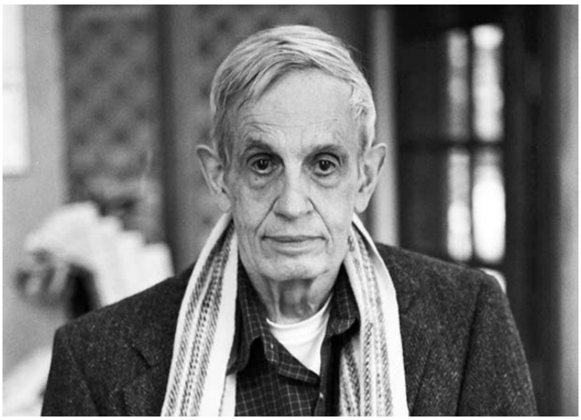
Торг с богами

В. А. Гурвич

«Кого боги хотят погубить,
того они лишают разума»,
Верно ли обратное?



Джон Форбс Нэш младший — единственный в мире обладатель и Нобелевской, и Абелевской премий. Получив последнюю, он с супругой Алисией возвращался из Норвегии домой в Нью-Джерси 23 мая 2015 г. Они взяли такси в аэропорту Ньюарк и... оба погибли в автокатастрофе. Впрочем, было бы удивительно, если бы человек с такой биографией спокойно умер в своей постели. Дело в том, что боги и в самом деле лишили его разума, в прямом смысле слова. Не менее тридцати лет Джон Нэш страдал параноидальной шизофренией в крайне тяжёлой форме. Удалось ли его этим погубить? Во всяком случае, он боролся на равных: победил неизлечимую болезнь, получил две высшие награды: за вклад в экономику и в математику. Возможно, чаша терпения богов переполнилась, они отказались от изощрённых методов наказания и прибегли к вульгарным, но более надёжным. Капитулировали?

Ранние годы и обучение. Джон Нэш родился 13 июня 1928 г. в штате Западная Вирджиния, в маленьком городке Блуфилд в горах Аппалачи. Отец, Джон Форбс Нэш старший, — инженер-электрик; мать, Маргарита Вирджиния, до замужества 10 лет преподавала в школе. Она занималась с сыном дома, так что он часто пропускал занятия в средней школе. В своей автобиографии [51] он пишет, как в 14 лет прочитал книгу «Творцы математики» Эрика Белла и сумел без посторонней помощи доказать малую теорему Ферма. В последнем классе он усиленно занимался математикой, посещал курсы в местном колледже. После школы Нэш поступил в Технологический институт Карнеги (теперь университет Карнеги — Меллона) в Питтсбурге, получив стипендию Джорджа Вестингауза (таких всего 10 на всю страну). Сначала он специализировался в инженерной химии, потом вообще в химии, прослушал курс международной экономики и, наконец, по совету своего преподавателя Джона Лайтона Синга переключился на математику. В 1948 г. он получил степень бакалавра, затем магистра и поступил в аспирантуру Принстона. Его научный руководитель, Ричард Даффин, написал ему весьма лаконичную рекомендацию: «Он — математический гений». Нэш получил предложение и из Гарварда, однако выбрал Принстон, где руководитель математического отделения Соломон Лефшец назначил ему именную стипендию Джона С. Кеннеди. Сыграло роль и то, что Принстон намного ближе к Блуфилду, чем Гарвард.

На Нэша произвела сильное впечатление вышедшая в 1944 г. книга Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» [69]. Она натолкнула Нэша на великолепную идею — ввести понятие равновесия для игр n лиц. Оно называется теперь равновесием Нэша (РН) и непосредственно обобщает на случай произвольного числа игроков классическое понятие *седловой точки* для игр двух лиц с нулевой суммой, так называемых матричных игр. Ему удалось обобщить теорему фон Неймана (1928) о существовании седловой точки в смешанных стратегиях для конечных матричных игр и доказать существование РН в смешанных стратегиях для конечных игр n лиц в нормальной форме. Теорема Нэша (1950) оказалась простым следствием не так давно появившейся теоремы Какутани (1941) о неподвижной точке. Это основной результат диссертации Нэша, которую он защитил в Принстоне в 1950 г. Ему ещё не исполнилось и 22 лет; текст уложился в 30 страниц.

Ниже мы дадим краткое математическое введение, включающее все три теоремы, а затем вернёмся к биографии.

Равновесие Нэша и седловая точка. Пусть $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, а X_i — множество стратегий игрока $i \in I$. Рассмотрим прямое произведение $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ этих n множеств. Его элементы

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n = X$ называются *профилями стратегий* или *ситуациями*. *Игра n лиц в нормальной форме* определяется как отображение $u\colon X \to \mathbb{R}^n$, которое каждому профилю стратегий $x \in X$ ставит в соответствие n-мерный вещественный вектор $u(x) \in \mathbb{R}^n$ — *профиль выигрышей*, чья координата $u_i(x)$ интерпретируется как *выигрыш* или *платёж игрока* $i \in I$ *в ситуации* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Ситуация x называется *равновесием Нэша* (РН), если $u_i(x) \geqslant u_i(x')$ для любого игрока $i \in I$ и для любой ситуации $x' \in X$, совпадающей с x в каждой координате, кроме, быть может, i. Иными словами, ни один из игроков не может, выбрав новую стратегию, увеличить свой выигрыш при условии, что все остальные придерживаются своих старых стратегий.

Заметим, что коалиция, состоящая более чем из одного игрока, вообще говоря, может увеличить выигрыш всех своих участников при выборе ими новых стратегий, даже если все остальные игроки придерживаются старых. По этой причине РН относится к *бескоалиционным* или *некооперативным* концепциям решения.

Игра двух лиц с нулевой суммой (в нормальной форме) определяется условиями: $n = 2$ и $u_1(x) + u_2(x) = 0$ в любой ситуации $x \in X$. Такая игра однозначно определяется вещественной таблицей $u_1\colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ и поэтому называется *матричной игрой*. Игрок 1 максимизирует u_1, а игрок 2 минимизирует, поскольку он максимизирует u_2.

РН $x = (x_1, x_2)$ в матричной игре называется седловой точкой (функции u_1). Такое название объясняется тем, что график функции u_1 на произведении $X = X_1 \times X_2$ имеет форму седла: u_1 достигает минимума в строке x_1 и максимума в столбце x_2:

$$u_1(x_1', x_2) \leqslant u_1(x_1, x_2) \leqslant u_1(x_1, x_2') \quad \text{для всех } x_1' \in X_1 \text{ и } x_2' \in X_2.$$

Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $x' = (x_1', x_2')$ — две седловые точки. По определению, имеем цепочку неравенств:

$$u_1(x_1', x_2) \leqslant u_1(x_1, x_2) \leqslant u_1(x_1, x_2') \leqslant u_1(x_1', x_2') \leqslant u_1(x_1', x_2).$$

Отсюда сразу следует, что все четыре числа равны:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2') = u_1(x_1', x_2') = u_1(x_1', x_2)$$

и что две появившиеся ситуации (x_1, x_2') и (x_1, x_2') также являются седловыми точками.

Таким образом, хотя седловых точек может быть несколько, но

(i) седловое значение единственно (оно называется *значением игры*) и

(ii) все седловые точки образуют прямоугольный массив

$$X^* = X_1^* \times X_2^* \subseteq X_1 \times X_2 = X.$$

При этом любые стратегии $x_1 \in X_1^* \subseteq X_1$ и $x_2 \in X_2^* \subseteq X_2$ называются *оптимальными стратегиями* игроков 1 и 2 соответственно. Свойство (ii) очень важно; оно означает, что игрокам не нужно договариваться, достаточно просто каждому применить оптимальную стратегию.

Игра двух лиц в нормальной форме называется биматричной. К сожалению, РН может не обладать перечисленными выше приятными свойствами уже в биматричной игре, если она имеет ненулевую сумму. Биматричная игра может иметь несколько РН, в которых игроки могут иметь разные выигрыши. При этом если игроки применяют «оптимальные» стратегии, соответствующие разным РН, то полученная ситуация может вообще не быть РН. Более того, РН не обязано даже быть Парето-оптимумом; иными словами, иногда оба игрока могут увеличить свои выигрыши, применив новые стратегии одновременно. При этом они образуют коалицию, а как уже упоминалось, РН — бескоалиционная концепция, гарантирующая устойчивость только относительно индивидуальных действий игроков.

Рассмотрим таблицы ниже, дающие два примера биматричных игр 2×2. Два игрока, 1 и 2, выбирают строки и столбцы биматрицы; в каждой её клетке (ситуации) их выигрыши расположены в левом нижнем и правом верхнем углу и сравниваются они в столбцах и строках соответственно. Разумеется, биматрицу можно представить как две матрицы с выигрышами игроков 1 и 2.

Семейный спор

1 2	0 0
0 0	2 1

Дилемма заключённого

-1 -1	0 -3
-3 0	-2 -2

Первый пример называется «семейный спор». Пара намерена провести вечер либо в ресторане, либо на футболе. Дама, игрок 1, предпочитает ресторан, а господин, игрок 2, — футбол. Если каждый выбирает свою первую стратегию, то они идут в ресторан (выигрыши равны 2 и 1), если вторую, то на футбол (выигрыши равны 1 и 2); если же они выбрали стратегии с разными номерами, 1 и 2 или 2 и 1, то остаются дома (с выигрышем 0 каждый). Нетрудно проверить, что в игре два РН с разными векторами выигрышей $(2, 1)$ и $(1, 2)$, а также что эти РН не заполняют прямоугольный массив. Таким образом, понятие оптимальной стратегии вообще не определено.

Второй пример называется «дилемма заключённого». Два сообщника совершили какое-то довольно серьёзное правонарушение и попали под подозрение. У обвинителя, однако, проблемы с доказательствами, и он предлагает каждому из них сделку: сознаться и выйти на свободу, но уж тогда товарища упекут «по полной», скажем на 3 года. Соответствующие две ситуации в биматрице находятся на побочной диагонали; выигрыши в них равны $(0, -3)$ и $(-3, 0)$ соответственно. Каждый выигрыш равен числу лет в тюрьме, взятому, естественно, со знаком минус. Если оба «идут в несознанку», то получают по одному году (скажем, за неуплату налогов; выигрыши $(-1, -1)$), а если оба сознаются, то по 2 года (с учётом раскаяния и сотрудничества; выигрыши $(-2, -2)$). Легко видеть, что $(-2, -2)$ — единственное РН. Однако эта ситуация не оптимальна по Парето. Вступив в коалицию, игроки могут получить $(-1, -1)$, но эта ситуация не равновесна, поскольку каждый может улучшить результат, предав товарища. Моральные аспекты теория игнорирует, принимаются в расчёт лишь выигрыши.

