Теорема Семереди — Троттера

Ф. К. Нилов, А. А. Полянский, Н. А. Полянский

§ 1. Введение

Пал Эрдёш любил ставить «детские» вопросы, которые скорее похожи на пазлы, чем на серьёзные исследовательские проблемы. Зачастую математики с азартом набрасывались на такие задачи, и нередко выяснялось, что у одной проблемы существует несколько решений, основанных на различных глубоких идеях. Ровно так и сложилось с теоремой Семереди — Троттера.

Однажды Эрдёш сформулировал следующую гипотезу. Любые n прямых и n точек на плоскости образуют не более $cn^{4/3}$ инциденций для некоторой не зависящей от n константы c. Мы говорим, что точка и прямая образуют *инциденцию*, если точка лежит на прямой. То есть гипотеза Эрдёша была более строгой, чем тривиальная оценка сверху n^2 на число инциденций. Объяснение, почему в показателе стоит $4/3$, а не меньшая константа, будет дано в начале § 2.

В 1983 году два математика, Эндре Семереди и Уильям Томас Троттер, дали положительный ответ на поставленный вопрос. Более того, они доказали следующую теорему [5].

Теорема 1. *Любые n прямых и m точек на плоскости образуют не более $O((mn)^{2/3} + m + n)$ инциденций.*

Данную теорему неоднократно передоказывали. Упомянем следующие три доказательства: короткое вероятностное [6] (на русском языке изложено в [8, с. 127–128]) и два, основанных на идее «декомпозиции плоскости на клетки». Одно [3, раздел 4.5] из этих двух доказательств более «грубое». Другое [2] более «гладкое» и использует полиномиальный метод. Подробнее о данном методе читатель может прочитать, например, в [1].

Первый автор частично поддержан фондом «Династия»; второй — грантами РФФИ № 15–31–20403 (мол_а_вед), № 15–01–99563 А, № 15–01–03530 А; третий — грантом РФФИ № 16–01–00440 А.

Цель настоящей заметки — познакомить читателей с доказательством [2], основанным на полиномиальном методе. Статья состоит из двух частей: в § 2 будет изложено доказательство теоремы Семереди — Троттера в случае $n = m$ (читатель с лёгкостью сможет самостоятельно доказать случай $n \neq m$), использующее полиномиальный метод; в § 3 будет предложена подборка задач, в которую включены три их типа: задачи, решение которых позволяет доказать теорему Семереди — Троттера (по сути повторяющие сделанное в § 2), задачи, развивающие некоторые идеи, используемые при доказательстве, а также задачи, связанные с применением теоремы Семереди — Троттера. Изначально данная подборка задач служила основой проекта [7] Турнира городов в 2014 году. Позже второй автор использовал материалы данной заметки на просеминаре по комбинаторной геометрии для студентов-бакалавров в МФТИ. С решениями читатели могут ознакомиться в [7].

Задачи, которые непосредственно нужны для доказательства теоремы Семереди — Троттера, обозначены кружком.

§ 2. Доказательство теоремы Семереди — Троттера при $n = m$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, убедимся в существовании такой константы $c > 0$, что можно построить n прямых и n точек, для которых суммарное количество инциденций будет не меньше $cn^{4/3}$. Заметим, что достаточно рассматривать большие значения n. Для фиксированного $n > 1$ можно найти такое натуральное k, что $2k^3 \leqslant n < 2(k+1)^3 \leqslant 16k^3$. Рассмотрим $2k^3 < n$ точек на плоскости $\{(x, y)\colon 1 \leqslant x \leqslant k,\ 1 \leqslant y \leqslant 2k^2\}$ с целыми x, y, а также $k^3 < n$ прямых $\{y = ax + b\colon 1 \leqslant a \leqslant k,\ 1 \leqslant b \leqslant k^2\}$ с целыми a, b. Тогда для целого x, $1 \leqslant x \leqslant k$, имеем $1 \leqslant y = ax + b \leqslant k^2 + k^2 = 2k^2$, т. е. каждая прямая проходит через k точек из выбранного множества. Следовательно, суммарное число инциденций равно $k \cdot k^3 = k^4 > 2^{-16/3} n^{4/3}$.

2.1. Слабая оценка на число инциденций

Докажем следующую лемму, которая даёт слабую оценку на число инциденций между точками и прямыми.

