

Повесть о трёх кругах

Г. Гальперин, Ч. Делман

Все знают, что сумма углов треугольника, образованного тремя прямыми на плоскости, равна 180° . А что можно сказать о сумме углов криволинейного треугольника, образованного тремя окружностями? Приглашаем читателя на опыте убедиться, что ответы могут быть самыми разными, а ситуация в целом неочевидна. В этой статье мы дадим полный ответ на поставленный вопрос. Как мы надеемся, в результате нашего исследования нам удастся раскрыть проблему более глубоко — рассмотрев её с нескольких точек зрения и на нескольких уровнях абстракции.

Мы начнём с элементарного решения, использующего лишь начальные понятия евклидовой геометрии. Прямое и очень короткое, это решение, однако, неполно. Оно годится лишь для одного специального расположения окружностей на плоскости. В модели гиперболической геометрии (плоскости Лобачевского) мы найдём ключ к другому частному случаю, что наводит на мысль, что различные реализации этой задачи лежат в континууме моделей геометрий с меняющейся кривизной. Этот более широкий геометрический подход приводит ко многим красивым обобщающим идеям и полностью решает исходную задачу единым методом. В конце статьи мы приводим ещё одно очень простое решение, основанное на преобразованиях плоскости, — оно, по нашему мнению, очень удачно завершает затронутую тему, поскольку каждое такое преобразование плоскости можно рассматривать просто как изменение точки зрения на рассматриваемый предмет. Предшествующие рассмотрения углубляют наше понимание открывшейся перспективы и позволяют описать нужные нам преобразования чисто геометрически.

Для читателя, незнакомого с классическими неевклидовыми геометриями, в которых по-новому истолковываются понятия *прямая* и *расстояние*, мы приводим соответствующий обзор, почти полностью замкнутый логически. Читателю, с этими геометриями знакомому, предлагается посмотреть на них по-новому: мы уверены, что его ждут неожиданные открытия.

ТРИ ЗАДАЧИ

Рассмотрим три окружности на плоскости, пересекающиеся трансверсально (т. е. без касания) в одной и той же точке P (рис. 1). Чему равна сумма углов треугольника ABC , образованного дугами окружностей? Ответ: 180° ! (Почему? — постарайтесь понять это, просто глядя на картинку.)

Теперь рассмотрим три окружности с коллинеарными центрами (рис. 2). Получилось два (очевидно, конгруэнтных) криволинейных треугольника. Что можно сказать о сумме углов в этом случае? Ответ: на этот раз сумма меньше 180° !

Наконец, рассмотрим три окружности, пересекающиеся как на диаграмме Венна общего вида (рис. 3). Граница пересечения всех трёх кругов — выпуклый криволинейный треугольник; сумма его углов больше 180° , поскольку прямолинейный треугольник с теми же вершинами лежит внутри него. Что можно сказать об остальных шести криволинейных треугольниках, образованных этими окружностями? Ответ: как может догадаться читатель, хотя это совсем не очевидно из диаграммы, такая сумма всегда больше 180° !

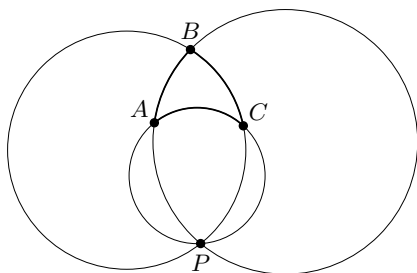


Рис. 1. Три окружности, проходящие через общую точку

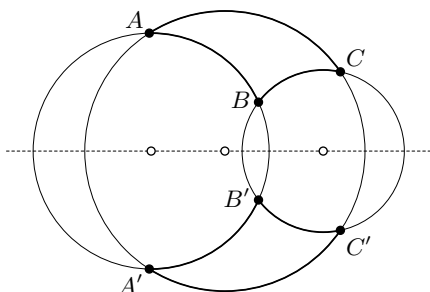


Рис. 2. Три окружности с коллинеарными центрами

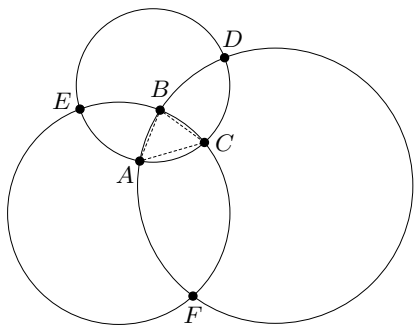


Рис. 3. Три окружности на диаграмме Венна

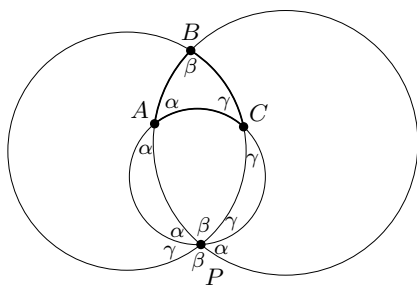


Рис. 4. Элементарное решение первой задачи

Первая из перечисленных задач допускает элементарное решение. Рассмотрим треугольник ABC на рис. 4. Заметим, что по соображениям симметрии все углы, обозначенные буквой α , равны между собой, и то же верно для углов, обозначенных через β и γ . Поэтому $2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$, откуда $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Вторая задача также допускает простое решение, хотя и требующее более продвинутой геометрической идеи. А именно, полуплоскость, лежащая над линией трёх центров, может рассматриваться как верхняя полуплоскость гиперболической геометрии. Полуокружности с центрами на её границе — это (гиперболические) прямые, (гиперболические) углы между которыми совпадают с евклидовыми углами между полуокружностями; а сумма углов любого гиперболического треугольника меньше 180° .

В третьей задаче мы также покажем, что окружности являются *прямыми* в модели некоторой геометрии, на этот раз сферической, в которой сумма углов любого треугольника больше 180° . В общем случае мы рассмотрим произвольную конфигурацию трёх попарно пересекающихся окружностей и дадим простой критерий для выбора геометрии, которой эта конфигурация соответствует.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Ключ к выбору геометрии, описывающей конфигурацию окружностей, — расположение точки пересечения прямых, соединяющих точки попарного пересечения окружностей. А именно, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА. Пусть c_1 , c_2 и c_3 — три окружности на плоскости, причём каждая пара окружностей пересекается в двух различных точках. Пусть l_{12} , l_{13} и l_{23} — прямые, заданные этими попарными пересечениями. Тогда прямые $\{l_{ij}\}$ либо конкурентны в точке P (т. е. все пересекаются в этой точке), либо параллельны (в последнем случае мы считаем их конкурентными на бесконечности). При этом есть ровно три возможности расположения точки конкурентности P по отношению к окружностям:

- 1) P лежит на всех трёх окружностях (рис. 5а);
- 2) P лежит вне всех трёх окружностей (рис. 5б), возможно на бесконечности;
- 3) P лежит внутри всех трёх окружностей (рис. 5в).