Когда матричные игры решаются в чистых стратегиях. Пока что речь шла о проблемах, возникающих, когда имеется несколько РН, а что делать, если их вообще нет? Такое вполне возможно уже для матричных игр. Читатель легко проверит, что матричная игра 2×2 не имеет седловой точки тогда и только тогда, когда «одна диагональ больше другой»; точнее, каждый из элементов одной из диагоналей строго больше каждого из элементов другой. Следующий общий критерий имеет место для любой матричной игры. Рассмотрим числа

$$v_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2), \qquad v_2 = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2),$$

которые называются *максимин* и *минимакс*. Они интерпретируются как наилучшие результаты, которые игроки 1 и 2 могут *гарантировать* при любых действиях противника. В самом деле, легко видеть, что игрок 1, максимизирующий u_1, может гарантировать v_1, но не больше, а игрок 2, минимизирующий u_1, может гарантировать v_2, но не меньше. Соответствующие стратегии игроков называются осторожными или безопасными. Читатель без труда докажет, что неравенство $v_1 \leqslant v_2$ имеет место в любой матричной игре. Оно и понятно: гарантировать что-либо непросто. Более того, $v_1 = v_2$ тогда и только тогда, когда седловая точка существует. При этом она является РН и число $v = v_1 = v_2$ является *значением* игры.

Это значение — единственный претендент на «высокое звание оптимума». В самом деле, игроку 1 не стоит надеяться на результат $> v = v_1$, поскольку у противника есть стратегия, гарантирующая $\leqslant v_2 = v$; аналогично игроку 2 не стоит рассчитывать на результат $< v = v_2$, поскольку у противника есть стратегия, гарантирующая $\geqslant v_1 = v$. Таким образом, любая пара осторожных стратегий игроков 1 и 2 является оптимальной и реализует седловую точку (РН, другими словами). К сожалению, такая простота и определённость имеют место только для игр двух лиц с нулевой суммой.

Замечание. Даже если седловая точка существует, её не всегда просто найти. Например, шахматы вполне возможно представить как матричную игру с выигрышами, принимающими всего три значения: $\{\pm 1, 0\}$ — выигрыш белых, выигрыш чёрных и ничья. В 1912 г. Эрнст Цермело доказал, что в случае шахмат $v_1 = v_2$ и, следовательно, седловая точка существует [70]. Однако матрица шахматной игры имеет такие огромные размеры, что ни оптимальных стратегий, ни оптимального результата (значения игры) никто не знает, хотя они и существуют. Возможно, оптимальный результат — ничья, а может, белые начинают и выигрывают, а возможно, и чёрные, этого тоже нельзя исключить. На практике выигрывает тот, кто лучше играет. «Мы видим, что блондин играет хорошо, а брюнет играет плохо. И никакие теории игр не изменят этого соотношения сил», — как мог бы сказать Остап Бендер.

Теорема фон Неймана о решении матричных игр в смешанных стратегиях. Что же делать, когда $v_1 < v_2$ и, значит, седловых точек нет? Допустим, игроки разыгрывают данную матричную игру не один раз, а целый вечер, то есть десятки или даже сотни раз. Если игрок i применяет всё время безопасную стратегию, то оппонент $3-i$ это заметит и ограничит его гарантированным результатом v_i, где $i = 1, 2$. Это не очень-то вдохновляет. Ясно, что оптимальный результат лежит где-то в промежутке $[v_1, v_2]$ и, чтобы получить его, надо время от времени рисковать. Каждый игрок в покер знает, что блефовать, хотя бы изредка, необходимо. Но когда именно и как часто? Можно пытаться применить психологию, например усыпить бдительность противника, играя осторожно, а потом «вдруг» рискнуть. Но противник — тоже психолог... К сожалению, на этом пути не удаётся получить хорошей теории. Её даёт математический подход, а именно идея случайного выбора. Лучший способ скрыть от противника свой следующий ход — не знать его самому.

Итак, пусть дана матричная игра $u_1 \colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ с $k_1 \times k_2$-матрицей, то есть $|X_1| = k_1$ и $|X_2| = k_2$. Пусть Y_i обозначает множество всех вероятностных распределений на множестве стратегий X_i игрока $i = 1, 2$. Эти распределения $y_i \in Y_i$ называются *смешанными* стратегиями, а $x_i \in X_i$ будут отныне называться *чистыми* стратегиями игрока i. Таким образом, мы расширяем исходную конечную матричную игру $u_1\colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ в чистых стратегиях, получая бесконечную «матричную» игру $U_1\colon Y_1 \times Y_2 \to \mathbb{R}$ в смешанных стратегиях. Предполагая, что игроки $i = 1, 2$ выбирают свои чистые стратегии $x_i \in X_i$ независимо и в соответствии с распределениями $y_i \in Y_i$, получаем

$$U_1(y_1, y_2) = \sum_{\substack{x_1 \in X_1,\\ x_2 \in X_2}} u_1(x_1, x_2) y_1(x_1) y_2(x_2),$$

где $y_i(x_i)$ — вероятность выбора чистой стратегии x_i игроком $i \in \{1, 2\}$, применяющим смешанную стратегию y_i. Таким образом, U_1 — билинейная форма, определённая $k_1 \times k_2$-матрицей исходной игры на произведении двух вероятностных симплексов в пространствах $\mathbb{R}^{k_1}$ и $\mathbb{R}^{k_2}$. По аналогии с v_1 и v_2 введём числа

$$V_1 = \max_{y_1 \in Y_1} \min_{y_2 \in Y_2} U_1(y_1, y_2), \qquad V_2 = \min_{y_2 \in Y_2} \max_{y_1 \in Y_1} U_1(y_1, y_2),$$

которые называются *максимин* и *минимакс* в смешанных стратегиях. Они по-прежнему интерпретируются как результаты, которые игроки 1 и 2 могут гарантировать в смешанных стратегиях при любых смешанных (или, что на самом деле в силу выпуклости равносильно, — чистых) стратегиях противника. Строго говоря, следовало бы заменить $\max$ на $\sup$ и $\min$ на $\inf$, поскольку множества смешанных стратегий бесконечны. Однако все супремумы и инфимумы достигаются, поскольку функция $U_1\colon Y_1 \times Y_2 \to \mathbb{R}$ линейна по каждому аргументу на прямом произведении симплексов.

Благодаря этому неравенство $V_1 \leqslant V_2$ может быть доказано так же, как и $v_1 \leqslant v_2$. Кроме того, легко видеть, что $v_1 \leqslant V_1$, а $v_2 \geqslant V_2$. В самом деле, поскольку множество смешанных стратегий шире, чем множество чистых, то и гарантировать в них можно результат уж во всяком случае не хуже.

Итак, возникает цепочка неравенств $v_1 \leqslant V_1 \leqslant V_2 \leqslant v_2$. Главный вопрос: выполняется ли равенство $V_1 = V_2$ для любой матричной игры? Если так, то никакая психология не нужна и $V = V_1 = V_2$, значение игры в смешанных стратегиях — единственный претендент на оптимальность.

Однако это вовсе не казалось очевидным. В 1920-х годах этим вопросом занялся Эмиль Борель [17–19], создатель теории меры. Он рассматривает симметрические матричные игры, определяемые условиями $X_1 = X_2 = \mathbf{X}$ и $u_1(x_1, x_2) + u_1(x_2, x_1) = 0$ для любых $(x_1, x_2) \in \mathbf{X}$ (в частности, $u_1(x, x) = 0$ при всех $x \in \mathbf{X}$) или, иными словами, — заданные квадратными антисимметрическими матрицами. В симметрической игре значение, если существует, должно быть равно нулю, а оптимальные смешанные стратегии двух игроков, если существуют, могут быть выбраны равными. Однако существование доказать совсем не просто; на самом деле, не проще, чем в общем случае, поскольку любая матричная игра может быть сведена к симметрической лишь немного большего размера. Такое замечание имеется в работе Бореля [17], но строго это было обосновано лишь в 1950-е годы Брауном и фон Нейманом. Борель доказывает, что $V_1 = V_2 = 0$ для симметрических игр размера 3×3 и 5×5, но сомневается, что результат верен в общем случае, считая, что помимо рандомизации тут понадобится и психология.

Равенство $V_1 = V_2$ было доказано в 1928 г. фон Нейманом [68]; ему было всего 25 лет. Доказательство довольно сложное; в статье целых 26 страниц.

В 1950-е годы была установлена эквивалентность симметрических матричных игр парам двойственных (совместных и ограниченных) задач линейного программирования. При этом $-V_2$ и $-V_1$ — оптимальные значения: максимум прямой и минимум двойственной задачи, а значит, $V_1 = V_2$ согласно сильной теореме двойственности. Этот замечательный результат был получен в 1950-х в работах Гейла — Куна — Такера, Брауна и Данцига. По свидетельству последнего, про связь между линейным программированием и матричными играми ему говорил фон Нейман ещё в 1947 г.

Теоремы Брауэра, Какутани и Нэша. В 1950 и 1951 гг. Нэш обобщил теорему фон Неймана для матричных игр на игры n лиц в нормальной форме. А именно, он доказал, что для последних тоже существует РН в смешанных стратегиях. Его доказательство опирается на топологические теоремы Брауэра и Какутани о неподвижной точке.

Первая утверждает, что любое непрерывное отображение выпуклого компакта Y (в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$) в себя имеет неподвижную точку. Это одна из многочисленных версий теоремы Брауэра. Заметим, что и выпуклость, и замкнутость, и ограниченность Y, и непрерывность отображения — существенные условия. При отсутствии любого из них нетрудно построить контрпример. (Сделайте это!)

Теорема Какутани обобщает теорему Брауэра следующим образом. Пусть снова имеется выпуклый компакт $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ и отображение $f\colon Y \to 2^Y$, которое ставит в соответствие каждой точке $y \in Y$ непустое выпуклое подмножество $f(y) \subseteq Y$. Тогда если график f замкнут, то имеется неподвижная точка $y \in f(y)$.

Говорят, что график отображения $f\colon Y \to Z$ замкнут, если множество всех пар $\{(y,z) \mid z \in f(y)\}$ замкнуто в топологии прямого произведения $Y \times Z$.

Отступление. Какутани работал над своей теоремой в Принстоне во время визита в США в 1941 г. В декабре между Японией и США началась война. Тем не менее, Какутани смог завершить визит и вернуться в Осаку летом 1942 г. Кен Бинмор в восьмой главе своей книги [16] вспоминает, как Какутани подошёл к нему на одной из конференций и спросил, почему на его доклад пришло так много экономистов. «Вероятно, их интересовали приложения теоремы Какутани», — ответил Бинмор. «Какой теоремы?» — спросил Какутани. Похожий анекдот рассказал мне Стеф Тайс в 1990 г. На какой-то конференции докладчик упомянул одну из гипотез ван дер Вардена. Пожилой человек в первом ряду осведомился, что это за гипотеза. Докладчик ответил, что в двух словах не расскажешь, а время ограничено. Потом ему объяснили, что и пары слов хватило бы, поскольку спрашивал как раз ван дер Варден.