Лемма 1. *Пусть на плоскости расположено n прямых и m точек. Тогда общее число инциденций не превосходит $n + m^2$.*

Доказательство. Заметим, что если прямая проходит только через одну из m точек, то она участвует в одной инциденции. Поэтому такие прямые суммарно участвуют не более чем в n инциденциях. Покажем, что прямые, содержащие по крайней мере две точки, суммарно участвуют не более чем в m^2 инциденциях. Действительно, через данную пару точек может проходить лишь одна прямая. Поскольку всего пар точек $m(m-1)/2$ и каждая из рассматриваемых прямых проходит через одну такую пару, число образованных ими инциденций не превосходит

$$2\frac{m(m-1)}{2} = m(m-1) < m^2. \qquad \square$$

2.2. Алгебраический подход к декомпозиции плоскости на клетки

Приведём несколько простых определений и лемм.

Множеством нулей Z_f многочлена $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ называется множество всех точек (x, y), для которых $f(x, y) = 0$. Будем называть *степенью* многочлена $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ наибольшее значение $i + j$ по всем его мономам вида $x^i y^j$ с ненулевым коэффициентом.

Следующие две леммы несложно следуют из теоремы Безу. Приведём доказательства, в которых нам не потребуется эта теорема.

Лемма 2. *Пусть $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ — многочлен степени d. Тогда любая прямая либо пересекает Z_f не более чем в d точках, либо целиком содержится в множестве Z_f.*

Доказательство. Заметим, что любую прямую можно параметризовать как

$$\{(x, y)\colon x = a_1 t + b_1,\ y = a_2 t + b_2,\ t \in \mathbb{R}\},$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ $(a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$ — фиксированные числа. Поэтому все точки, лежащие в пересечении прямой и Z_f, определяются уравнением $f(a_1 t + b_1, a_2 t + b_2) = 0$. Поскольку последнее уравнение имеет степень не выше d относительно t, у него либо не более d решений, либо в качестве решения подойдёт любое t, т. е. прямая либо пересекает Z_f в не более чем d точках, либо целиком содержится в Z_f. $\square$

Лемма 3. *Пусть $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ — многочлен степени d. Тогда число прямых, содержащихся в Z_f, не превосходит d.*

Доказательство. Предположим, что Z_f содержит k прямых. Тогда рассмотрим точку, которая не принадлежит Z_f (почему найдётся такая точка?), и проведём через неё прямую, которая пересекает каждую из k прямых, содержащихся в Z_f, и не проходит через точки пересечения этих прямых (количество таких точек конечно). Тогда из леммы 2 получаем, что число точек пересечения с Z_f не превосходит d, т. е. и число прямых, содержащихся в Z_f, не превосходит d. $\square$

Следующая лемма потребует введения нового определения.

Многочлен $f(x,y)$ будем называть *r-делящим* (где $r \geqslant 1$) для данного конечного множества точек $A \subset \mathbb{R}$, если в каждой компоненте связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus Z_f$ содержится не более $|A|/r$ точек из A.

Лемма 4. *Пусть даны конечные множества $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^2$. Тогда существует многочлен степени не выше d, где $C_{d+2}^2 - 1 \geqslant m$, который будет 2-делящим многочленом для каждого из множеств $A_1, \ldots, A_m$.*

Доказательство. Воспользуемся отображением (которое называется отображением Веронезе), переводящим точки плоскости в точки из $\mathbb{R}^n$, где $n = C_{d+2}^2 - 1$:

$$\varphi(x,y) := (x, y, x^2, xy, y^2, \ldots, x^d, x^{d-1}y, \ldots, xy^{d-1}, y^d) \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь каждой координате в $\mathbb{R}^n$ соответствует пара (i,j), для которой выполняются неравенства $0 \leqslant i$, $0 \leqslant j$, $1 \leqslant i+j \leqslant d$ (нетрудно убедиться, что количество таких пар в точности n). Тогда конечные множества A_i перейдут в конечные множества $\varphi(A_i)$ (отметим, что количество получившихся множеств не превосходит размерность пространства). Применим теперь теорему о бутерброде (см. [4, теорема 3.1.2]):