При этом если точка P лежит вне всех трёх окружностей, но не на бесконечности, то касательные из P к каждой окружности имеют равную длину. Окружность с центром P и радиусом этой общей длины перпендикулярна ко всем трём исходным окружностям. Если же P лежит

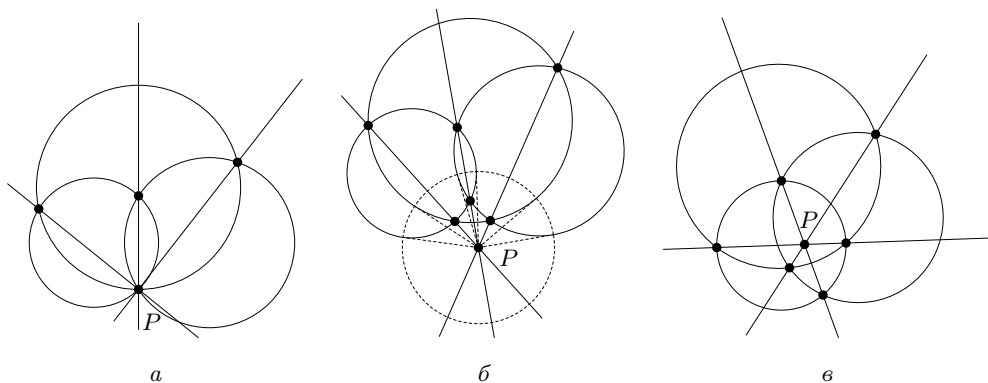


Рис. 5. Три возможности расположения точки P

на бесконечности, то эту роль играет прямая, проходящая через центры всех трёх окружностей (см. рис. 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть прямая, проходящая через P , пересекает некоторую окружность s в точках A и B (не обязательно различных). *Степенью точки P относительно окружности s* называется взятое со знаком произведение $(PA) \cdot (PB)$, где (PA) обозначает направленное расстояние от P до A . Предлагаем читателю доказать, используя подобие треугольников, что степень точки не зависит от выбора прямой. (Доказательство можно найти в книге Коксетера и Грейтцера [3, теорема 2.11].)

Степень точки P относительно s положительна, если P лежит вне s , отрицательна, если P лежит внутри s , и равна 0, если P лежит на s . Рассматривая PA и PB как векторы, можно равносильно определить степень как скалярное произведение $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$; поскольку векторы лежат на одной прямой, косинус угла между ними равен ± 1 в зависимости от того, одинаково их направление или противоположно.

Если две окружности пересекаются в точках A и B , мы получаем (рассматривая, например, прямую \vec{PA}), что степень точки P относительно обеих окружностей одинакова в точности тогда, когда точка лежит на прямой \vec{AB} . Пусть прямые l_{12} и l_{23} не параллельны, и пусть P — точка их пересечения. Тогда степень точки P относительно всех трёх окружностей одинакова; следовательно, P лежит на l_{13} и все три прямые конкурентны. Если же, с другой стороны, две прямые параллельны, то параллельны и все три, что доказывается от противного.

Если прямые пересекаются, тогда, как мы уже отметили, степень точки P относительно всех трёх окружностей одинакова. Обозначая эту общую степень через \mathcal{P} , получаем:

Случай 1. Если $\mathcal{P} = 0$, то P лежит на всех трёх окружностях.

Случай 2. Если $\mathcal{P} > 0$, то P лежит вне всех трёх окружностей.

Случай 3. Если $\mathcal{P} < 0$, то P лежит внутри всех трёх окружностей.

При этом если P лежит вне окружностей, то длина касательной из P к любой из них равна $\sqrt{\mathcal{P}}$. Окружность с центром P и радиусом $\sqrt{\mathcal{P}}$ ортогональна всем трём исходным окружностям. \square

Отклоняясь от нашей темы, интересно отметить, что для произвольной пары окружностей, не обязательно пересекающихся, точка имеет одинаковую степень относительно обеих в точности тогда, когда она лежит на специальной прямой, которая называется их *радикальной осью* и ортогональна отрезку, соединяющему их центры. Выписывая уравнение этой прямой в декартовых координатах, Коксетер и Грейтцер [3, § 2.2] доказывают красивый факт: *если уравнение окружности приведено к стандартному виду*

$$F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

то степень любой точки (x, y) относительно этой окружности равна в точности $F(x, y)$! Этот результат нельзя считать неожиданным, поскольку степень постоянна на окружностях, концентричных с данной.

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему. Под *треугольником* мы будем понимать криволинейный треугольник, внутри которого не проходит дуга никакой из трёх данных окружностей. В случае 1 рассматриваются лишь треугольники, для которых P не является вершиной.

ТЕОРЕМА. Пусть c_1, c_2 и c_3 — три окружности на плоскости, каждая пара которых пересекается в двух различных точках, а l_{12}, l_{13} и l_{23} — прямые, попарно соединяющие эти точки пересечения и конкурентные в точке P . Тогда сумма углов любого треугольника, образованного этими окружностями, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если P лежит на всех трёх окружностях, то сумма равна 180° ;
- 2) если P лежит вне всех трёх окружностей, то сумма меньше 180° ;
- 3) если P лежит внутри всех трёх окружностей, то сумма больше 180° .

Для доказательства теоремы требуются некоторые сведения о классических неевклидовых геометриях, к которым мы теперь и обратимся.

ПРОГУЛКА ПО ТРЁМ ГЕОМЕТРИЯМ

Геометрия — это абстрактная математическая теория, в которой неопределяемые понятия *точки* и *прямые* обладают определёнными свойствами. (Книга [5] даёт живое представление об историческом развитии классических геометрий. Другой весьма содержательный источник — книга [7].)

На практике мы делаем геометрию наглядной, работая с моделью, описанной более конкретно. В этой модели геометрические объекты представляют точки и прямые таким образом, что выполняются аксиомы рассматриваемой геометрии.

Декартова плоскость, состоящая из пар вещественных чисел, служит моделью евклидовой геометрии. Каждая пара чисел представляет точку, а прямые — это множества решений линейных уравнений. Декартова плоскость и её физические модели (например, поверхность стола), в которых расстояние между параллельными прямыми постоянно, а угол между ними и общей секущей одинаков, традиционно считаются *неискривлёнными*, в противовес сфере и другим *искривлённым* поверхностям. Поэтому мы говорим, что декартова плоскость имеет *нулевую кривизну*.

Сферическая геометрия. Любая поверхность, на которой введена функция расстояния, или *метрика*, является моделью некоторой геометрии. (Эти понятия обобщаются и на высшие размерности.) Прямые на такой поверхности, так называемые *геодезические*, — это кривые, наискратчайшие локально (т. е. для пар близко расположенных точек).

Сфера с унаследованной от трёхмерного евклидова пространства метрикой — это модель, в которой прямые — *большие окружности*, отсекаемые плоскостями, проходящими через центр сферы. Слово *локально* в определении геодезической существенно; кратчайший путь выбирается между близкими точками.

Геодезичность больших кругов становится интуитивно ясной, если заметить, что длина дуги пропорциональна центральному углу, который она стягивает, а для центральных углов выполняется своего рода неравенство треугольника: когда пересекаются три плоскости, то сумма любых двух образовавшихся двугранных углов больше третьего. Поэтому путь, составленный из очень малых (можно считать, *бесконечно малых*) дуг, будет самым коротким, если все они лежат в одной плоскости, проходящей через центр.

Геодезичность больших кругов сферы можно объяснить и совсем наглядно, вовлекая в рассмотрение тот факт, что через любые две достаточно близкие точки на сфере проходит *единственная* геодезическая. Действительно, проведём через две произвольные близкие точки A и B большую окружность c и предположим, что на сфере найдётся более короткий, чем дуга $\smile AB$, путь γ с концами A и B . Отразив кривую γ относительно плоскости окружности c , получим на сфере новую кривую γ' той же длины, что и γ . Поэтому из A в B будет вести не одна, а по крайней мере две геодезических — первая вдоль дуги γ , а вторая вдоль дуги γ' , что противоречит единственности геодезической на сфере. Следовательно,

кривые γ и γ' должны совпадать и, тем самым, лежать не только на сфере, но и в плоскости окружности \mathbf{c} , а значит, и на самой окружности \mathbf{c} , сливаясь с дугой $\smile AB$.

Совсем же строгое доказательство, основанное на предыдущих рассуждениях, требует интегрирования и других элементов анализа. (Общедоступным введением в применение анализа к геометрии может служить книга [6].)