Теорема Нэша — несложное следствие теоремы Какутани. Пусть $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ — множество всех ситуаций в смешанных стратегиях некоторой игры n лиц. Функция $f(y)$ определяет все ситуации в Y, для которых стратегия каждого из n игроков является наилучшим ответом в ситуации y. Поскольку наилучший ответ не обязан быть единственным, $f(y)$ — это, вообще говоря, множество ситуаций. Нетрудно проверить, что все условия теоремы Какутани выполнены, а также что включение $y \in f(y)$ означает в точности, что y является равновесием Нэша. (Проверьте и то, и другое.)

Эта теорема появилась в статье Нэша [54] и в его диссертации [56] в 1950 г. В следующей статье [55] он выводит свой результат непосредственно из теоремы Брауэра, считая, что это значительное упрощение. Новое доказательство действительно коротко (см. § 2 в [55]), но и старое (план которого изложен в предыдущем абзаце) тоже трудным не назовёшь. Видимо, Нэш принимает в расчёт, что теорема Какутани сложнее теоремы Брауэра.

В том же 1950 г. Нэш опубликовал в «Эконометрике» ещё одну фундаментальную статью, по теории переговоров [59]. В 1951 г. он покинул Принстон и перебрался в Массачусетский технологический институт, где занялся «чистой» математикой: алгебраической геометрией и уравнениями в частных производных.

В 1994 г. Нэш[1)] получил Нобелевскую премию по экономике[2)] «за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр», то есть именно за три работы, написанные в 1950 г.

Заслуженно ли? Мнения разделились. Аргументы противников понятны. Сама по себе теорема Какутани непроста, но теорема Нэша выводится из неё так:

(i) надо ввести (многозначное) отображение наилучших ответов $f\colon Y \to 2^Y$ на множестве ситуаций в смешанных стратегиях;

---

1) И ещё двое учёных: Дж. Харсаньи и Р. Зелтен.

2) Официальное название — Премия Шведского национального банка по экономическим наукам памяти Альфреда Нобеля.

(ii) проверить, что выполнены все условия теоремы Какутани;

(iii) проверить, что неподвижная точка Какутани и равновесие Нэша — одно и то же.

План этот, вне всяких сомнений, весьма элегантен, но слишком прост: его реализация в подробном изложении занимает $5 + 20 + 5 = 30$ строк. Маловато для Нобелевской премии. Конечно, само определение РН дорогого стоит, но и оно занимает 3 строки. В диссертации Нэша 30 страниц, но он любит мотивировать, да и вообще поговорить на отвлечённые темы.

В лагере противников награждения Нэша был даже такой авторитетный американский математик, как Алан Хофман. Я об этом узнал случайно и гораздо позже, когда премия уже была вручена. Вообще-то в Америке не принято критиковать коллег, особенно таких знаменитых, как Джон Нэш. Но бывают и исключения. В 1998 г. я делал на семинаре в Ратгерсе доклад о РН (только в чистых, а не в смешанных стратегиях). В конце слово взял Хофман. Он кратко суммировал пункты (i, ii, iii) и сказал, что премию, в сущности, дали за одну страницу. На этом он не остановился и обрушился на теорию игр вообще. Точнее, он сказал, что эта «красивая и цветущая ветвь теории оптимизации» всё время претендует на нечто большее: на приложения в экономике и даже в политике.

Неожиданно Хофман обратился ко мне за поддержкой: «Вам и докладчик подтвердит, что всё это — лишь красивая математика, а никаких особенных практических приложений РН, да и вообще теория игр, иметь не могут». Я задумался. Согласиться со знаменитым человеком, конечно, легко, но ведь потом придётся оправдываться перед коллегами. Я ответил уклончиво: «Почему же не могут? Вот я в 1994 г., после 25 лет занятий теорией игр, хотя и не получил Нобелевскую премию, но зато выиграл в лотерею грин-карту. Это ли не практическое приложение?!»

Три опоздания Нэша. У партии «противников» есть и ещё один очень сильный аргумент. Специальный случай РН был рассмотрен аж в 1838 г. Антуаном Огюстеном Курно в его теории олигополий [24]. Имеется n фирм, выпускающих одну и ту же продукцию. Они принимают решение об объёмах производства. Каждая фирма стремится максимизировать свою прибыль, зависящую, вообще говоря, от всех n решений, но, конечно, не произвольно, а некоторым специальным образом. Курно ввёл подобающие случаю ограничения и ту же концепцию равновесия, что и Нэш через 111 лет. Курно рассмотрел также ключевое понятие *наилучшего ответа* участника на действия остальных. По определению, в любой ситуации равновесия стратегия любого игрока является наилучшим ответом на данные стратегии остальных. Такой подход позволяет искать («нащупывать», как он выразился) равновесие, используя динамические (итеративные) методы. Некоторые авторы справедливо называют РН равновесием Нэша — Курно.

Ещё раз Нэш опоздал в 1948 г., но уже не на 111 лет, а всего на 6. Обучаясь в аспирантуре, он переоткрыл «Гекс», замечательную «игру соединений» на гексагональной решётке. Игра стала популярной в Принстоне, где игроки называли её «Нэш» или «Джон». Говорят, они играли на кафельной плитке в туалете. Однако изобретена эта игра была в 1942 г. датским математиком Питом Хайном в Институте Нильса Бора в Копенгагене. Там её называли «Полигон». В 1952 г. фирма «Братья Паркеры» выпустила игру под именем «Гекс»; оно и прижилось.

И, наконец, самое обидное опоздание Нэша, всего на несколько месяцев, — с 19-й проблемой Гильберта: «Все ли решения регулярных проблем вариационного исчисления аналитические?». После нескольких важных частичных результатов (см. ниже) окончательный, и утвердительный, ответ на этот вопрос Давида Гильберта получили независимо Эннио де Джорджи (1956, 1957) [25, 26] и Джон Нэш (1957, 1958) [53, 57]; см. также [50]. Ходили слухи, что если бы последний шаг был сделан не в двух независимых работах, а в одной, то автор получил бы Филдсовскую медаль. Может быть... Кто знает? Так или иначе, Нэш получил за эти работы в 2015 г. премию Абеля, которая котируется никак не ниже — и уж во всяком случае намного дороже в денежном выражении.

Гарольд Вильям Кун — бесспорный лидер партии сторонников Нэша, человек очень известный и весьма замечательный. (Помните теорему Гейла — Куна — Такера и условия Каруша — Куна — Такера?) Альберт Вильям Такер был научным руководителем Нэша (а также Ллойда Шепли и Давида Гейла) в Принстоне. В своей статье [37] в 1950 г. Кун уже вовсю оперирует равновесием Нэша.

Я познакомился с Куном в Москве в конце 1980-х годов, когда он был гостем Центрального экономико-математического института. Кун рассказал много любопытного, в том числе и про Нэша.

РН Джон придумал в 1948 г., а в 1950 г. уже защитился; тема — «Некооперативные игры», руководитель — Альберт Вильям Такер. Сам Кун защитился в том же году по более традиционной теории групп, руководитель — Ральф Харцлер Фокс. Другим его аспирантом был Джон Уиллард Милнор, филдсовский лауреат 1962 г. и абелевский лауреат 2011 г.

В 1959 г. у Джона (вскоре после женитьбы, на волне творческих успехов, совершенно неожиданно даже для самых близких друзей) вдруг началось тяжелейшее умственное расстройство... и продолжалось «добрых» 30 лет. Весной 1959 г. Джона поместили на два месяца в одну из лучших клиник Бостона, где поставили диагноз «параноидальная шизофрения», но помочь толком не смогли. Потом, когда деньги у Джона кончились, его лечили в Трентоне, применяя инсулиновую шоковую терапию, и это помогло, хотя уже тогда этот метод считался варварским. В результате галлюцинации на время исчезли, но и всё прочее тоже ушло из его головы. Тогда Кун ему выхлопотал офис на факультете математики, куда он приходил каждый день. Студенты прозвали его фантомом Файн-Холла (название здания). Лет через двадцать состояние Нэша улучшилось и сейчас (в конце 1980-х годов) почти в порядке, хотя, конечно, ни о каких лекциях не может быть и речи. Галлюцинации появились вновь, но Джон научился довольно ловко экзаменовать их на реальность.

Кун также рассказал, какая уникальная компания «игроков» собралась в Принстоне в 1940–1950-х. Какутани доказал там свою теорему о неподвижной точке, приехав в Принстон из Осаки; ему с трудом удалось выбраться обратно после атаки на Пёрл-Харбор и начавшейся войны. Это было ещё до прибытия Куна в Принстон. В 1947 г. Джордж Данциг рассказал Джону фон Нейману про линейное программирование и недавно открытый им принцип двойственности; тот среагировал тотчас и сказал, что это «всего лишь» теорема о матричных играх, доказанная им в юности; а когда Нэш сформулировал своё обобщение этой теоремы, фон Нейман, не дожидаясь никаких доказательств, сказал: «Ну, это тривиально! — теорема о неподвижной точке, в чистом виде». Он вообще отличался мгновенной реакцией и изрядной «прямотой выражений». Альберт Такер сразу же позвал Куна и Давида Гейла обобщать теорию двойственности с линейного на выпуклое программирование. Такер был научным руководителем и у Ллойда Шепли, тоже защитившегося в Принстоне в 1953 г. В своей диссертации «Аддитивные и неаддитивные функции множеств» Шепли заложил основы теории кооперативных игр, ввёл свой знаменитый вектор (вектор Шепли) и был в одном шаге от понятия ядра. Его ввёл в 1959 г. Дональд Брюс Джиллис [32], близкий друг Джона; он тоже защитился в Принстоне под руководством самого фон Неймана. Важные результаты о ядре получил в 1967 г. Герберт Эли Скарф [63], бывший в середине 1950-х годов аспирантом в Принстоне.

В 1953 г. Шепли открыл ещё и стохастические игры, раньше чем появились управляемые марковские процессы — случай одного игрока. Дин Жилет из Беркли доказал разрешимость стохастических игр двух лиц с нулевой суммой (и с нулевой вероятностью остановки) с помощью классической теоремы Харди — Литлвуда (1931). Он не сумел аккуратно проверить её условия, и эту «дыру» удалось залатать только в конце 1960-х годов Лигету и Липману [44].

Большую часть всех этих рассказов теперь легко найти в интернете, но тогда почти всё я слышал впервые. Впрочем, кое-что забавное в интернете не найти. Например, Куна ужасно злило, что его многие считают венгром. (Действительно, в Венгрии Кунов много.) Особенно он разозлился, когда на какой-то конференции кто-то спросил его: «А ваш коллега Кун — венгр?» «Мало „венгра“, так он ещё принял меня за Такера!» — возмущался Кун. «Ну, Вы сами отчасти виноваты; кто писал статьи про венгерский метод [39, 40]?» — парировал я.