Теорема 2. *Пусть даны конечные множества $A_1, \ldots, A_d \subset \mathbb{R}^d$. Тогда существует такая гиперплоскость, что в каждом из открытых полупространств, образованных данной гиперплоскостью, содержится не более $\lfloor |A_i|/2 \rfloor$ точек из A_i для каждого i (некоторые точки могут лежать в гиперплоскости).*

Значит, существует такая гиперплоскость

$$a_{0,0} + a_{1,0}x_{1,0} + a_{0,1}x_{0,1} + a_{2,0}x_{2,0} + a_{1,1}x_{1,1} + a_{0,2}x_{0,2} + \ldots + a_{0,d}x_{0,d} = 0,$$

что в каждом из полупространств, образованных этой гиперплоскостью, находится не более $|A_i|/2$ точек из $\varphi(A_i)$. Легко убедиться, что многочлен

$$f(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \ldots + a_{0,d}y^d$$

будет 2-делящим для каждого из множеств $A_1, \ldots, A_m$. □

Лемма 5. *Для любого конечного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ существует многочлен степени не выше $7\sqrt{r}$, который будет r-делящим.*

Доказательство. Выберем такое целое неотрицательное m, что $2^m < r \leqslant 2^{m+1}$. Докажем, что существует многочлен, который будет 2^{m+1}-делящим для множества A. Для этого будем действовать по индукции. На первом шаге выбираем многочлен $f_0(x,y) = 1$, который является 2^0-делящим для A. Пусть мы построили 2^i-делящий многочлен $f_i(x,y)$, т. е. Z_{f_i} делит плоскость на компоненты, в каждой из которых находится не более $|A|/2^i$ точек. Заметим, что количество компонент, которые содержат более $|A|/2^{i+1}$ точек, меньше 2^{i+1}. Обозначим через ℓ их количество, а через A_j — совокупность точек, лежащих в j-й компоненте, содержащей более $|A|/2^{i+1}$ точек (но по предположению индукции не более $|A|/2^i$). Применим лемму 4 к множествам $A_1, \ldots, A_\ell$. Тогда найдётся многочлен $g_{i+1}(x, y)$ степени не выше $k = [\sqrt{2^{i+2}}]$ (так как $C^2_{k+2} - 1 \geqslant 2^{i+1} > \ell$), который будет 2-делящим для $A_1, \ldots, A_\ell$. Следовательно, многочлен $f_{i+1}(x, y) = g_{i+1}(x, y) \cdot f_i(x, y)$ является 2^{i+1}-делящим для A. Таким образом, по индукции мы построим многочлен $f_{m+1}(x, y)$, который будет 2^{m+1}-делящим (тем более r-делящим). Так как

$$f_{m+1}(x, y) = g_1(x, y) g_2(x, y) \ldots g_{m+1}(x, y),$$

степень многочлена $f_{m+1}(x, y)$ равна сумме степеней многочленов $g_i(x, y)$, т. е. не превосходит

$$\sum_{i=1}^{m+1} \sqrt{2^{i+2}} < \sqrt{2^{m+3}} \frac{1}{1 - 2^{-1/2}} = \sqrt{2^{m+1}} \frac{2}{1 - 2^{-1/2}} < 7\sqrt{r}. \qquad \square$$

2.3. Завершение доказательства теоремы Семереди — Троттера в случае $n = m$

Обозначим через $I(L', P')$ число инциденций, образованных прямыми из множества L' и точками из множества P', т. е. число таких пар (l, p), что $l \in L'$, $p \in P'$ и $p \in l$.

Пусть на плоскости расположено n прямых (обозначим их множество через L) и n точек (обозначим их множество через P). Используя лемму 5, построим r-делящий многочлен $f(x, y)$ степени не более $7\sqrt{r}$ для данного множества точек P (позже мы подберём значение величины r). Обозначим через $L_0 \subset L$ множество прямых, которые содержатся в Z_f, а через $P_0 \subset P$ — множество точек, лежащих на Z_f. Пусть многочлен f поделил плоскость на s частей: множество точек в i-й части будем обозначать через P_i, а множество прямых, пересекающих i-ю часть, — через L_i.

