения

$$\text{а) } x^2+y^2=(x+1)^3; \quad \text{б) } x^2+xy+2y^2=(y+1)^3$$

в целых числах. (*Н. Н. Осипов*)

Ответ:
а) $(x,y)\in\{(0,\pm1),(88,\pm835)\}$;
б) $(x,y)\in\{(-39,10),(-3,1),(-1,0),(1,0),(2,1),(29,10)\}$.

Решение. а) При $x<0$ решений нет, поэтому далее считаем $x\geqslant 0$.

Числа x и y взаимно просты, причём y нечётно, а x чётно (если x нечётно, то $x^2+y^2\equiv 2 \pmod 4$, а $(x+1)^3\equiv 0 \pmod 4$). Запишем уравнение в виде

$$(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})=(x+1)^3 \qquad (*)$$

и воспользуемся тем, что кольцо

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]=\{a+b\sqrt{-1}\colon a,b\in\mathbb{Z}\}$$

целых гауссовых чисел *факториально* (доказательство, сводящееся к проверке *евклидовости*, можно найти, например, в учебнике [1, стр. 114–115]).

Числа $x\pm y\sqrt{-1}$ взаимно просты в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ тогда и только тогда, когда целые числа x и y взаимно просты и имеют разную чётность (упражнение для читателя). Из факториальности $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ и равенства $(*)$

следует, что

$$x + y\sqrt{-1} = \varepsilon(a + b\sqrt{-1})^3$$

для некоторых a, $b \in \mathbb{Z}$ и *единицы* (обратимого элемента) $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Но все единицы $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ суть ± 1, $\pm\sqrt{-1}$, и каждая из них является кубом единицы, что позволяет нам считать $\varepsilon = 1$. Таким образом, имеем

$$x = a^3 - 3ab^2, \quad y = 3a^2b - b^3.$$

Кроме того,

$$(x+1)^3 = x^2 + y^2 = (a + b\sqrt{-1})^3(a - b\sqrt{-1})^3 = (a^2 + b^2)^3,$$

и, так как $x+1$ и a^2+b^2 вещественны, $x+1 = a^2+b^2$. Исключив x, получим уравнение

$$a^3 - 3ab^2 - a^2 - b^2 + 1 = 0. \tag{$**$}$$

Оно легко решается, поскольку может быть переписано в виде

$$27b^2 = 9a^2 - 12a + 4 + \frac{23}{3a+1}.$$

Отсюда $(a, b) \in \{(-8, \pm 5), (0, \pm 1)\}$ и $(x, y) \in \{(0, \pm 1), (88, \pm 835)\}$.

б) Рассуждаем так же, как и в п. а), только используем факториальность кольца

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega\colon a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \omega = \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$$

(это кольцо является также и евклидовым, причём последним в списке евклидовых колец целых чисел мнимых квадратичных полей). Получим

$$x = a^3 - 6ab^2 - 2b^3, \quad y = 3a^2b - b^3 + 3ab^2, \quad y + 1 = a^2 + ab + 2b^2$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$, откуда

$$3a^2b - b^3 + 3ab^2 - a^2 - ab - 2b^2 + 1 = 0.$$

Положив $u = 2a + b$, получим

$$3bu^2 - 7b^3 - u^2 - 7b^2 + 4 = 0. \tag{$***$}$$

Это уравнение решается так же, как и уравнение $(**)$.

Комментарий. Уравнения $(**)$ и $(***)$ относятся к специальному типу уравнений, которые могут быть решены *методом Рунге* (см., например, [3, стр. 11–13]). В статье [2] предложена элементарная версия этого метода для кубических уравнений. В общем случае решение кубических уравнений методом Рунге будет сложнее из-за наличия линейных слагаемых (в уравнениях $(**)$ и $(***)$ они отсутствуют).

Библиография

[1] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2013.

[2] *Осипов Н. Н.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // Математика в школе. 2012. №1. С. 64–69.

[3] *Спринджук В. Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М.: Наука, 1982.

(*Н. Н. Осипов*)

19.7. Условие. Докажите неравенство $\frac{R}{r} < \frac{\pi}{\alpha\beta\gamma}$, где R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, α, β, γ — его углы в радианах. (*К. Э. Каибханов*)

Решение. Из формулы
$$r = \frac{S}{p} = \frac{abc}{4pR},$$
теоремы синусов и формулы суммы синусов следует, что
$$r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$
Поэтому искомое неравенство можно переписать в виде
$$\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{\sin z}{z} > \frac{2}{\pi},$$
где $x = \alpha/2$, $y = \beta/2$, $z = \gamma/2$.

Но функция $f(t) = \ln\frac{\sin t}{t}$ на интервале $(0, \pi/2)$ вогнута. Значит, минимум $f(x) + f(y) + f(z)$ в треугольнике $\{x, y, z \geqslant 0, x + y + z = \pi/2\}$ достигается в его вершинах, откуда и получаем нужное неравенство.

(*А. Заславский*)

19.9. Условие. Дан треугольник ABC и такие положительные числа p, q, что
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Пусть X — точка плоскости, для которой сумма $(AX)^p + (BX)^p + (CX)^p$ минимальна, а A', B', C' — точки на сторонах BC, CA, AB, для которых сумма $(A'X)^q + (B'X)^q + (C'X)^q$ минимальна. Докажите, что $CX \perp A'B'$.

(*А. Заславский*)

Решение. Подробное решение этой задачи содержится в статье [2]. Приведём его краткое изложение.

Прежде всего докажем, что точки A', B', C' являются проекциями некоторой точки на стороны треугольника. Действительно, окружности $AB'C'$, $BC'A'$ и $CA'B'$ пересекаются в некоторой точке Y, поэтому $A'B' \geqslant CY\sin C$,

$B'C' \geqslant AY \sin A$, $C'A' \geqslant BY \sin B$, причём равенства достигаются тогда и только тогда, когда A', B', C' — проекции Y на стороны. Следовательно, задача нахождения точек A', B', C' сводится к определению точки Y, минимизирующей функцию $g(Y) = (a|AY|)^q + (b|BY|)^q + (c|CY|)^q$, где $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Заметим теперь, что если O — фиксированная точка плоскости, X — переменная точка, а $p > 1$, то функция $|OX|^p$ выпуклая, а её градиент равен $p|OX|^{p-2}\overrightarrow{OX}$. Отсюда следует, что градиент функций $f(X) = |XA|^p + |XB|^p + |XC|^p$ и $g(Y)$ на границе треугольника направлен во внешнюю сторону, т. е. минимумы этих функций достигаются во внутренних точках и, соответственно, их градиенты в этих точках обращаются в нуль. Отсюда получаем, что барицентрические координаты точки X равны $(|XA|^{p-2}, |XB|^{p-2}, |XC|^{p-2})$, а барицентрические координаты точки Y — $(a^q|YA|^{q-2}, b^q|YB|^{q-2}, c^q|YC|^{q-2})$. При $1/p + 1/q = 1$ это означает, что X и Y изогонально сопряжены, что равносильно утверждению задачи.

Примечание. Подробнее о рассмотренных экстремальных задачах можно прочесть в статье [3], а об изогональном сопряжении — в статье [1].

Библиография

[1] *Акопян А., Заславский А.* Разные взгляды на изогональное сопряжение // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 2007. С. 61–78.

[2] *Заславский А.* Ещё раз о пространствах L_p и замечательных точках треугольника // Квант. 2013. № 5–6. С. 45.

[3] *Протасов В., Тихомиров В.* О пространствах L_p и замечательных точках треугольника // Квант. 2012. № 2. С. 2–11.

(*А. Заславский*)