Покончив с воспоминаниями, Кун вдруг спросил: «Как по-твоему, заслужил Джон Нобелевскую премию по экономике за РН?» Я вежливо (и, в общем-то, правдиво) ответил, что был бы очень рад этому, что большая часть моих работ по теории игр как раз про РН, но нипочём не дадут — за одно определение и одну теорему с доказательством на полстраницы! «Посмотрим, — сказал Кун. — Главное, мы оба считаем, что он её заслужил».

В начале 1993 г., когда я уже перебрался в Ратгерс, мечты Куна начали вдруг сбываться. Точнее, он начал осуществлять свои планы. С Джоном Милнором они составили список из 21 публикации Нэша и разослали его (в электронном виде) математикам и экономистам с просьбой дать отзыв. Я тоже это письмо получил и ответил, что РН — простая, но гениальная концепция, главная в теории некооперативных игр, и что именно её я изучаю почти во всех своих работах в этой области.

В октябре 1994 г. Нэш получил Нобелевскую премию по экономике «за анализ равновесия в теории некооперативных игр». Номинантов было пятеро: Роберт Ауман, Рейнхард Зельтен, Джон Нэш, Джон Харсаньи и Ллойд Шепли. Получили трое «средних»: Зельтен, Нэш и Харсаньи, а будь моя воля, я бы присудил (в первую очередь) как раз двум «крайним»: Ауману и Шепли. Впрочем, оба её тоже получили, но позже.

Как и положено нобелевскому лауреату, Нэш написал автобиографию [51]; также о нём написал его друг и будущий абелевский лауреат 2011 г. Джон Милнор [45, 46], будущий нобелевский лауреат 2007 г. Роджер Майерсон [48], целая группа коллег [41]; в 2001 г. вышел целый сборник о Нэше под редакцией Гарольда Куна и Сильвии Назар [42].

Леонид Витальевич Канторович занимался тематикой очень близкой к принстонской, и с его работ началось развитие математической экономики в СССР [7–15]. В 1938 г. к нему обратились сотрудники Центральной лаборатории Ленинградского фанерного треста с просьбой оптимизировать методы раскроя фанерного листа. Это событие сыграло важнейшую роль в развитии мировой прикладной математики. Уже в 1939 г. Канторович написал небольшую (всего 67 страниц) книжку [9] о приложениях линейного программирования в экономике. Эта работа не была замечена математиками, зато экономисты и партийные работники её вскоре заметили, но автору это ничего, кроме неприятностей, поначалу не принесло.

А времена были суровые. После того как Канторовичем был предложен оптимальный метод распила фанерного листа, этот метод попытались применить и к разрезанию стальных листов [13]. После внедрения методов оптимизации на производстве одной из фабрик инженерам удалось улучшить показатели, что привело, однако, к негативным последствиям: система социалистического планирования требовала, чтобы и в следующем году план был перевыполнен, что было принципиально невозможно при имеющихся ресурсах, поскольку найденное решение было абсолютным максимумом; кроме того, фабрика не выполнила план по металлолому, львиная доля которого складывалась из обрезков стальных листов. Руководство фабрики получило выговор и больше с математиками не связывалось.

Таким образом, чересчур эффективное использование ресурсов (металла) сыграло отрицательную роль. С другой стороны, линейное программирование показало, что достижение оптимальных результатов не всегда требует использования всех имеющихся ресурсов, как считалось в теории оптимизации ранее.

Про эту историю рассказывают ещё следующее. Поскольку показатели улучшились на 20 процентов, партийное начальство поздравило Канторовича и сообщило, что в следующем месяце ждут такого же прогресса. Он ответил, что это невозможно, поскольку его метод даёт оптимальный результат. Тогда ему напомнили про «саботаж в военное время» (дело было в 1942 г.). На другой день его вызвали снова и сказали, что погорячились, что всё понимают и что пусть будет не 20, а всего 10 процентов.

Надо отдать должное мужеству Канторовича, который настаивал на внедрении своего открытия [12]. Однако метод Канторовича был отвергнут как противоречащий Марксовой теории трудовой стоимости и заимствующий вместо этого положения буржуазных теорий. Но самые большие неприятности у Канторовича случились в разгар хрущёвской оттепели. В период работы в СО АН СССР в начале 1960-х годов после доноса партийных экономистов его поместили в психиатрическую лечебницу и только вмешательство брата — известного психиатра — помогло ему вскоре покинуть больницу.

После этого всё резко изменилось к лучшему. Развитие тех же идей в Принстоне убедило начальство, что учёный прав. (Давно замечено, что начальство в России любит поговорить про «отечественный приоритет», но приоритетные идеи тормозит, осуждая за «западные заимствования», а продвигает их только после того, как они начинают бурно развиваться на том же Западе.) В 1964 г. Канторович был избран академиком АН СССР по отделению математики; в 1965 г. за разработку метода линейного программирования и экономических моделей удостоен Ленинской премии.

В 1975 г. стал лауреатом Нобелевской премии по экономике (совместно с Тьяллингом Купмансом) за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов. В Штатах многие считают, что вместо Канторовича премию должен был получить Данциг. А по-моему, правильно было бы не «вместо», а «вместе».

Джон Форбс Нэш младший в фильме «Игры разума». Кун совершенно не удовлетворился блестящим завершением нобелевской эпопеи. В 1998 г. Сильвия Назар, профессор Колумбийского университета в Нью-Йорке и, наверное, лучшая американская журналистка, пишущая о математике и экономике, опубликовала биографическую книгу «Прекрасный ум. Жизнь математического гения и нобелевского лауреата Джона Нэша» [49]. Я уверен, что Кун был главным консультантом, а скорее всего, и вдохновителем этого труда. Имя Сильвии Назар он упоминал ещё в Москве. Книга стала бестселлером и была переведена на 30 языков; она получила премию Национальной гильдии литературных критиков как лучшая биография и была номинирована на Пулитцеровскую премию. В 2001 г. по этой книге Рон Ховард снял фильм «Игры разума» с Расселом Кроу в главной роли.

Важная роль и у друга и соперника Нэша, прототипом которого был Кун. Они играют партию в го, в конце которой совершенный разум Нэша вдруг разбивается вдребезги, — это центральная сцена фильма.

По ходу фильма зритель вдруг обнаруживает, что многие персонажи, к которым он успел привыкнуть, существуют только в воображении героя. Между тем тот тоже уже разобрался, что к чему, и пытается их там (в своём воображении) уничтожить, но они не сдаются и борются за своё существование. Это вам не вампиры и привидения, тут совсем другое. Нэш — убийца галлюцинаций. Такого в кино, кажется, ещё не было. Особенно мне понравилась сцена, где Нэш проверяет реальность представителя Нобелевского комитета, приехавшего в 1994 г. в Принстон спросить его согласия на номинацию. Нэш подзывает студентку, в существовании которой не сомневается, и просит её подтвердить реальность нобелевского гонца.

Нэш справился с острой стадией заболевания, но после этого никаких лекций студентам читать, разумеется, не мог. Он посещал свой офис в Принстоне, и у него даже был аспирант, Сет Патинкин, защитивший в 2003 г. диссертацию «Локализация РН в играх многих лиц»; но у Сета был и второй руководитель — Яков Григорьевич Синай.

В 1994 г. после получения Нобелевской премии Нэшу не предложили прочитать традиционную часовую лауреатскую лекцию в Стокгольме, так как организаторы опасались за его состояние. Вместо этого он прочитал лекцию в Упсале; она была посвящена космологии. Он пытался обосновать уравнения, описывающие нерасширяющуюся вселенную.

В 2015 г. Нэш получил Абелевскую премию «За яркий и оригинальный вклад в теорию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и её приложения к геометрическому анализу». Лауреатскую лекцию он прочитал 20-го мая, за три дня до гибели. Про космологию там речи нет, но общая теория относительности Эйнштейна и бозон Хиггса упоминаются часто.

Кроме Нобелевской и Абелевской премий, Нэш получил ещё премию фон Неймана на своё 50-летие в 1978 г. (тогда о лекциях не могло быть и речи) и премию Леруа Стила Американского матобщества на 70-летие, а точнее — в 1999 г.

Начиная со второй половины 1990-х годов его стали часто приглашать на конференции с пленарными докладами. 13 июня 2008 г. Нэшу исполнилось 80 лет. Юбилейные конференции были устроены в Принстоне и в университете Стоуни-Брук. После этого он отправился в Европу. В Голландии в качестве юбилейного подарка ему преподнесли довольно крупный бриллиант. Но как подарить его мужчине? Организаторы не растерялись, наверное, вспомнили «Игры разума» и вмонтировали бриллиант в торец шариковой ручки. (В конце фильма «Игры разума» принстонские профессора отдают герою свои шариковые ручки в знак признания его заслуг и превосходства. Это, разумеется, — чисто голливудский приём, выдумка, но голландский бриллиант — реальность.) Из Голландии Нэш заехал на Международную конференцию по теории игр и менеджменту в Петербурге, где сделал часовой доклад «Идеальные и асимптотически идеальные деньги союзников».

Надо отдать должное Нэшу, с годами он делал доклады всё лучше и лучше. Очевидно, болезнь отступала. Наоборот, Ллойд Шепли выступал на конференциях всё хуже и хуже. Он не болен, просто стар. Видно, как трудно ему сконцентрироваться. Где-то в начале 2000-х годов они сравнялись. Я слышал несколько их докладов. Оба говорили очень медленно, надолго останавливаясь после каждой фразы; иногда совсем теряли мысль и не могли продолжать. Конечно, их участие помогало организаторам поднять престиж конференции. Слушатели (зрители) рассматривали их как живые символы теории игр; щёлкали фотоаппараты, жужжали кинокамеры...

Мне кажется, куда уместнее приглашать таких людей в качестве юбиляров или даже просто «свадебных генералов»; в этом нет ничего унизительного. Прочитать Нобелевскую (или Абелевскую) лекцию — куда ни шло: это дань многолетней традиции. Шепли читал её в 2012 г., ровно через полвека после выхода работы [30] про устойчивые паросочетания, за которую премия была присуждена. Читал он по бумажке всего семь минут. Его соавтор Давид Гейл не дожил четырёх лет.

Джон Форбс Нэш младший в фильме «Блестящее безумие». Документальный фильм о Нэше «Американская история: Блестящее безумие» (2002) просто рассказывает, как всё было на самом деле, поэтому он куда жёстче, чем «Игры разума».

В фильме родственники и друзья, а также коллеги-математики рассказывают о Нэше. Очень советую посмотреть.