Исключительную важность для нас имеет сумма углов сферического (геодезического) треугольника. Углы удобнее вычислять, измеряя их в радианах, что мы в дальнейшем и будем делать. Приглашаем читателя убедиться экспериментально, что сумма углов сферического треугольника всегда превышает π и убывает вместе с площадью треугольника, приближаясь, но не достигая π , когда эта площадь стремится к нулю (и приближаясь, но не достигая 5π , когда треугольник заполняет почти всю сферу). Это наблюдение подсказывает, что надо сосредоточить внимание на разности между суммой углов сферического треугольника и π , которая носит название *углового эксцесса*. Докажем положительность эксцесса треугольника, подробнее исследовав его связь с площадью.

Нам при этом помогут следующие факты. Во-первых, заметим, что угловой эксцесс *аддитивен*: если разбить треугольник на два меньших, то, как нетрудно проверить, эксцессы частей в сумме дают эксцесс исходного треугольника. Во-вторых, *конгруэнтные треугольники заведомо имеют одинаковый эксцесс*. Но эти два факта — важнейшие свойства площади: площади частей некоторой фигуры в сумме дают площадь всей фигуры, а конгруэнтные фигуры имеют равную площадь!

Далее, сфера, подобно плоскости, *однородна*: любой треугольник можно переместить посредством вращений и отражений сферы в любую другую позицию как твёрдое тело, т. е. без изменения расстояний и углов (а также площади). В совокупности все эти факты подсказывают, что угловой эксцесс равен площади, умноженной на постоянный коэффициент.

Чтобы доказать, что угловой эксцесс пропорционален площади, заметим, что угол между двумя большими окружностями пропорционален площади сектора между ними. (Здесь существенна однородность сферы!) На сфере радиуса R площадь сектора с углом α равна

$$\frac{\alpha}{\pi}(4\pi R^2) = 4R^2\alpha$$

(рис. 6а; для простоты мы одинаково обозначаем угол и его величину). Пусть Δ обозначает площадь треугольника с углами α , β и γ . Секторы с углами α , β и γ покрывают сферу с избытком; исходный треугольник и его антипод покрыты по три раза, а остальная часть сферы — ровно

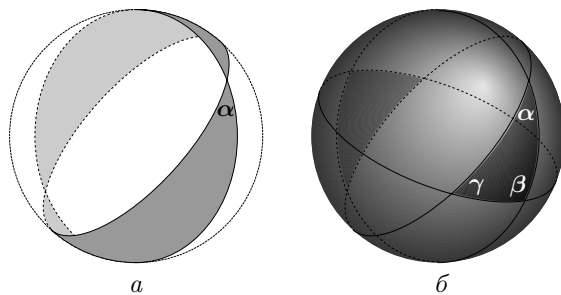


Рис. 6. Сектор, отсечённый сферическим углом, и угловой эксцесс треугольника

один раз (рис. 6 б) Отсюда несложными выкладками получаем формулу

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\Delta}{R^2}.$$

В частности, на сфере радиуса $R = 1$ угловой эксцесс треугольника в точности равен его площади.

Гиперболическая геометрия. Сфера является поверхностью *постоянной положительной кривизны*. Существуют также поверхности постоянной *отрицательной кривизны*. Чтобы понять, как их можно описать, рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Когда константа R^2 возрастает до $+\infty$, кривизна сферы с таким уравнением уменьшается до нуля. Можно считать евклидову плоскость сферой бесконечного радиуса. Что произойдёт, когда константа R^2 появится с другого, отрицательного конца числовой прямой?

Поверхность с уравнением вида $x^2 + y^2 + z^2 = -R^2 = (iR)^2$, которая формально является «сферой мнимого радиуса», далее называется *псевдосферой*. Разумеется, у этого уравнения нет решений, пока мы не расширим область значений переменных с вещественных на комплексные числа, а «радиус» псевдосферы получит смысл, лишь если обобщить понятие расстояния так, чтобы оно допускало мнимые значения.

Расстояния и углы в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n измеряются посредством *скалярного произведения*. Это пример симметричной билинейной формы — понятия, важного для многих областей математики. Кроме того, скалярное произведение положительно определено: для любого вектора \mathbf{v} справедливо неравенство $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, причём $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ в точности тогда, когда $\mathbf{v} = 0$. Длина вектора \mathbf{v} обозначается $|\mathbf{v}|$ и равна $\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$, а угол θ между двумя векторами \mathbf{v} , \mathbf{w} выражается формулой:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}.$$

Если в качестве координат векторов допустить любые комплексные числа, скалярное произведение остаётся симметричной билинейной формой, но уже не положительно определённой. Форма с такими свойствами называется *псевдометрикой*. Эту форму мы и выберем для измерения расстояний и углов в комплексном пространстве \mathbb{C}^n , позволив этим величинам принимать комплексные значения.

Возвращаясь к уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = -R^2$ и желая найти соответствующую двумерную поверхность, рассмотрим лишь те решения (x, y, z) , в которых x и y вещественны. Оставшаяся переменная z тогда обязана быть чисто мнимой, так что положим $z = it$. Чтобы изобразить псевдосферу, начертим её образ в пространстве \mathbb{R}^3 при отображении $(x, y, it) \mapsto (x, y, t)$. Этот образ — двуполостный гиперболоид, множество решений уравнения $x^2 + y^2 - t^2 = -R^2$. Его компоненты аналогичны двум полусферам обычной сферы — северной и южной, — где начало координат $(0, 0, 0)$ можно считать центром, а точки $(0, 0, \pm R)$ — северным и южным полюсами сферы.

Чтобы измерять расстояния и углы, нужно помнить, что рассматриваемое пространство — образ подпространства из \mathbb{C}^3 , где расстояния и углы измеряются посредством стандартного скалярного произведения. Поскольку вектор (x, y, t) в действительности представляет вектор (x, y, it) , его настоящая длина равна $\sqrt{x^2 + y^2 + (it)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - t^2}$. Аналогично угол между двумя векторами (x_1, y_1, t_1) и (x_2, y_2, t_2) должен определяться формой $x_1x_2 + y_1y_2 - t_1t_2$. Это метрика Лоренца, трёхмерный вариант псевдометрики релятивистского пространства-времени. (Доступное и опирающееся на физику, но достаточно продвинутое введение в псевдометрики см. в книге [8].) Расстояния и углы, видимые на получившейся картине, отличаются от их истинных значений; например, истинная длина любого радиус-вектора, идущего от начала координат к поверхности, равна iR , т. е. мнимому числу!

Чтобы измерять расстояния и углы на самой псевдосфере, применим понятие псевдометрики к её *касательным векторам*. Для каждой точки P в пространстве \mathbb{R}^3 *касательное пространство в этой точке* — это экземпляр пространства \mathbb{R}^3 , все векторы которого исходят из P . Касательная плоскость к поверхности в этой точке — двумерное подпространство этого пространства; прямая, касательная к поверхности в точке P , — одномерное подпространство касательной плоскости.

Полезна (и соответствует интуиции) запись координат и других величин, связанных с касательными векторами, в виде *дифференциальных* выражений. Если f — вещественнозначная функция, то её *дифференциал* — это функция касательного вектора, которая в каждой точке P даёт наилучшее линейное приближение к изменению функции f при перемещении вдоль касательного вектора, исходящего из P .

В частности, декартовы координаты x , y и t в нашей модели можно рассматривать как функции от $P \in \mathbb{R}^3$; пусть dx , dy и dt соответственно обозначают значения дифференциалов этих функций. Тогда dx , dy и dt , соответственно, дают первую, вторую и третью координаты касательного вектора после параллельного переноса осей координат в точку P (см. рис. 7а). Отметим, что в данном случае линейные приближения dx , dy и dt оказываются точными, поскольку ортогональная проекция на прямую — линейное отображение. Поэтому (лоренцеву) длину касательного вектора удобно записать как дифференциальное выражение $\sqrt{dx^2 + dy^2 - dt^2}$.