Заметим, что

$$I(L, P) = I(L_0, P_0) + I(L \setminus L_0, P_0) + \sum_{i=1}^{s} I(L_i, P_i).$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части. Во-первых, $I(L_0, P_0) < 7n\sqrt{r}$, поскольку $|P_0| \leqslant n$ и по лемме 3 имеем $|L_0| < 7\sqrt{r}$. Аналогично получаем, что $I(L \setminus L_0, P_0) < 7n\sqrt{r}$, так как по лемме 2 каждая прямая из $L \setminus L_0$

(их не более чем n) будет пересекать Z_f не более чем в $7\sqrt{r}$ точках. Перейдём к оценке последнего слагаемого. Для этого воспользуемся слабой оценкой из леммы 1
$$\sum_{i=1}^{s} I(L_i, P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{s}(|P_i|^2 + |L_i|).$$
Поскольку каждая прямая из $L \setminus L_0$ проходит не более чем через $7\sqrt{r}$ точек в Z_f, она входит не более чем в $7\sqrt{r}+1 \leqslant 8\sqrt{r}$ множеств L_i. Отсюда
$$\sum_{i=1}^{s} |L_i| \leqslant 8n\sqrt{r}.$$
Кроме того,
$$\sum_{i=1}^{s} |P_i|^2 \leqslant \max |P_i| \sum_{i=1}^{s} |P_i| \leqslant \frac{n^2}{r}.$$
Поэтому в итоге мы получаем, что
$$I(L, P) \leqslant 22n\sqrt{r} + \frac{n^2}{r}.$$
Выбирая $r = n^{2/3}$, получаем, что $I(L, P) \leqslant 23n^{4/3}$. Теорема Семереди — Троттера при $m = n$ доказана. $\square$

§ 3. Подборка задач

3.1. Инциденции множеств

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное семейство подмножеств m-элементного множества $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Назовём пару (x_i, y_j) *инциденцией,* если $y_j \in x_i$. Через $I(X, Y)$ будем обозначать число инциденций, образованных элементами из X и Y. Во всех задачах этого параграфа мы считаем, что для некоторого $r \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_i \cap x_j| \leqslant r$ для любых $i \neq j$.

Замечание. Инциденции можно воспринимать следующим образом. Рассмотрим такую таблицу размера $m \times n$, что в клетке, находящейся на пересечении i-й строки и j-го столбца, стоит звёздочка тогда и только тогда, когда $y_i \in x_j$. Таким образом, вопрос о числе инциденций равносилен вопросу о том, сколько звёздочек стоит в таблице.

Задача 1. Пусть $r = 1$. Докажите, что
а)$^\circ$ $I(X, Y) \leqslant m^2 + n$, $I(X, Y) \leqslant n^2 + m$;
б) $I(X, Y) \leqslant \sqrt{n(m^2 - m)} + n$, $I(X, Y) \leqslant \sqrt{m(n^2 - n)} + m$.

Задача 2. Докажите, что $I(X, Y) \leqslant \sqrt{mr(n^2 - n)} + m$.

Задача 3. Пусть $r = 1$. Найдите $\max I(X, Y)$

а) при $n \leqslant 3$;

б) при $m \geqslant C_n^2$.

При каких условиях достигается максимум?

Задача 4. Квадрат 13×13 разбит на единичные квадратики. Центры некоторых из них отмечены так, что нет прямоугольника с вершинами в отмеченных точках и сторонами, параллельными сторонам квадрата. Найдите наибольшее возможное число отмеченных точек.

Задача 5. Сто (или a) мышей вместе грызут 1000 (или b) кусков сыра. Каждая мышь может попробовать несколько кусков сыра, сделав в каждом из них по одной дырке. Любые две мыши сделали дырки не более чем в 10 (или c) общих кусках сыра. Докажите, что число дырок не больше

а) 11 000 (или $b + a\sqrt{bc}$);

б) 10 500 (или $\dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4bca(a-1)}}{2}$).

3.2. Теорема о бутерброде

Задача 6. На плоскости расположено конечное количество точек. Докажите, что найдётся такая прямая, что в каждой из открытых полуплоскостей, на которые она делит плоскость, будет не больше половины всех точек.

Задача 7. а) Докажите, что если на плоскости даны красные и синие точки в общем положении, то найдётся прямая, которая делит плоскость на две такие открытые полуплоскости, что в каждой из них находится не более половины красных и не более половины синих точек.