Всякий раз, когда лекарства начинали действовать и наступало значительное улучшение, Нэш переставал их принимать. Он сожалел об изменении своего состояния и называл периоды ремиссии насильственным возвращением к здравому смыслу, говорил, что несколько великих математических идей явились ему из Космоса вместе с галлюцинациями, а рациональное мышление ослабляет связь с Космосом, что лечение и возврат к нормальности — конформизм, в то время как безумие — тоже возможный выход. (Об этом писал и Пушкин[3], но тут — бесценное свидетельство человека, знающего предмет не понаслышке.)

Только через 30 лет Нэш принял волевое решение избавиться от галлюцинаций, и этот уникальный эксперимент удался, как ни трудно в это поверить. Он перестал прислушиваться к голосам и стал «экзаменовать галлюцинации на реальность».

Его постепенное излечение приписывали изобретению чудодейственных лекарств, но он перестал принимать лекарства ещё в 1960-х годах. Конечно, заменой лекарствам стали жена Алисия, друзья и коллеги, не бросавшие его в течение долгих тридцати лет болезни. Сыграло роль и то, что математики вообще терпимы к отклонениям и странностям и очень ценят одарённость, тем более гениальность.

Но, кажется, мы чересчур увлеклись кино. Пора вернуться к математике.

Разрешимость по Нэшу в чистых стратегиях. Итак, Нэш показал, что РН в смешанных стратегиях существуют всегда, точнее, для любых конечных игр n лиц в нормальной форме. Разумеется, этот результат был распространён и на бесконечные игры, правда, при некоторых топологических ограничениях.

Впрочем, имеется два класса игр, для которых РН могут существовать уже в чистых стратегиях: стохастические и позиционные игры с полной информацией (ПИ)[4]. Могут-то могут, но, как выяснилось, не всегда существуют. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

---

[3] «Не дай мне Бог сойти с ума», 1833.

[4] Условие ПИ означает, что и позиция, и возможные ходы в ней, и их вероятности, если это позиция случая, известны всем участникам. Например, шахматы, шашки, го и нарды — игры с ПИ, а карточные игры и домино — нет.

Разрешимость игровых форм в чистых стратегиях. Для изучения игр в нормальной форме (особенно, матричных и биматричных игр) оказывается весьма удобным отделить структурные свойства от выигрышей. Пусть $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, X_i — конечное множество стратегий игрока $i \in I$, далее, $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ — множество ситуаций и $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ — множество исходов игры. Отображение $g\colon X \to A$ называется игровой формой, а $u\colon I \times A \to \mathbb{R}$ — функцией выигрыша (платёжной функцией); $u(i, a)$ — выигрыш игрока $i \in I$ в случае исхода $a \in A$. Пара (g, u) определяет игру n лиц в нормальной форме.

Игровая форма g называется *разрешимой по Нэшу*, если при любом выигрыше u игра (g, u) имеет хотя бы одно РН.

Игровая форма двух лиц g называется *антагонистически разрешимой*, если при любом выигрыше $u\colon \{1, 2\} \times A \to \mathbb{R}$ с нулевой суммой ($u(1, a) + u(2, a) = 0$ для любого исхода $a \in A$) игра (g, u) имеет седловую точку; при этом g называется ± 1-*разрешимой*, если дополнительно потребовать, чтобы функция u принимала только значения $+1$ и -1.

Игровая форма двух лиц $g\colon X_1 \times X_2 \to A$ называется *плотной*, если её строки и столбцы образуют пару двойственных гиперграфов (клатер и блокер) на множестве A. Это определение можно переформулировать многими способами, например, так. Рассмотрим функции $f_1\colon X_2 \to X_1$ и $f_2\colon X_1 \to X_2$, их графики $gr(f_1), gr(f_2) \subseteq X_1 \times X_2$ и их образы в A при отображении g, то есть $[f_1] = g(gr(f_1)), [f_2] = g(gr(f_2)) \subseteq A$.

Игровая форма $g\colon X_1 \times X_2 \to A$ плотна тогда и только тогда, когда $[f_1] \cap [f_2] \neq \varnothing$ при любых f_1 и f_2. Иными словами, выберем ответ игрока 1 на каждую стратегию игрока 2, и наоборот. Игровая форма g плотна тогда и только тогда, когда при любых таких выборках соответствующие два подмножества исходов из A пересекаются.

Следующие свойства игровых форм двух лиц эквивалентны:

(а) плотность,

(б) ± 1-разрешимость,

(в) антагонистическая разрешимость,

(г) разрешимость по Нэшу.

Эквивалентность (а), (б) и (в) была установлена Эдмондсом и Фалкерсоном в [27] и независимо в [1]. Впрочем, доказательство почти очевидно.

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $[f_1] \cap [f_2] = \varnothing$. Положим $u(1, a) = 1$ при $a \in [f_1]$, $u(1, a) = -1$ при $a \in [f_2]$, $u(1, a) = 1$ или -1 (произвольно) при $a \notin [f_1] \cup [f_2]$ и, наконец, $u(2, a) = -u(1, a)$ при всех $a \in A$. Очевидно, при этом $-1 = v_1 < v_2 = 1$, значит, игра (g, u) не имеет седловой точки, а u — выигрыш с нулевой суммой, принимающий лишь значения ± 1; иными словами, g не является даже ± 1-разрешимой.

(а) $\Rightarrow$ (в). Пусть g антагонистически неразрешима, то есть существует выигрыш u с нулевой суммой, при котором игра (g, u) не имеет седловой точки. Как мы знаем, в этом случае $v_1 < v_2$. Выберем исход, реализующий минимум (соответственно, максимум) в каждой строке (соответственно, столбце). Очевидно, два полученных подмножества A не пересекаются. Стало быть, g не плотна.

Наконец, импликация (в) $\Rightarrow$ (б) очевидна из определений (б) и (в).

Свойство (г) было добавлено к списку {а, б, в} в [3], см. также [2]. Импликация (г) $\Rightarrow$ (в) очевидна из определений (г) и (в), но (а) $\Rightarrow$ (г) доказывается несколько сложнее, и мы не приводим здесь это доказательство.

Несколько примеров плотных и неплотных игровых форм двух лиц приведены ниже.

Плотные игровые формы

a_1	a_1
a_2	a_3

a_1	a_1	a_3	a_3
a_2	a_4	a_2	a_4

a_0	a_0	a_0
a_0	a_1	a_2
a_0	a_3	a_4

a_1	a_1	a_3
a_1	a_2	a_2
a_3	a_2	a_3

a_1	a_1	a_2
a_1	a_1	a_3
a_4	a_3	a_3

a_1	a_2	a_1	a_2
a_3	a_4	a_4	a_3
a_1	a_4	a_1	a_5
a_3	a_2	a_6	a_2

Неплотные игровые формы

a_1	a_2
a_2	a_1

a_0	a_1	a_2
a_0	a_2	a_1

a_1	a_1	a_2
a_4	a_0	a_2
a_4	a_3	a_3

О применении вышеприведённых результатов к анализу разрешимости по Нэшу позиционных игровых форм см. [20, 22, 33].

Определение плотности естественно расширяется на игровые формы n лиц при $n \geqslant 2$. Однако плотность при этом уже не является ни необходимым, ни достаточным условием разрешимости по Нэшу; примеры можно найти в [2, 3].

Замечание. Когда я в 1988 г. рассказал всё это Куну, он немедленно спросил, какова алгоритмическая сложность проверки плотности игровых форм (иными словами, двойственности гиперграфов). Я честно ответил, что не знаю. Сейчас вопрос Куна выглядит более чем естественно, но в 1980-х алгоритмическая сложность ещё не была в моде в Москве. Когда я прибыл в Ратгерс в 1993 г., оказалось, что там в точности этой задачей занимаются уже лет 6–7, причём безуспешно, если не считать алгоритмов для специальных случаев. Я рассказал («проболтался», можно сказать) об этой задаче моему другу Хачияну, с которым мы учились когда-то на Физтехе. Тот никогда раньше двойственностью не занимался, но про сложность знал всё. (Помните специалиста по «теории поиска» Вальдеца из романа Роберта Шекли «Обмен разумов»?) Через месяц задача была решена, точнее, Хачиян (вместе с Микаэлом Фредманом) получил квазиполиномиальный ($n^{\log n}$)-алгоритм [28], который не превзойдён и по сей день; есть ли полиномиальный — неизвестно.

Равновесие Нэша в чистых стратегиях в стохастических и позиционных играх с полной информацией. В обоих случаях моделью игры служит ориентированный граф (орграф) $G = (V, E)$, вершины которого интерпретируются как позиции, а ориентированные рёбра (дуги), выходящие из данной вершины, — как возможные ходы в соответствующей позиции. Позиции разбиваются на $n+2$ класса $V = V_T \cup V_R \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Терминальная позиция не имеет выходящих рёбер; в позиции случая $v \in V_R$ задаётся вероятностное распределение на множестве выходящих ребёр, и ход делается случайно, в соответствии с этим распределением; в позиции $v \in V_i$ ход выбирает игрок i.

Существование РН хорошо известно в двух случаях: (i) когда орграф игры конечен и не имеет ориентированных циклов (орциклов) и (ii) для игр двух лиц с нулевой суммой.

В обоих случаях РН обладает весьма приятными дополнительными свойствами: оно достигается не просто в чистых, но и в *стационарных* (*позиционных*) *равномерно равновесных* стратегиях. Стационарность означает, что ход в любой позиции зависит только от неё, но не от предыстории. Равномерная равновесность означает, что одна и та же ситуация (набор стратегий всех n игроков) является РН при любом выборе начальной позиции.

В случае (i) весьма простое доказательство, основанное на методе обратной индукции, появилось в работах Гарольда Куна [37, 38] и Давида Гейла [29]. Хотя в этих статьях рассматриваются только *терминальные* выигрыши (определённые не на рёбрах орграфа, а лишь на его тупиковых позициях (терминалах), как, например, в шахматной игре) и только «личные» позиции игроков $\{1, \ldots, n\}$, а не позиции случая, но в [29] Гейл упоминает возможность таких обобщений.

Однако ацикличность совершенно необходима. Обратная индукция не проходит при наличии в орграфе игры хотя бы одного орцикла. В то же время, в шахматной игре такие орциклы имеются (позиция может повторяться), и, тем не менее, Цермело доказал свою теорему, используя условие (ii). Позже, в 1950-е годы, выяснилось, что (ii) позволяет установить наличие седловой точки в чистых стационарных равномерно оптимальных стратегиях в гораздо более широком классе стохастических игр с полной информацией и с *предельным средним эффективным выигрышем*. Это означает, что партия бесконечна и каждый из игроков максимизирует свой выигрыш в расчёте на один ход, иными словами, среднее по Чезаро, т. е. нижний предел среднего выигрыша за первые T ходов при $T \to \infty$.