Замечательно, что для векторов, касательных к псевдосфере, это дифференциальное выражение *вещественно и положительно определено*. Поскольку длина пути получается интегрированием длин его касательных векторов, пути между точками псевдосферы имеют вещественную, причём положительную, длину, и поэтому можно говорить о геодезических, т. е. о путях локально минимальной длины.

Чтобы убедиться, что $dx^2 + dy^2 - dt^2 > 0$, полезно использовать цилиндрические координаты. В качестве ортонормированного базиса касательного пространства к \mathbb{R}^3 в точке с цилиндрическими координатами (r, θ, t) возьмём единичный радиус-вектор, единичный вертикальный вектор и ортогональный им единичный вектор; в этом базисе координаты касательного вектора равны $dr, r d\theta, dt$. (Множитель r в угловой координате возникает потому, что перемещение по короткому пути вдоль окружности радиуса r меняет центральный угол на длину этого пути, умноженную на $1/r$, см. рис. 7б.) Выражение $dx^2 + dy^2$, т. е. квадрат длины горизонтальной компоненты вектора, равно $dr^2 + r^2 d\theta^2$. Для вектора, касательного к гиперболоиду, имеем $dt^2 < dr^2$, поскольку радиальный наклон гиперболоида меньше, чем у его асимптотического конуса. (На алгебраическом языке: из уравнения $r^2 - t^2 = -R^2$ следует, что $r^2 < t^2$; дифференцируя, получаем $dt^2 = \frac{r^2}{t^2} dr^2$.) Следовательно,

$$dx^2 + dy^2 - dt^2 = r^2 d\theta^2 + (dr^2 - dt^2) > 0.$$

Геодезическими при этом оказываются пересечения псевдосферы с плоскостями, проходящими через начало координат, как и на обычной сфере, хотя здесь в этом труднее убедиться, и мы не будем это доказывать. Псевдосфера тоже однородна, а сумма углов треугольника выражается вполне аналогичной формулой:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\Delta}{-R^2}.$$

Как следствие, эта сумма всегда меньше π . (В книге [2] подробно рассмотрена как сфера, так и псевдосфера, см. стр. 74–78.)

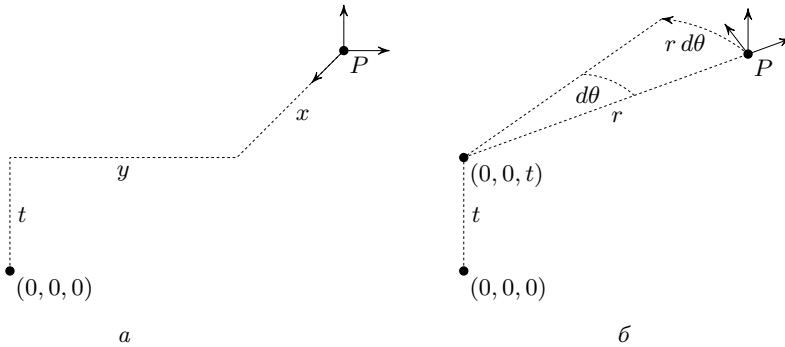


Рис. 7. Сравнение двух базисов касательного пространства в точке P

Каждая полусфера псевдосферы служит моделью геометрического объекта, который называется *гиперболической плоскостью*. В следующем разделе описано отображение псевдосферы в плоскость, которое сохраняет величины углов, давая нам полезную картинку. Аналогичное отображение существует и для обычной сферы. Отображение, сохраняющее углы, называется *конформным*.

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Конформное отображение обычной сферы на плоскость получается проектированием из произвольной точки сферы на плоскость, касательную к ней в противоположной точке. Любое такое отображение, а также обратное отображение плоскости на сферу, называется *стереографической проекцией*. Каждая окружность на сфере (а не только большие окружности) стереографически проектируется на окружность или прямую (последнюю можно считать окружностью, проходящей через бесконечно удалённую точку ∞) в этой плоскости. При этом она отображается в прямую в точности тогда, когда проходит через центр проектирования (который отображается в ∞). Обратное, любая прямая или окружность на плоскости является образом окружности на сфере (рис. 8).

Важное замечание. Центр окружности на плоскости в общем случае является не проекцией центра соответствующей окружности на сфере, а проекцией *вершины конуса*, касательного к сфере в точках этой окружности.

Указанные важные свойства стереографической проекции могут быть доказаны с использованием элементарной геометрии. (Соответствующие рассуждения проведены и удачно проиллюстрированы в классической книге [1, стр. 248–251].)

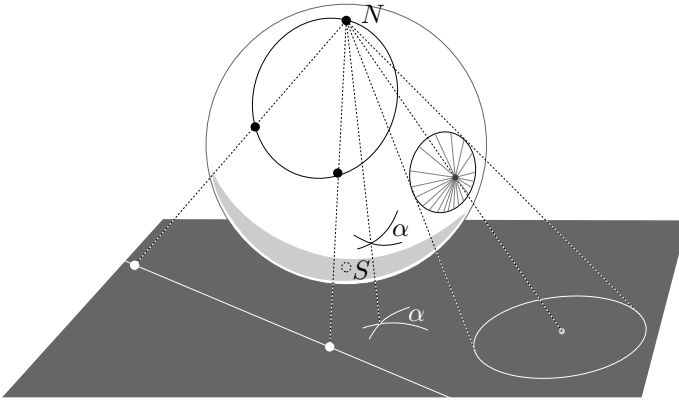


Рис. 8. Стереографическая проекция сохраняет углы и переводит окружности в окружности или прямые

Чтобы убедиться, что стереографическая проекция конформна, рассмотрим рис. 9а, где показано сечение сферы плоскостью, проходящей через центр проектирования N , противоположную ему точку S и ещё одну точку P на сфере; $\pi(P)$ — проекция точки P , а A — точка, в которой сечение плоскости, касательной к сфере в точке P , пересекает плоскость, касательную в точке S . Соответствующая трёхмерная конфигурация изображена на рис. 10. Рассмотрим угол с вершиной P , касательный к сфере (он обозначен стрелками). Поскольку $\angle \pi(P)PA = \angle P\pi(P)A$, образ этого угла при проекции — его отражение относительно плоскости Π , проходящей через A и перпендикулярной к прямой $\overrightarrow{NP\pi(P)}$. Ясно, что эти углы равны.