б) Докажите, что если в пространстве даны красные, синие и зелёные точки в общем положении, то найдётся плоскость, которая делит пространство на два таких открытых полупространства, что в каждом из них находится не более половины точек каждого цвета.

В пункте 3.4 нам пригодится следующее обобщение задачи 7 (см. п. 2.2, теорема 2):

Теорема о бутерброде. *Пусть даны конечные множества* $A_1, \ldots,$ $\ldots, A_d \subset \mathbb{R}^d$. *Тогда существует такая гиперплоскость, что в каждом из открытых полупространств, образованных данной гиперплоскостью, будет не более* $\lfloor |A_i|/2 \rfloor$ *точек из* A_i *для каждого* i (*некоторые точки могут лежать в гиперплоскости*).

Задача 8. а) Пусть на плоскости дано $2n$ точек общего положения, из них n красных и n синих. Докажите, что их можно разделить на пары таким образом, что каждая пара будет состоять из точек разных цветов, а отрезки, соответствующие парам, не будут пересекаться.

б)[1] Пусть в пространстве дано $3n$ точек общего положения, из них n красных, n синих и n зелёных. Докажите, что их можно разделить на тройки таким образом, что каждая тройка будет состоять из точек разных цветов, а треугольники, соответствующие тройкам, не будут пересекаться.

Задача 9. Два вора украли ожерелье с двумя концами, состоящее из платиновой цепочки, на которую нанизаны драгоценные камни d видов. Воры не знают ценности каждого камня, поэтому хотят поделить камни каждого вида поровну (известно, что камней каждого вида чётное количество). Чтобы потерять как можно меньше платины, воры хотят сделать наименьшее число разрезов. Могут ли они поделить ожерелье с помощью

а) $(d-1)$ разрезов?

б) d разрезов?

3.3. Конструктивная геометрия

Мы будем говорить, что n точек и n прямых на плоскости образуют *конфигурацию* n_d из точек и прямых, если на любой данной прямой лежит ровно d данных точек и через любую данную точку проходит ровно d данных прямых, т. е. число инциденций равно nd.

Задача 10. Постройте две различные конфигурации а) 9_3; б) 10_3.

Задача 11°. а) Постройте для любого n такой пример из n прямых и n точек, что число инциденций, задаваемое этими прямыми и точками на плоскости, больше, чем $c'n^{4/3}$ для некоторой константы $c'>0$, не зависящей от n.

б) Постройте для любых n и m такой пример из n прямых и m точек, что число инциденций, задаваемое этими прямыми и точками на плоскости, больше, чем $c''((nm)^{2/3}+n+m)$ для некоторой константы $c''>0$, не зависящей от n и m.

3.4. Алгебраические мотивы в геометрии

Воспользуемся терминологией из п. 2.2.

Задача 12°. Пусть $f(x,y)$ — многочлен степени d. Докажите, что любая прямая либо пересекает Z_f не более чем в d точках, либо целиком содержится в множестве Z_f.

[1] К сожалению, до сих пор неизвестно элементарное (т. е. без использования теоремы о бутерброде) решение этой задачи.

Задача 13°. Пусть $f(x, y)$ является многочленом степени d. Докажите, что число прямых, содержащихся в Z_f, не превосходит d.

Задача 14°. Покажите, что количество мономов степени не выше d от двух переменных ровно C_{d+2}^2.

Задача 15. Докажите, что для конечного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ существует r-делящий многочлен степени $[r]$.

Здесь каждой координате в $\mathbb{R}^n$ соответствует пара (i, j), для которой выполняются неравенства $0 \leqslant i$, $0 \leqslant j$, $1 \leqslant i + j \leqslant d$.

Задача 16°. Пусть даны конечные множества $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^2$. Докажите, что существует многочлен степени не выше k, где $C_{k+2}^2 - 1 \geqslant m$, который будет 2-делящим многочленом для каждого из данных множеств.

Задача 17°. Докажите, что для конечного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ существует r-делящий многочлен степени не выше $c\sqrt{r}$, где c — некоторая константа (например, можно показать, что $c \leqslant 7$).

3.5. Доказательство теоремы Семереди — Троттера

Пусть $I(L', P')$ — число инциденций, образованных прямыми из множества L' и точками из множества P', т. е. число таких пар (l, p), что $l \in L'$, $p \in P'$ и $p \in l$.