Этот очень непростой результат был получен усилиями многих авторов: Харди — Литлвуд (1931) [35], Шепли (1953) [65], Жилет (1957) [31], Лигет — Липман (1969) [44]. Доказательство Жилета основано на одной из так называемых тауберовских теорем Харди и Литлвуда о связи сумм Чезаро (предельный средний эффективный выигрыш) и абелевых сумм (дисконтированный выигрыш, не путать с премией) при коэффициенте дисконтирования, стремящемся снизу к $+1$. Жилет применил эту теорему, не проверив выполнения всех её условий; его доказательство было скорректировано позже Лигетом и Липманом.

Отступление. Харди много раз заявлял, что хорошая математика — это чистая математика, исключающая любые приложения. Интересно, что одна из его наиболее абстрактных теорем вовсю используется в теории стохастических игр, набирая многие сотни ссылок.

Опираясь на результат для случая (ii), Тёйсман и Рагхаван [66] доказали существование ситуации РН в чистых стратегиях для любых стохастических игр n лиц с полной информацией. Построенная ими ситуация равномерна, то есть её стратегии не зависят от начальной позиции, однако ход игрока в данной позиции может зависеть от предыстории, то есть стратегии, вообще говоря, не стационарны. Конструкция очень проста. Данной игре n лиц G поставим в соответствие n игр с нулевой суммой: в G_i игрок $i \in I$ противостоит всем остальным игрокам $I \setminus \{i\}$, которые забывают о своих интересах и стремятся минимизировать выигрыш i. Известно, что в каждой такой игре существует седловая точка в чистых стационарных *равномерно оптимальных* стратегиях. (Последнее свойство будет играть главную роль.) Рассмотрим следующую нестационарную ситуацию. Каждый игрок $i \in I$ применяет найденную стратегию x_i до тех пор, пока кто-нибудь из них, скажем j, не отклонится, после чего все остальные переключаются на свои («наказательные») стратегии в игре G_j. Несколько замечаний:

(з0) В принципе, возможно более чем одно отклонение, но в определённой выше ситуации игроки реагируют только на первое и игнорируют все последующие. Доказывая, что полученная ситуация — РН, мы естественно предполагаем, что только один игрок, j, может отклоняться сколько угодно раз, а все остальные следуют выбранным стратегиям.

(з1) В полученной ситуации стратегии зависят от предыстории, но «не очень сильно». Каждый игрок применяет свою осторожную стратегию, но может однажды переключиться на одну из $n-1$ наказательных.

(з2) Поскольку информация полная, у игроков не будет проблем с определением «нарушителя и момента нарушения».

(з3) Может показаться, что, сделав ход (v, v'') вместо предписанного (v, v'), игрок j получит настолько большую выгоду, что его уже не удастся наказать. Однако это противоречит оптимальности наказательной стратегии коалиции $I \setminus \{j\}$ в игре G_j относительно начальной позиции v, а ведь эта стратегия *равномерно* оптимальна.

(з4) Разумеется, аргументы (з3) верны лишь при некоторых условиях на структуру эффективного выигрыша, которую мы здесь не уточняем. Заметим лишь, что (з3) применимо ко всем типам выигрышей, обычно рассматриваемым в теории стохастических игр.

Если не предполагать (i) или (ii), то РН в чистых стационарных стратегиях может не существовать. Пример на рис. 1 был построен в 1988 г. в [4], см. также [6]. Игра двух лиц задана на полном двудольном 3×3 графе. Игроки 1 и 2 контролируют по три позиции, белые и чёрные соответственно. Отметим, что позиций случая в этой игре вообще нет. Каждое ребро на рис. 1 следует заменить на две противоположно ориентированных дуги,

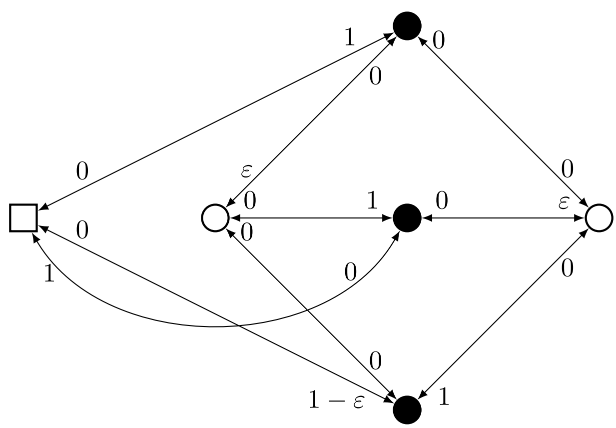


Рис. 1. Игра двух лиц с полной информацией, но с ненулевой суммой без РН в чистых стационарных стратегиях. Локальные выигрыши заданы на рёбрах графа. Белые и чёрные кружки обозначают позиции игроков 1 и 2 соответственно. В начальной позиции ходит игрок 1. Она обозначена белым квадратом

на которых каждый игрок имеет один и тот же локальный выигрыш — число, ближайшее к его вершине. Каждый из игроков имеет $3^3 = 27$ чистых стационарных стратегий. Соответствующая биматричная игра 27×27 не имеет РН в чистых стратегиях.

В [5] показано, что этот пример в некотором смысле минимальный, а именно: любая игра, заданная аналогично на (полном) графе $2 \times k$, имеет РН в чистых стационарных стратегиях.

Пример на рис. 2 был недавно построен в [33]. В этом примере, в отличие от предыдущего, выигрыш терминальный. Это весьма специальный частный случай: все локальные выигрыши на рёбрах для всех игроков равны нулю, а в терминальных позициях (из которых нет ходов), а также для исхода c, соответствующего единственному ориентированному циклу графа, заданы терминальные выигрыши для всех игроков. При этом важна

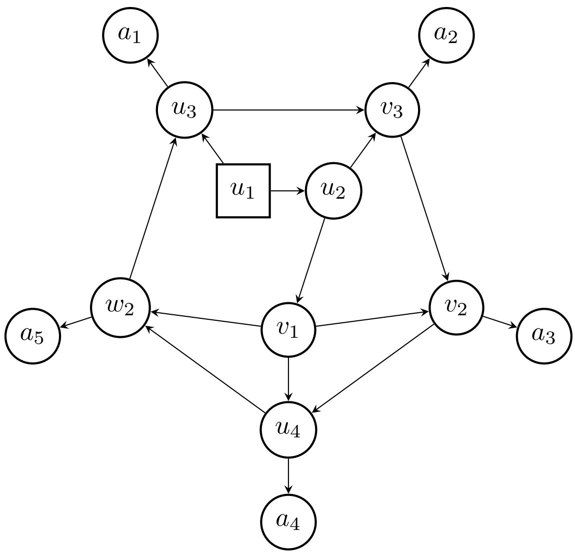


Рис. 2. В этой позиционной игре с полной информацией имеется 4 игрока, 6 исходов: 5 терминалов $\{a_1, \ldots, a_5\}$ и всего 1 цикл c. Имеется 8 промежуточных позиций. Для каждой нижний индекс обозначает номер игрока, выполняющего ход. Каждый из игроков имеет предпочтение на множестве исходов. Локальных выигрышей нет или, иными словами, все они равны нулю. В [33] показано, что игра не имеет РН в чистых стационарных стратегиях всякий раз, когда предпочтения игроков согласуются со следующими частичными порядками:

$O_1: a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_5$;

$O_2: \min(a_1, c) \succ a_3 \succ \max(a_4, a_5) \succ \min(a_4, a_5) \succ a_2$;

$O_3: \min(a_5, c) \succ a_1 \succ a_2 \succ \max(a_3, a_4)$;

$O_4: \min(a_1, a_2, a_3, a_5) \succ a_4 \succ c$

только их упорядоченность для каждого, а сами вещественные значения роли не играют.

Шахматы, например, — классическая игра с терминальным выигрышем. В ней РН (седловая точка) имеется, поскольку это игра двух лиц с нулевой суммой.

А вот в игре на рис. 2 РН нет. В ней 4 игрока, 5 терминальных позиций и всего один ориентированный цикл. Заметим, что этот цикл c — худший исход для игрока 4, один из двух лучших для 2 и 3, а игроку 1 он вообще безразличен, поскольку у него ходов на цикле нет. Было бы интересно построить такой аналогичный пример, что цикл c — наихудший исход для всех игроков, а также уменьшить число игроков с 4 до 3. Уменьшить его до 2 невозможно; это следует из результатов [2, 3] о разрешимости по Нэшу игровых форм двух лиц; см. стр. 40.

Минимальные матричные игры без седловой точки и биматричные без РН в чистых стратегиях. Легко проверить, что матричная игра 2×2 не имеет седловой точки в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда каждый из двух элементов одной из диагоналей строго больше каждого из двух элементов другой.

В 1964 г. Ллойд Шепли [64] показал, что матрица имеет седловую точку тогда и только тогда, когда таковую имеет любая её 2×2-подматрица. Этот результат усилен в [21]: любая матрица без седловой точки размера, превышающего 2×2, имеет строку или столбец, удаление которого не приводит к появлению седловой точки. Иными словами, все (локально) минимальные матрицы без седловой точки имеют размер 2×2.

В [21] этот результат следующим образом обобщается на биматричные игры $a\colon I \times J \to \mathbb{R}$, $b\colon I \times J \to \mathbb{R}$, где a и b — выигрыши игроков 1 и 2 соответственно: (a, b) — локально минимальная биматричная игра без РН (иными словами, (a, b) не имеет РН, но РН появляется после удаления любой строки $i \in I$ или столбца $j \in J$) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(K) квадратность: $|I| = |J| = n$ (но теперь любое значение $n \geqslant 2$ возможно);

(D) существуют такие отображения $\sigma\colon I \to J$ и $\delta\colon J \to I$, что их графики $\mathrm{gr}(\sigma)$ и $\mathrm{gr}(\delta)$ не пересекаются в $I \times J$, иными словами, $(i, \sigma(i)) \neq (\delta(j), j)$ для всех $i \in I$ и $j \in J$;

(A) элемент $a(\delta(j), j)$ — единственный максимум в столбце j и второй по величине (но не обязательно единственный) в строке $\delta(j)$;

(B) элемент $b(i, \sigma(i))$ — единственный максимум в строке i и второй по величине (но не обязательно единственный) в столбце $\sigma(i)$.

Ясно, что может существовать не более одной пары таких отображений (σ, δ).

Достаточность почти очевидна [34]. Пусть условия (K, D, A, B) выполнены. Тогда в игре (a, b) РН нет. В самом деле, для любой ситуации (i, j) имеем: $b(i, \sigma(i)) > b(i, j)$, если $j \neq \sigma(i)$; $a(\delta(j), j) > a(i, j)$, если $i \neq \delta(j)$ и по крайней мере одно из этих двух строгих неравенств выполняется, поскольку иначе $(i, \sigma(i)) = (\delta(j), j) = (i, j)$, вопреки условию (D).