На рис. 9б показано локальное поведение стереографической проекции. Если Q — близлежащая точка на касательной плоскости через P , то $\triangle NQP$

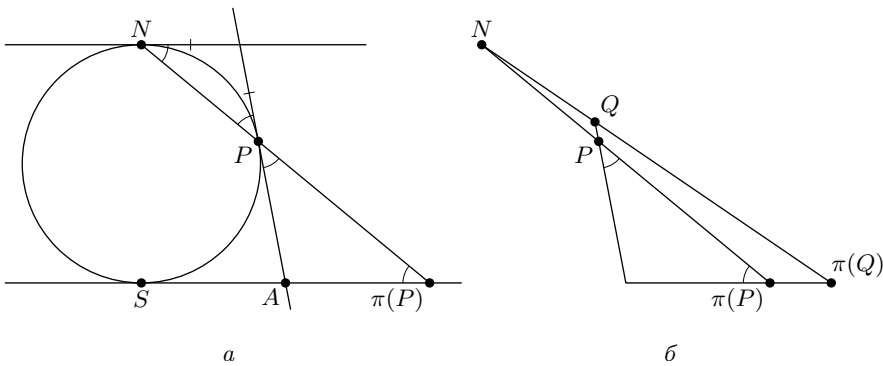


Рис. 9. Стереографическая проекция конформна и локально аппроксимируется растяжением

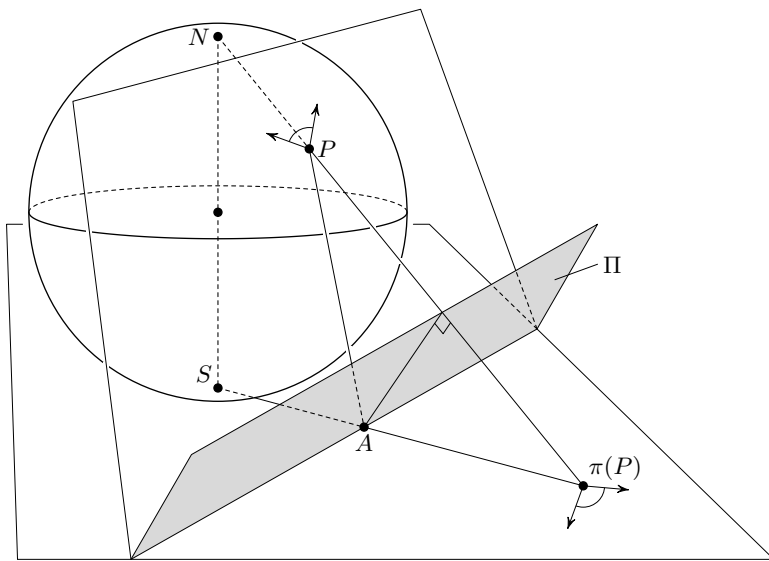


Рис. 10. Трёхмерное изображение: плоскости, касательные в точках P и S , являются отражениями друг друга относительно плоскости Π , перпендикулярной прямой, проходящей через точки N , P и $\pi(P)$

приблизительно подобен $\triangle N\pi(P)\pi(Q)$. Следовательно, стереографическая проекция линейно аппроксимируется в каждой точке P гомотетией (растяжением). Коэффициент гомотетии меняется с широтой точки P , неограниченно возрастаая при приближении P к N и достигая минимального значения 1 в точке S .

Чтобы получить теперь стереографическую проекцию псевдосферы на плоскость, надо спроектировать каждую точку гиперboloида на горизонтальную плоскость, проходящую через южный полюс $(0, 0, -R)$, т. е. на плоскость $t = -R$, вдоль прямой, соединяющей его с северным полюсом $(0, 0, R)$ (рис. 11). Эта проекция отображает южную полусферу на внутренность круга радиуса $2R$ с центром в начале координат, а северная полусфера, за исключением северного полюса, отображается на внешность круга. Внутренность круга реализует модель Пуанкаре в круге для гиперболической плоскости, а её граница называется бесконечно удалённой окружностью. Можно показать, что каждая геодезическая отображается на окружность или прямую, ортогональную бесконечно удалённой окружности (за вычетом точек пересечения); геодезические, проходящие через полюса, переходят в прямые.

Конформность проектирования гиперboloида нельзя доказать элементарными геометрическими рассуждениями, поскольку углы на гиперboloиде

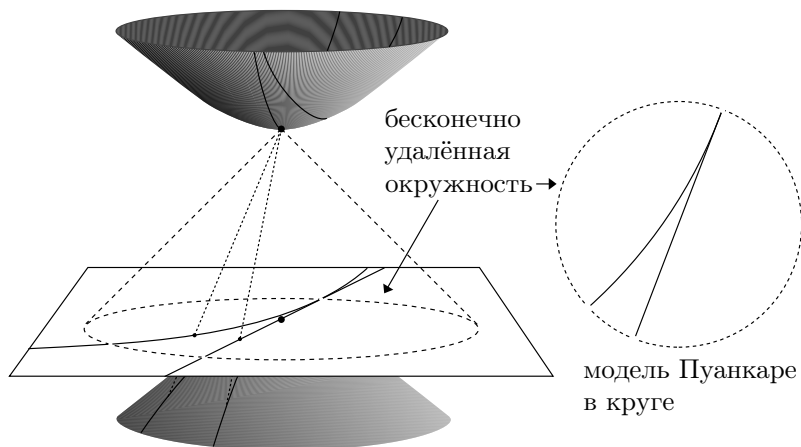


Рис. 11. Проекция на плоскость модели псевдосферы на гиперboloиде

иде измеряются иначе, чем на плоскости (с помощью другой билинейной формы). Поэтому, чтобы доказать сохранение величины углов, нужно прибегнуть к вычислениям и сравнить углы между касательными к кривым до и после проектирования. Читатель, склонный поверить нам и избежать технических подробностей, может пропустить последующую выкладку без всякой потери связности изложения. Для тех же, кто решится вникнуть в детали, приводимое ниже доказательство может послужить хорошим примером применения методов анализа в геометрии.

Доказательство конформности модели Пуанкаре в круге. Сосредоточим наше внимание на южной полусфере; доказательство для северной полусферы аналогично. Пусть π обозначает проектирование, распространённое на область $t < R$ и рассматриваемое как отображение на \mathbb{R}^2 , без учёта последней координаты образа $(-R)$. Предположим, что кривые α и β пересекаются в точке $P = (x, y, t)$. Производная $D\pi(P)$ от π в точке P переводит векторы, касательные к α и β в этой точке, в векторы, касательные к их образам в точке $\pi(P)$ (согласно правилу дифференцирования сложной функции).

Пусть $\langle \mathbf{v}_P, \mathbf{w}_P \rangle_L$ — лоренцево произведение касательных векторов \mathbf{v}_P и \mathbf{w}_P в точке P . Докажем, что если \mathbf{v}_P и \mathbf{w}_P — касательные векторы к гиперboloиду, то

$$D\pi(P)(\mathbf{v}_P) \cdot D\pi(P)(\mathbf{w}_P) = \frac{4R^2}{(R-t)^2} \langle \mathbf{v}_P, \mathbf{w}_P \rangle_L.$$

Иными словами, скалярное произведение образов отличается лишь постоянным множителем от лоренцева произведения прообразов. Отсюда следует,

что угол θ между \mathbf{v}_P и \mathbf{w}_P , задаваемый формулой

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{v}_P, \mathbf{w}_P \rangle_L}{\langle \mathbf{v}_P, \mathbf{v}_P \rangle_L^{1/2} \langle \mathbf{w}_P, \mathbf{w}_P \rangle_L^{1/2}},$$

равен углу ϕ между $D\pi(P)(\mathbf{v}_P)$ и $D\pi(P)(\mathbf{w}_P)$, для которого

$$\cos \phi = \frac{D\pi(P)(\mathbf{v}_P) \cdot D\pi(P)(\mathbf{w}_P)}{(D\pi(P)(\mathbf{v}_P) \cdot D\pi(P)(\mathbf{v}_P))^{1/2} (D\pi(P)(\mathbf{w}_P) \cdot D\pi(P)(\mathbf{w}_P))^{1/2}},$$

поскольку коэффициент пропорциональности в числителе и знаменателе этой дроби сокращается. В противоположность случаю сферы, здесь коэффициент пропорциональности *убывает* при удалении P от S (поскольку t убывает), принимая *максимальное* значение 1 в точке S .