Пусть на плоскости отмечены множество L из n прямых и множество точек P из n точек. Пользуясь задачей 17, построим r-делящий многочлен $f(x, y)$ для данного множества точек P (значение величины r подберём позже). Обозначим через $L_0 \subset L$ множество отмеченных прямых, которые содержатся в Z_f, а через $P_0 \subset P$ множество отмеченных точек, лежащих на Z_f. Пусть многочлен f поделил плоскость на s частей: множество отмеченных точек в i-й части будем обозначать через P_i, а множество отмеченных прямых, пересекающих i-ю часть, через L_i.

Задача 18°. Докажите, что существуют такие константы c_1, c_2, c_3, что
а) $I(L_0, P_0) \leqslant c_1 n\sqrt{r}$;
б) $I(L \setminus L_0, P_0) \leqslant c_2 n\sqrt{r}$;
в) $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} I(L_i, P_i) \leqslant c_3\left(\frac{n^2}{r} + n\sqrt{r}\right)$.

Задача 19°. Выбрав нужное r, докажите теорему Семереди — Троттера в случае $n = m$.

Задача 20°. Докажите теорему Семереди — Троттера в общем случае.

3.6. Применения теоремы Семереди — Троттера

Задача 21. Докажите, что существует такая константа c, что для любых n точек на плоскости число треугольников единичной площади с вершинами в данных точках не превосходит $cn^{7/3}$.

Задача 22. а) Докажите, что число прямых, каждая из которых содержит не менее $k > 2$ различных точек m-элементного множества P, равно $O(m^2/k^3 + m/k)$.

б) Докажите, что такие прямые задают $O(m^2/k^2 + m)$ инциденций с данным множеством точек P.

Задача 23 (Теорема Бека). Пусть P — множество точек на плоскости, а L — множество прямых, проходящих по меньшей мере через две точки из P. Тогда найдутся такие константы $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от P и L, что выполняется одно из двух условий:

1. Найдётся прямая из L, которая содержит по крайней мере $c_1|P|$ точек.
2. $|L| \geqslant c_2|P|^2$.

Задача 24. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — конечное множество. Докажите, что существует такая константа $c > 0$, что

$$\max\{|A + A|; |A \cdot A|\} \geqslant c|A|^{5/4},$$

где

$$A + A = \{a_1 + a_2 \colon a_1 \in A,\ a_2 \in A\},$$
$$A \cdot A = \{a_1 \cdot a_2 \colon a_1 \in A,\ a_2 \in A\}.$$

Список литературы

[1] *Dvir Z.* Incidence Theorems and Their Applications // Foundations and Trends in Theoretical Computer Science. 2012. V. 6, № 4. P. 257–393. `https://arxiv.org/pdf/1208.5073v2.pdf`

[2] *Kaplan H., Matoušek J., Sharir M.* Simple Proofs of Classical Theorems in Discrete Geometry via the Guth-Katz Polynomial Partitioning Technique // Discrete Comput. Geom. 2012. V. 48, № 3. P. 499–517. `http://arxiv.org/abs/1102.5391v1`

[3] *Matoušek J.* Lectures on Discrete Geometry. New York: Springer-Verlag, 2002. (Graduate Texts in Math.; V. 212).

[4] *Matoušek J.* Using the Borsuk — Ulam theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[5] *Szemerédi E., Trotter W. T.* Extremal problems in discrete geometry // Combinatorica. 1983. V. 3, iss. 3. P. 381–392.

[6] *Székely L.* Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry // Combin. Probab. Comput. 1997. V. 6, № 3. P. 353–358.

[7] *Нилов Ф., Полянский А., Полянский Н.* Инциденции точек и прямых, проект 26-й летней конференции Турнира городов.
http://www.turgor.ru/lktg/2014/7/index.htm

[8] *Тао Т.* Структура и случайность. М.: МЦНМО, 2017.

Фёдор Константинович Нилов, мехмат МГУ
nilovfk@gmail.com

Александр Андреевич Полянский, МФТИ, Технион, ИППИ РАН
alexander.polyanskii@yandex.ru

Никита Андреевич Полянский, ИППИ РАН
nikitapolyansky@gmail.com