Удалим произвольную строку $i \in I$ и рассмотрим два столбца: $j = \sigma(i)$ и $j' = \delta^{-1}(i)$, строку $i' = \sigma^{-1}\delta^{-1}(i)$ и три ситуации:

$$(i, j) = (i, \sigma(i)), \quad (i, j') = (i, \delta^{-1}(i)), \quad (i', j') = (\sigma^{-1}\delta^{-1}(i), \delta^{-1}(i)).$$

В исходной биматрице $b(i', j')$ — единственный максимум в строке i' и $a(i', j')$ — второй по величине элемент в столбце j', уступающий только $a(i, j')$. Но последний был удалён вместе со строкой i. Значит, в редуцированной биматрице (i', j') — равновесие Нэша. Аналогично если удалить любой столбец $j \in J$, то ситуация $(\sigma^{-1}(j), \delta^{-1}\sigma^{-1}(j))$ станет РН.

Итак, (a, b) — локально минимальная биматрица без РН. Доказать необходимость немного труднее; см. [21].

Отметим, что (a, b) *локально минимальная*, но совсем не обязательно *минимальная* биматрица без РН, поскольку она вполне может содержать подбиматрицу без РН, не пересекающую $gr(\sigma) \cup gr(\delta)$ в $I \times J$. В отличие от локальной минимальности, простой критерий минимальности получить не удаётся.

Абелевская премия была присуждена Нэшу в 2015 г. «за выдающийся и основополагающий вклад в теорию нелинейных уравнений в частных производных и её приложения в геометрическом анализе». В первую очередь, речь идёт о решении 19-й проблемы Гильберта: теореме де Джорджи — Нэша [25, 26, 50, 53, 57]; также получил признание вклад Нэша в вещественную алгебраическую геометрию: теорема Нэша — Тоньоли [58, 67]; теория вложений и погружений: феномен Нэша — Кайпера [43, 52].

19-я проблема Гильберта была решена в нескольких фундаментальных работах. Первый значительный шаг сделал Сергей Натанович Бернштейн в 1903 г. (заняться проблемой предложил ему сам Гильберт), следующий — Иван Георгиевич Петровский в 1937 г. и, наконец, окончательное решение получили независимо Эннио де Джорджи (1956, 1957) [25, 26] и Джон Нэш (1957, 1958) [53, 57].

В 1952 г. Нэш доказал [58], что любое гладкое компактное многообразие диффеоморфно невырожденной компоненте вещественного алгебраического множества; в 1973 г. Альберто Тоньоли [67] усилил эту теорему, избавившись от слова «компонента». Результат получил название «теорема Нэша — Тоньоли»; вошли в обиход также термины функция (отображение), диффеоморфизм, многообразие, крыло Нэша.

Теорема Нэша о регулярных вложениях — это обобщение теоремы об обратной функции с банаховых пространств на пространства Фреше. Всякое m-мерное риманово многообразие (B^m, g) класса C^k, где $3 \leqslant k \leqslant \infty$, допускает изометрическое C^k-вложение в $\mathbb{R}^n$ для достаточно большого n [60]. Нэш дал явную оценку $n \geqslant m(m+1)(3m+11)/2$, которая позднее несколько раз улучшалась; в частности теорема справедлива для $n \geqslant m^2 + 10m + 3$. Нэш также доказал аналогичный результат для аналитических вложений [60].

Для C^1-гладких вложений похожий результат (теорема Нэша — Кайпера [43, 52]) утверждает, что любое гладкое вложение (погружение) n-мерного риманова многообразия в евклидово пространство $\mathbb{R}^q$ при $q > n$ можно аппроксимировать C^1-гладким изометрическим вложением (погружением), где «изометрическое» означает «сохраняющее длины кривых». Нэш получил этот результат при $q > n + 1$.

В 1966 г. Юрген Мозер показал [47], что методы вложения Нэша применимы для решения проблемы периодических орбит в небесной механике (теорема Нэша — Мозера).

Замечание. В 2011 г. Агентство национальной безопасности США рассекретило записки Нэша 1950 г., в которых он предлагает новую шифровальную машину. Записки показывают, что Нэш предвидел многие концепции современной криптографии и, в частности, её связь с теорией сложности вычислений.

«Кампанейщина и волны» в теории игр. Первая и наиболее мощная волна локализована не только во времени (1940–1950), но и в пространстве — Принстон. Такая блестящая компания, наверное, больше нигде и никогда не собиралась. Главным был фон Нейман, затем Шепли, Нэш и их научный руководитель Такер, а также Данциг, Гейл, Кун и Ауман. Можно включить и Какутани, который в 1941 г. в Принстоне доказал свою теорему [36]. Невиданная концентрация! Принстон ведь маленький университет (но, без сомнения, великий). Фон Нейман и Моргенштерн в 1944 г. опубликовали свою знаменитую монографию [69]. Данциг и фон Нейман поняли эквивалентность матричных игр и линейного программирования. Такер, Кун и Гейл обобщили понятие двойственности на случай выпуклого программирования. Шепли ввёл стохастические игры (и, как частный случай, управляемые марковские процессы). В результате теория игр двух лиц с нулевой суммой приобрела вполне законченные очертания.

Тогда же были введены главные понятия теории игр n лиц: некооперативной — РН (1950) и кооперативной — вектор Шепли (1953). Позже появились их многочисленные уточнения и вариации, но они, как правило, слишком громоздки, чтобы оставить место красивой математике, и всё ещё далеки от реальных приложений, например в экономике. Исключением является, безусловно, понятие ядра, введённое Дональдом Брюсом Джиллисом в 1959 г. [32].

Этот блестящий период закончился около 1960 г., но по инерции теория игр считалась модной ещё лет 15–20. На неё возлагались грандиозные надежды, которые по зрелом размышлении ну никак не могли оправдаться. Я помню, как Михаил Моисеевич Ботвинник в 1975 г. рассказывал, что если его программа «Пионер» заиграет в шахматы хотя бы на уровне мастера, то через год все проблемы экономики будут решены. Психологически понятно, что после чрезмерных надежд наступило чрезмерное же разочарование. Вспомните заявление Алана Хофмана.

Замечание. С последствиями я сталкивался не раз. Например, стало трудно публиковать статьи. Международный журнал теории игр — тоненький и выходил всего 4 раза в год, а остальные журналы значительно уменьшили квоту на игры. Возникла даже самоцензура. В 1980-е годы Леонид Хачиян, Александр Карзанов и я работали над циклическими играми [6]. (Это такой специальный класс «детерминированных стохастических игр». Задача их решения лежит в пересечении классов NP и co-NP, но полиномиального алгоритма до сих пор нет. Выходит, она сложнее задачи линейного программирования, которую Хачиян успешно решил за полиномиальное время в 1979 г. В [6] предложен, в частности, пример циклической игры двух лиц (с ненулевой суммой) без РН.) В 1985 г. я написал первый вариант нашей статьи «Циклические игры», но Хачиян заявил, что игры сейчас не в моде, и всё переписал на языке минимаксных средних циклов в ориентированных графах, добавив их прямо в название статьи и убрав из введения стратегии и «прочие рудименты» теории игр.

Американской прикладной математике и информатике вообще свойственна некоторая «кампанейщина». Время от времени собираются «большие люди» и решают, какие направления на сегодняшний день надо считать основными, а какие, наоборот, притормозить. Затем возглавляемые ими «рядовые исследователи» врываются в указанные приоритетные области, как стадо мустангов в прерии, и, поднимая тучи пыли, начинают свои исследования; причём зачастую «с чистого листа», поскольку кампания рассчитана на определённые (достаточно короткие) сроки и основательно изучать, что там накопилось за десятилетия, времени нет. Как однажды заметил Хачиян: «Потом, когда пыль уляжется, от всей этой деятельности порой и следа не остаётся».

Это произошло и с теорией игр в середине 1990-х годов. Совет тогда возглавили директор Центра дискретной математики и теоретической информатики Фред Робертс, а также Алан Хофман, Христос Пападимитриу и Ева Тардош; Джон Нэш был приглашён в качестве свадебного генерала и даже выступил с коротким докладом. Поскольку всё происходило в Ратгерсе, мы с Хачияном тоже зашли. Было решено, что в связи с бурным развитием электронной торговли и социальных сетей надо теорию игр из изгнания вернуть, а РН назначить основной концепцией, поскольку некооперативная тенденция явно преобладает. Были назначены и сроки мозгового штурма — ближайшие 5–7 лет. Сразу же закипела работа. Число публикаций про РН увеличилось раз в пять. В доброй половине случаев переоткрывались или переформулировались с небольшими отклонениями забытые или просто неизвестные авторам результаты 1970–80-х годов. Появились хлёсткие термины, вроде «цена анархии». (Помнится, в диссертации 1978 г. у меня была «цена стабильности». До сих пор не знаю, это то же самое или нет.)

Действительно большим достижением этой кампании стало понятие $PPAD$-полноты, введённое Пападимитриу [62] ещё в 1994 г., то есть за пару лет до «новой волны». Это понятие напрямую связано с вычислением РН в смешанных стратегиях. Какова алгоритмическая сложность этой задачи? Классы P и NP тут не подходят, поскольку определены только для задач с ответом «да-нет», а неподвижная точка или РН существуют всегда, согласно теоремам Брауэра и Нэша. Вопрос: как их найти? По-видимому, эффективных алгоритмов нет. Пападимитриу формально ввёл класс $PPAD$, аналогичный классу NP, и показал, что обе задачи $PPAD$-полны. Более того, $PPAD$-полнота имеет место уже в случае размерности два для теоремы Брауэра и, соответственно, двух игроков для РН, но доказать это сложнее. Такой результат был получен только в 2006 г. Си Ченем и Сяоте Деном [23].

Вспомним, что дуализация гиперграфов эквивалентна разрешимости по Нэшу игровых форм двух лиц. Для этой задачи в 1996 г. Хачиян предложил квазиполиномиальный алгоритм [28], но полиномиального нет до сих пор. Возможно, задача имеет какой-то особый статус.

Таким образом, РН попадает в самый центр современной теории алгоритмической сложности.

Заключение. В 1971 г. Юрий Борисович Гермейер объяснил мне, что такое РН. С тех пор я написал много статей по теории игр, и половина из них — именно про РН. Я бывал на лекциях Джона Нэша, но никогда с ним лично не беседовал. Конечно, у меня нет права назвать его учителем, но он — человек, построивший мой дом. Жаль, что это понятие не выражается одним словом.

Список литературы

[1] *Гурвич В. А.* К теории многошаговых игр // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13, № 6. С. 1485–1500.

[2] *Гурвич В. А.* Равновесие в чистых стратегиях // ДАН СССР. 1988. Т. 303, № 4. С. 538–542.

[3] *Гурвич В. А.* Разрешимость позиционных игр в чистых стратегиях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15, № 2. С. 358–371.