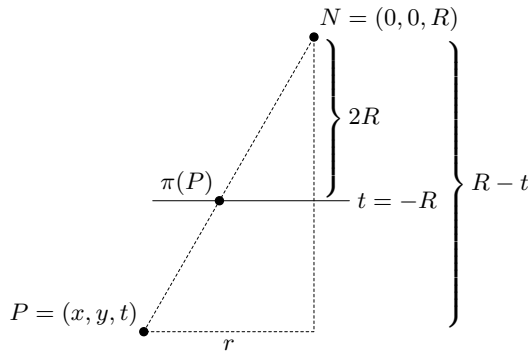


Рис. 12. Действие проектирования π на радиальную координату

Рассматривая подобные треугольники на рис. 12, мы видим, что образ точки P с цилиндрическими координатами (r, θ, t) при проектировании π — точка с полярными координатами $\left(\frac{2Rr}{R-t}, \theta\right)$. Производная в точке P от преобразования декартовых координат в цилиндрические переводит тройку $(dr, r d\theta, dt)$ в тройку $(dr, d\theta, dt)$. Если $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает отображение $(r, \theta, t) \mapsto \left(\frac{2Rr}{R-t}, \theta\right)$, то его производная в точке (r, θ, t) есть

$$D\phi(r, \theta, t) = \begin{pmatrix} \frac{2R}{R-t} & 0 & \frac{2Rr}{(R-t)^2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применив $D\phi(r, \theta, t)$ к тройке $(dr, d\theta, dt)$ и вычислив затем производную в точке $\phi(r, \theta, t) = \left(\frac{2Rr}{R-t}, \theta\right)$ от обратного преобразования полярных координат в декартовы, получаем (опять же по правилу дифференцирования

сложной функции):

$$D\pi(P)(dr, r d\theta, dt) = \frac{2R}{R-t} \left(dr + \frac{r dt}{R-t}, r d\theta \right).$$

Для любой точки P на гиперboloиде имеем $r^2 - t^2 = -R^2$, поэтому для любого вектора, касательного к гиперboloиду в точке P , выполняется равенство $dt = \frac{r}{t} dr$. После некоторых упрощений, использующих эти подстановки, получаем:

$$D\pi(P) \left(dr, r d\theta, \frac{r}{t} dr \right) = \frac{2R}{R-t} \left(-\frac{R}{t} dr, r d\theta \right).$$

Теперь читатель может проверить, что для двух касательных векторов в точке P выполняется искомое равенство:

$$D\pi(P)(\mathbf{v}_P) \cdot D\pi(P)(\mathbf{w}_P) = \frac{4R^2}{(R-t)^2} \langle \mathbf{v}_P, \mathbf{w}_P \rangle_L.$$

Последовательности стереографических проекций. Стереографическая проекция — незаменимое орудие преобразования геометрических моделей с сохранением углов между геодезическими. В частности, она даёт нам модель Пуанкаре гиперболической геометрии на полуплоскости.

Для этого сначала стереографически спроектируем круг Пуанкаре радиуса 2 на полусферу единичной сферы (а его дополнение, включая бесконечно удалённую точку, на другую полусферу) — с центром проекции в северном полюсе N . Затем стереографически спроектируем сферу на любую вертикальную плоскость, касающуюся экватора, — с расположенным на сфере в противоположной точке к точке касания центром проекции. Образ бесконечно удалённой окружности круга Пуанкаре при такой последовательности проекций называется *бесконечно удалённой прямой*. Каждая полуплоскость является образом гиперболической плоскости (рис. 13).

Применив две стереографических проекции из разных точек, мы получаем также конформное отображение евклидовой плоскости, в котором образы геодезических — прямые или окружности (рис. 14).

В итоге у нас теперь есть отображения плоскости, сферы и псевдосферы, при которых геодезические представлены прямыми и окружностями. Так же как географическую карту нужно исказить, чтобы напечатать её на плоских страницах атласа, наши отображения искажают действительные положения точек в изображаемых геометрических объектах. Искусство построения отображений вращается вокруг выбора проекции с подходящим типом искажения, который позволяет использовать отображение для намеченной цели. Например, известная меркаторская проекция земной

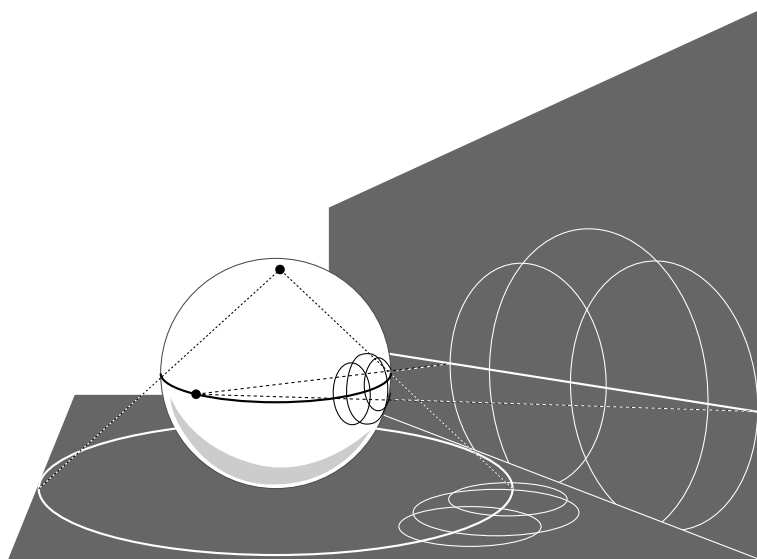


Рис. 13. Конформные преобразования между кругом Пуанкаре, полусферой и моделью Пуанкаре гиперболической геометрии на полуплоскости

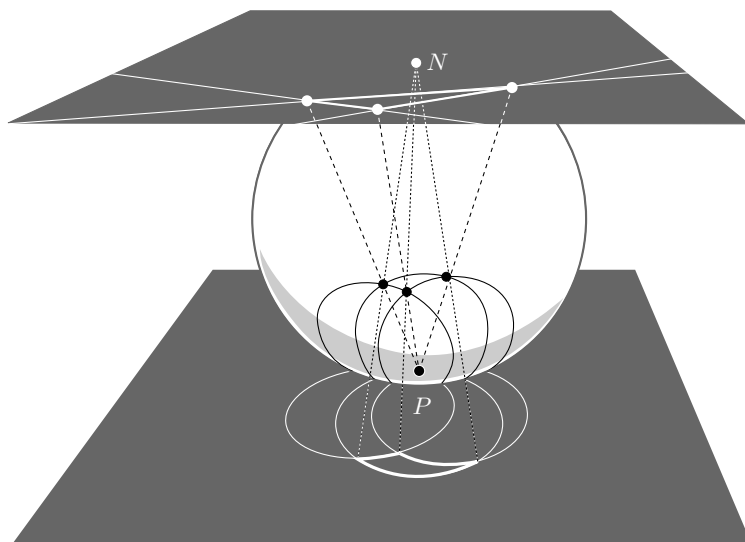


Рис. 14. Евклидова геометрия на сфере

поверхности полезна при навигации, поскольку она даёт правильный компасный пеленг между любыми двумя точками. (Мак-Клири [6, ch. 8^{bis}] даёт удачный обзор проекций для географических карт.) Поскольку нас интересует измерение углов, мы сосредоточились на конформных отобра-

жениях, сохраняющих углы между гладкими кривыми. Возникает вопрос: как узнать, имея тройку попарно пересекающихся окружностей, какое отображение мы видим? И вообще, могут ли все три окружности возникать в качестве геодезических в одной и той же модели?

КАК УЗНАТЬ, КАКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ВЫ ВИДИТЕ:
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Случай 1: P лежит на всех трёх окружностях. В этом случае рассмотрим сферу, южным полюсом которой является точка P , и две плоскости, касательные к сфере в её южном и северном полюсах. Образы наших трёх окружностей на сфере — это окружности, проходящие через южный полюс. Если снова спроектировать, на этот раз из южного полюса сферы на вторую плоскость, то эти окружности перейдут в прямые линии, как на рис. 14. Таким образом, c_1 , c_2 и c_3 — геодезические в конформной плоской модели евклидовой геометрии, и сумма углов образованного ими треугольника равна 180° .

Случай 2: P лежит вне всех трёх окружностей. В частном случае, когда прямые, соединяющие точки попарного пересечения окружностей, параллельны, их центры коллинеарны, что было доказано в первом разделе; поэтому будем считать, что существует точка конкурентности P этих прямых, лежащая вне всех трёх окружностей. В этом случае лемма обеспечивает существование окружности d , ортогональной всем трём окружностям. Тогда все дуги наших окружностей, лежащие целиком внутри или вне окружности d , — геодезические в круговой модели Пуанкаре гиперболической плоскости, и потому сумма углов любого образованного ими треугольника меньше 180° .

Случай 3: P лежит внутри всех трёх кругов. Рассмотрим семейство сфер (переменного размера), касающихся данной плоскости в точке P , которая является для них южным полюсом. Посмотрим, как площадь стереографической проекции круга с границей c_1 на каждую из этих сфер соотносится с площадью всей поверхности сферы: если сфера очень мала, проекция по площади больше половины сферы (действительно, она будет включать всю южную полусферу); если же сфера очень велика, проекция будет меньше половины всей поверхности. Всё зависит от того, лежит окружность c_1 внутри или же вне прообраза экватора на плоскости (рис. 15). Позволив сфере меняться непрерывно, мы видим, что существует единственная сфера \mathcal{S} , для которой площадь проекции в точности равна половине площади всей поверхности. (Другое рассуждение см. ниже в замечании 3.) Тогда образ окружности c_1 на сфере \mathcal{S} — большая окружность.

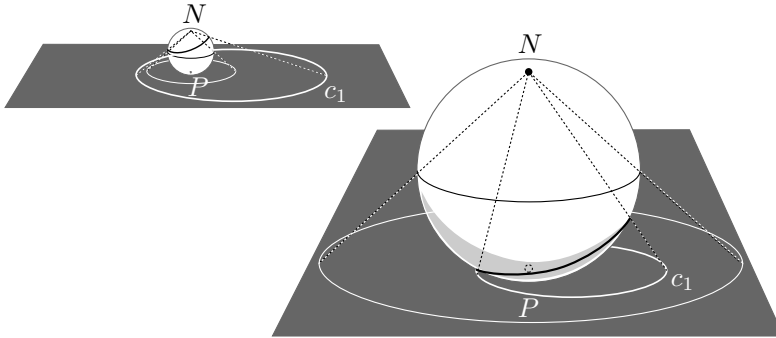


Рис. 15. Семейство сфер, касательных к плоскости в точке P

Мы утверждаем, что образы окружностей c_2 и c_3 на сфере \mathcal{S} — тоже большие окружности. Достаточно доказать это для c_2 , поскольку то же рассуждение годится и для c_3 . Заметим, что образ прямой l_{12} при стереографической проекции — это *меридиан*, т. е. большая окружность, проходящая через северный и южный полюсы сферы. Поскольку образ окружности c_1 — тоже большая окружность, образы точек пересечения c_1 с l_{12} противоположны на сфере (антиподальны). А так как две точки пересечения $c_1 \cap l_{12}$ лежат также и на окружности c_2 , образ этой окружности — большая окружность (рис. 16).

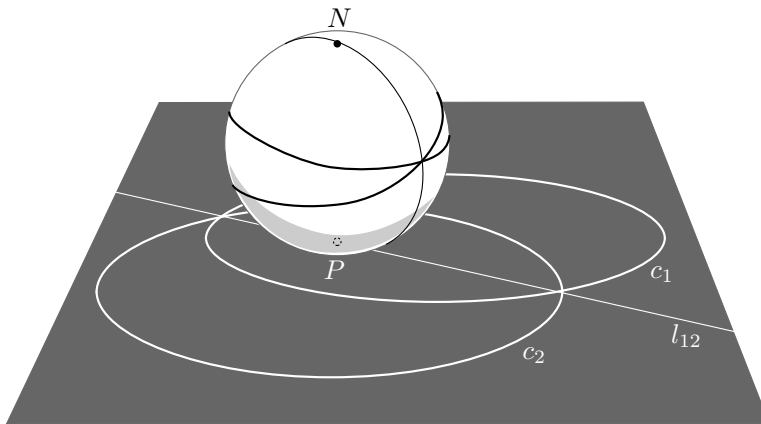


Рис. 16. Образы окружностей на сфере \mathcal{S} — большие окружности

Итак, мы показали, что образы всех трёх окружностей на сфере \mathcal{S} — большие окружности, т. е. геодезические. Таким образом, c_1 , c_2 и c_3 — геодезические в конформной плоской модели сферической геометрии, следовательно, сумма углов любого образованного ими треугольника больше 180° . \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Тот факт, что евклидова геометрия возникает лишь в случае, когда точка P лежит в точности на всех трёх окружностях, наглядно показывает, что наша привычная «плоская» геометрия — всего лишь одна точка в спектре геометрий (различной кривизны).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя последовательность стереографических проекций, описанную в предыдущем разделе, можно преобразовать общую картину случая 2 в изображение на верхней полуплоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Хотя в случае 3 авторам нравится рассуждение с непрерывностью, от неё можно избавиться следующим образом. Пусть $s = \sqrt{-\mathcal{P}}$ (напомним, что \mathcal{P} — степень точки P относительно каждой из трёх окружностей). Мы утверждаем тогда, что сфера \mathcal{S} в проведённом выше доказательстве имеет радиус $s/2$. Чтобы показать это, рассмотрим для каждой из окружностей c_1, c_2 и c_3 проходящую через точку P хорду, перпендикулярную проходящему через P диаметру. Каждая такая хорда имеет длину $2s$, причём P — её середина. Проведём окружность e с центром P и радиусом s . Эта окружность при стереографической проекции переходит в экватор сферы \mathcal{S} , а окружности c_1, c_2 и c_3 , каждая из которых пересекает окружность e в её диаметрально противоположных точках, обязаны, в силу этой причины, спроектироваться в большие окружности на сфере \mathcal{S} .

Это альтернативное рассуждение подчёркивает параллельность случаев 2 и 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема остаётся верной, если *окружность* понимается в широком смысле, т. е. допускается и прямая.

Приглашаем читателя обобщить теорему на предельные случаи, когда две или более окружностей взаимно касаются. Возможные конфигурации продемонстрированы на рис. 17. Случай I — евклидов. Одна вершина треугольника отправлена на бесконечность отображением, переводящим

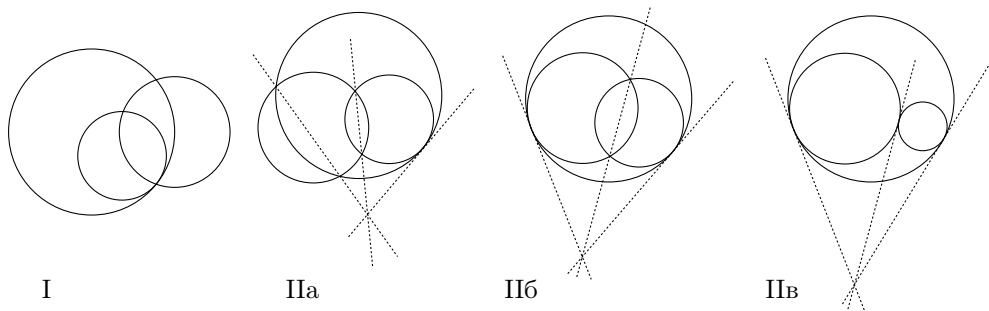


Рис. 17. Случаи касания двух окружностей

окружности в прямые линии; поэтому две стороны треугольника становятся параллельными прямыми. В случае II все варианты — гиперболические, одна или больше вершин треугольника лежат на бесконечно удалённой окружности (или прямой). (Вопрос: *чему равен угол, вершина которого лежит на бесконечно удалённой окружности?*) Отметим, что среди предельных случаев нет сферических.