[4] *Гурвич В. А.* Стохастическая игра с полной информацией, не имеющая ситуаций равновесия в чистых стационарных стратегиях // УМН. 1988. Т. 43, вып. 2(260). С. 135–136.

[5] *Гурвич В. А.* Теорема существования ситуаций равновесия в чистых стратегиях для эргодических расширений $(2 \times k)$-биматричных игр // УМН. 1990. Т. 45, вып. 4(274). С. 151–152.

[6] *Гурвич В. А., Карзанов А. В., Хачиян Л. Г.* Циклические игры и поиск минимаксных средних циклов в ориентированных графах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28, № 9. С. 1407–1417.

[7] *Канторович Л. В.* Дальнейшее развитие математических методов и перспективы их применения в планировании и экономике // Применение математики в экономических исследованиях. 1959. С. 310–353.

[8] *Канторович Л. В.* Математико-экономические работы. Избранные труды. Новосибирск: Наука, 2011.

[9] *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. Л.: ЛГУ. 1939. Перепечатка: в сб. «Применение математики в экономических исследованиях». М.: Соцэкгиз, 1959. С. 251–309.

[10] *Канторович Л. В.* О перемещении масс // ДАН СССР. 1942. Т. 37, № 7/8. С. 227–229.

[11] *Канторович Л. В.* Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // ДАН СССР. 1940. Т. 28, № 3. С. 212–215.

[12] *Канторович Л. В.* Показатели работы предприятий нуждаются в пересмотре, 1943, рукопись. Опубл.: Оптимизация (сборник трудов Института математики СО АН СССР). 1991. Вып. 50(67). С. 16–44.

[13] *Канторович Л. В.* Рациональные методы раскроя металла. Произв.-техн. бюл. НКБ СССР. 1942. № 7–8. С. 21–29.

[14] *Канторович Л. В.* Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

[15] *Канторович Л. В., Залгаллер В. А.* Расчёт рационального раскроя промышленных материалов. Л.: Лениздат, 1951.

[16] *Binmore K.* Playing for real: a text on game theory. Oxford University Press, 2007.

[17] *Borel E.* Eléments de la théorie des probabilités. Paris: Librairie Scientifique, J. Hermann, 1924. P. 204–221. (Англ. пер.: On games that involve chance and the skill of the players // Econometrica. 1953. V. 21. P. 101–115.)

[18] *Borel E.* La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1921. V. 173. P. 1304–1308. (Англ. пер.: The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels // Econometrica. 1953. V. 21. P. 97–100.)

[19] *Borel E.* Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1927. V. 184. P. 52–53. (Англ. пер.: On systems of linear forms of skew symmetric determinant and the general theory of play // Econometrica. 1953. V. 21. P. 116–117.)

[20] *Boros E., Gurvich V.* Why Chess and Backgammon can be solved in pure positional uniformly optimal strategies // Rutgers Research Report 21–2009, Rutgers University.

[21] *Boros E., Gurvich V., Makino K.* Minimal and locally minimal games and game forms // Discrete Math. 2009. V. 309, № 13. P. 4456–4468.

[22] *Boros E., Gurvich V., Makino K., Shao W.* Nash-solvable two-person symmetric cycle game forms // Discrete Applied Math. 2011. V. 159. P. 1461–1487.

[23] *Chen X., Deng X.* On the complexity of 2D discrete fixed point problem // 33rd Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP, 2006). P. 489–500.

[24] *Cournot A. A.* Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des Richesse. Paris: Chez L. Hachette, 1838.

[25] *de Giorgi E.* Sull'analiticita delle estremali degli integrali multipli // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Serie VIII (итал.). 1956. V. 20. P. 438–441.

[26] *de Giorgi E.* Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Accad. Sci. Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematicahe e Naturali. Serie III (итал.). 1957. V. 3. P. 25–43. (Англ. пер.: On the differentiability and the analyticity of extremals of regular multiple integrals // E. de Giorgi. Selected papers. Berlin — New York: Springer-Verlag, 2006. P. 149–166.)

[27] *Edmonds J., Fulkerson D. R.* Bottleneck extrema // J. Combin. Theory. 1970. V. 8. P. 299–306.

[28] *Fredman M. L., Khachiyan L.* On the complexity of dualization of monotone disjunctive normal forms // J. of Algorithms. 1996. V. 21, № 3. P. 618–628.

[29] *Gale D.* A theory of N-person games with perfect information // Proc. Nat. Acad. Sci. 1953. V. 39. P. 496–501.

[30] *Gale D., Shapley L. S.* College admissions and the stability of marriage // Amer. Math. Monthly. 1962. V. 69, № 1. P. 9–15.

[31] *Gillette D.* Stochastic games with zero stop probabilities // Contribution to the theory of games III. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1957. (Ann. Math. Studies; № 39). P. 179–187.

[32] *Gillies D. B.* Solutions to general non-zero-sum games // Contributions to the theory of games IV. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1959. (Ann. Math. Studies; № 40). P. 47–85.

[33] *Gurvich V.* A four-person chess-like game without Nash equilibria in pure stationary strategies // Business Informatics. 2015. V. 1, № 31. P. 68–76. http://arxiv.org/abs/1411.0349.

[34] *Gurvich V., Libkin L.* Absolutely determined matrices // Math. Soc. Sci. 1990. V. 20. P. 1–18.

[35] *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Notes on the theory of series (16): two Tauberian theorems // J. London Math. Soc. 1931. V. 6. P. 281–286.

[36] *Kakutani S.* A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke Math. J. 1941. V. 8, № 3. P. 457–459.

[37] *Kuhn H. W.* Extensive games // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 570–576.

[38] *Kuhn H. W.* Extensive games and the problem of information // Contributions to the theory of games. Vol. II. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1953. (Ann. Math. Studies; № 28). P. 193–216.

[39] *Kuhn H. W.* The Hungarian method for the assignment problem // Naval Research Logistics Quarterly. 1955. V. 2. P. 83–97.

[40] *Kuhn H. W.* Variants of the Hungarian method for assignment problems // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. V. 3. P. 253–258.

[41] *Kuhn H. W., Harsanyi J. C., Selten R., Weibull J. W., van Damme E., Nash J. F., Jr., Hammerstein P.* The work of John Nash in game theory. A celebration of John F. Nash, Jr. // Duke Math. J. 1995. V. 81:1. P. 1–29.

[42] *Kuhn H. W., Nasar S. (eds.)* The essential John Nash. Princeton University Press, 2001.

[43] *Kuiper N. H.* On C1-isometric imbeddings, I // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 58 = Indag. Math. V. 17. P. 545–556.

[44] *Liggett Th. M., Lippman S. A.* Stochastic games with perfect information and time average payoff // SIAM Review. 1969. V. 11. P. 604–607.

[45] *Milnor J.* A Nobel prize for John Nash // Math. Intell. 1995. V. 17. P. 11–17.

[46] *Milnor J.* John Nash and "A Beautiful Mind" // Notices of the American Mathematical Society. 1998. V. 45. P. 1329–1332.

[47] *Moser J.* A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations. I, II // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1966. V. 20, № 3. P. 265–315, 499–535.

[48] *Myerson R. B.* Nash equilibrium and the history of economic theory // J. of Economic Literature. 1999. V. 37. P. 1067–1082.

[49] *Nasar S.* A Beautiful Mind. New York: Simon and Schuster, 1998.

[50] *Nash J. F., Jr.* Analyticity of the solutions of implicit function problem with analytic data // Ann. Math. 1966. V. 84, № 3. P. 345–355. (Рус. пер.: *Нэш Дж.* Аналитичность решений задач о неявной функции с аналитическими исходными данными // УМН. 1971. Т. 26, вып. 4(160). С. 217–226.

[51] *Nash J. F., Jr.* Autobiography. Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 1994, ed. T. Fraengsmyr, Stockholm: Nobel Foundation, Almqvist and Wiksell, 1995. P. 275–279.

[52] *Nash J. F., Jr.* C^1-isometric imbeddings // Ann. Math. 1954. V. 60, № 3. P. 383–396. (Рус. пер.: Математика. 1957. Т. 1, № 2. С. 17–28.)

[53] *Nash J. F., Jr.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80, № 4. P. 931–954.

[54] *Nash J. F., Jr.* Equilibrium points in n-person games // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.

[55] *Nash J. F., Jr.* Non-cooperative games // Ann. Math. 1951. V. 54, № 2. P. 286–295. (Рус. пер.: *Нэш Дж.* Бескоалиционные игры // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 205–221.)

[56] *Nash J. F., Jr.* Non-cooperative games. Doctoral dissertation, 1950. Princeton University.

[57] *Nash J. F., Jr.* Parabolic equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1957. V. 43, № 8. P. 754–758.

[58] *Nash J. F., Jr.* Real algebraic manifolds // Ann. Math. 1952. V. 56, № 2. P. 405–421. (См. также: Proc. Intern. Congr. Math. AMS, 1952. P. 516–517.)

[59] *Nash J. F., Jr.* The bargaining problem // Econometrica. 1950. V. 18. P. 155–162.

[60] *Nash J. F., Jr.* The imbedding problem for Riemannian manifolds // Ann. Math. 1956. V. 63, № 1. P. 20–63.

[61] *Nash J. F., Jr.* Two-person cooperative games // Econometrica. 1953. V. 21. P. 128–140.

[62] *Papadimitriou Ch.* On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence // J. Comp. and System Sciences. 1994. V. 48, № 3. P. 498–532.

[63] *Scarf H.* The core of an N-person game // Econometrica. 1967. V. 35, № 1. P. 50–69.

[64] *Shapley L. S.* Some topics in two-person games // Advances in Game Theory. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1964. (Ann. Math. Studies; № 52). P. 1–28.

[65] *Shapley L. S.* Stochastic games // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. V. 39. P. 1095–1100.

[66] *Thuijsman F., Raghavan T. E. S.* Perfect information stochastic games and related classes // International Journal of Game Theory. 1997. V. 26, № 3. P. 403–408.

[67] *Tognoli A.* Su una congettura di Nash (итал.) // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1973. V. 27, № 1. P. 167–185.

[68] *von Neumann J.* Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Math. Ann. 1928. Bd. 100. S. 295–320. (Рус. пер.: *фон Нейман Дж.* К теории стратегических игр // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 173–204.)

[69] *von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, 1944. (Рус. пер.: *фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Физматгиз, 1970.)

[70] *Zermelo E. F. F.* Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels // Proc. Fifth Congr. Math. Cambridge 1912. V. 2. Cambridge University Press, 1913. P. 501–504. (Рус. пер.: *Цермело Э.* О применении теории множеств к теории шахматной игры // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 167–172.)

В. А. Гурвич, Ратгерс, Государственный университет Нью-Джерси (США), НИУ ВШЭ

vladimir.gurvich@gmail.com