ИЗМЕНЕНИЕ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ: ПОДХОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Мы признательны Киту Бёрнсу, указавшему на следующую весьма изящную формулировку и доказательство основной теоремы. Его доказательство использует группу преобразований Мёбиуса пополненной комплексной плоскости (т. е. плоскости, рассматриваемой как поле комплексных чисел с добавлением бесконечно удалённой точки). Преобразования Мёбиуса обратимы, непрерывны в обе стороны, конформны и переводят окружности в широком смысле (включая прямые) в окружности. Далее, если даны две упорядоченные тройки точек, то существует (единственное) преобразование Мёбиуса, переводящее каждую точку первой тройки в соответствующую точку второй. (В прекрасной, очень понятно написанной книге о геометрии с клейновской точки зрения [4] подробно изучается группа Мёбиуса и её геометрические свойства, см. гл. 5.)

В частности, и это всё, что нам потребуется, найдётся преобразование Мёбиуса, переводящее любую заданную точку в бесконечно удалённую. Как мы уже видели, преобразование с нужными свойствами можно построить как композицию двух стереографических проекций.

Рассмотрим криволинейный треугольник ABC , образованный тремя окружностями c_1 , c_2 и c_3 . Без потери общности можно считать, что точка A лежит на c_1 и c_2 , и пусть A' — вторая точка пересечения этих окружностей. Тогда возможны три расположения точек A и A' относительно третьей окружности c_3 , которые соответствуют трём случаям в лемме и теореме:

- A' лежит на c_3 ;
- A' и A лежат по разные стороны от c_3 ;
- A' и A лежат по одну сторону от c_3 .

Простым изменением точки зрения, а именно, поместив A' в бесконечность, мы получаем возможность наглядно сопоставить сумму углов треугольника ABC с 180° . Хотя такой подход не выявляет соответствующую глобальную геометрию, в которой окружности являются геодезическими, он обладает преимуществом замечательной простоты и непосредственности.

ТЕОРЕМА (альтернативная формулировка). Пусть c_1 , c_2 и c_3 — три окружности на плоскости, причём каждые две пересекаются в двух различных точках. Тогда выполнено ровно одно из следующих трёх условий, которые определяют сумму углов любого треугольника, образованного тремя окружностями:

- 1) пересечение каждой пары окружностей содержит точку третьей окружности, и в этом случае сумма углов равна 180° ;
- 2) пересечение каждой пары окружностей лежит целиком внутри или вне третьей окружности, и в этом случае сумма углов меньше 180° ;
- 3) в пересечении каждой пары окружностей одна точка лежит внутри, а другая вне третьей окружности, и в этом случае сумма углов больше 180° .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A , B и C — вершины треугольника, образованного окружностями c_1 , c_2 и c_3 , причём $\{A, A'\} = c_1 \cap c_2$. Сумма углов треугольника не зависит от того, какую пару окружностей мы здесь

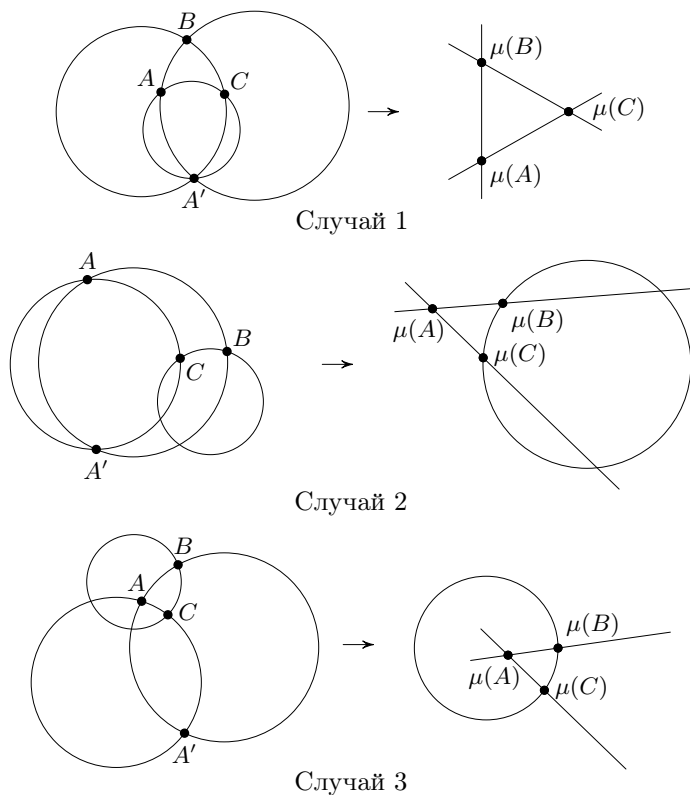


Рис. 18. Действие преобразования Мёбиуса μ , переводящего A' в ∞

рассматриваем, поэтому достаточно показать, что эта сумма определяется лишь расположением точек A и A' относительно окружности c_3 .

Применим преобразование Мёбиуса μ , переводящее A' в ∞ . При этом преобразовании окружности c_1 и c_2 , проходящие через A' , переходят в прямые.

Если A' лежит на c_3 , то эта окружность тоже переходит в прямую, поэтому сумма углов треугольника ABC равна 180° .

Если A и A' лежат по одну сторону от c_3 , то образ окружности c_3 — окружность, причём образ точки A лежит *вне* её, поскольку ∞ лежит вне её; следовательно, сумма углов образа треугольника ABC меньше 180° .

Наконец, если A и A' лежат по разные стороны от c_3 , то образ окружности c_3 — снова окружность, причём образ точки A лежит *внутри* неё; следовательно, сумма углов образа треугольника ABC больше 180° (рис. 18). \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все классические геометрии — евклидова, сферическая и гиперболическая — имеют множество конформных реализаций на плоскости, получаемых посредством стереографической проекции. Ознакомившись с этими реализациями, мы можем полностью классифицировать треугольники, стороны которых — отрезки или дуги окружностей, и в соответствии с этой классификацией оценить сумму их углов. Наконец, используя группу конформных преобразований пополненной плоскости, мы смогли усовершенствовать наше решение, сделав его очень простым, хотя и менее информативным. Наш успех указывает на важность изучения неевклидовых геометрий, а также групп преобразований.

БЛАГОДАРНОСТИ

Кроме Кйта Бёрнса, мы благодарим Дуэйна Бролайна, Лео Камерфорда, Боба Фута, Юрия Ионина и Розмари Шмальц за полезные комментарии. Мы хотели бы также поблагодарить нашего первого рецензента, сообщившего нам рассуждение, приведённое в замечании 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
- [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Том I. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. М.: Эдиториал УРСС, 1998.
- [3] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. Ижевск: РХД, 2002.

- [4] *Brannan D., Esplen M., Gray J.* Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [5] *Greenberg M. J.* Euclidean and non-Euclidean geometries. New York: Freeman, 1993.
- [6] *McCleary J.* Geometry from a differentiable viewpoint. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [7] *Moise E.* Elementary geometry from an advanced standpoint. MA: Addison-Wesley, Reading, 1990.
- [8] *O'Neill B.* Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity. New York: Academic Press, 1983. (Pure and Applied Math.; V.103).

Г. Гальперин, Восточно-Иллинойский университет, Чарлстон, США
ggalperin@eiu.edu

Ч. Делман, Восточно-Иллинойский университет, Чарлстон, США
cidelman@eiu.edu