Преподавание и популяризация математики

Вложения в плоскость графов с вершинами степени 4

А. Б. Скопенков*

В этой методической заметке приводится доказательство интересной и важной гипотезы В. А. Васильева [1] о критерии планарности графа с вершинами степени 4 и некоторой дополнительной («крестовой») структурой. Эта гипотеза относится к числу тех замечательных проблем, возникших в современной математике, формулировка и доказательство которых доступны школьнику, знакомому с основами теории графов. Она была впервые доказана В. О. Мантуровым [2], см. также [3]. В настоящей заметке приведено более простое изложение доказательства, а также даны пояснения для начинающих [1).

Полуребром графа называется пара из ребра и его концевой вершины (или, неформально, конца ребра). *Графом с крестовой структурой* (кратко *X-графом*) называется граф, степень каждой вершины которого равна 4,

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15–01–06302, грантами фонда Саймонса и стипендией фонда Д. Зимина «Династия».

1) Эта заметка написана по материалам цикла задач [6], представленного на Летней конференции Турнира городов в 2005 г. А. Каибхановым, Д. Пермяковым и автором. Она выложена в архив в августе 2010 г. Поставленный в ней вопрос (задача 2) послужил отправной точкой для интересных исследований [3, 4].

Редколлегией сборника при публикации внесены некоторые изменения в аннотацию. Обновляемая авторская версия: https://arxiv.org/abs/1008.4940

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 21, 2017(197–204)

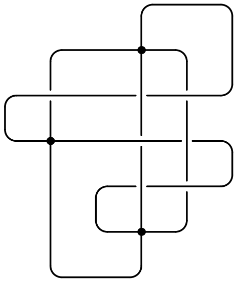

Рис. 1

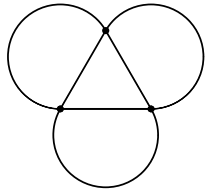

Рис. 2

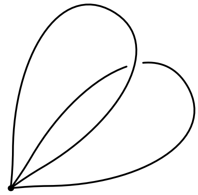

Рис. 3

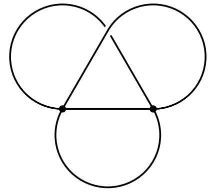

Рис. 4

причём для каждой вершины фиксировано разбиение четырёх входящих в неё полурёбер на две пары.

Вот примеры X-графов. Они изображены на плоскости (с самопересечениями) так, что при обходе вокруг каждой вершины полурёбра из первой пары и полурёбра из второй пары чередуются (т. е. проходятся в порядке 1212, а не 1122).

X-Граф называется *X-планарным*, если его можно изобразить без самопересечений на плоскости так, что при обходе вокруг каждой вершины полурёбра из первой пары и полурёбра из второй пары чередуются.

Например, X-граф на рис. 1 является X-планарным, ибо он «не отличается как X-граф» от изображённого на рис. 2.

Заметим, что не любой планарный X-граф X-планарен. Действительно, X-графы «восьмёрка» (рис. 3) и «трилистник» (рис. 4) планарны, но не X-планарны.

Общая вершина двух путей на X-графе, не имеющих общих рёбер, называется *точкой перекрестья*, если один из этих путей проходит по полурёбрам из одной пары, выходящим из этой вершины. (Тогда второй путь проходит по полурёбрам из другой пары.)

Теорема планарности графов с крестовой структурой. *X-Граф X-планарен тогда и только тогда, когда он не содержит двух несамопересекающихся циклов без общих рёбер, имеющих ровно одну вершину перекрестья.*

Замечания. (а) Слово «несамопересекающихся» можно опустить[2)].

[2)] Чтобы обосновать это замечание, покажем, что если в X-графе есть два цикла K_1 и K_2 ровно с одной точкой перекрестья A, то есть и два несамопересекающихся цикла с тем же свойством. Для этого рассмотрим несамопересекающийся цикл K_1^+ из рёбер цикла K_1, содержащий вершину A. Аналогично определим цикл K_2^+. Тогда K_1^+ и K_2^+ и будут искомыми циклами.

(б) Слова «без общих рёбер, имеющих ровно одну вершину перекрестья» нельзя заменить на «пересекающихся только по одной вершине, являющейся вершиной перекрестья» (см. пример на рис. 4).

Доказательство необходимости в теореме. Пусть, напротив, некоторый X-граф с несамопересекающимися циклами K_1 и K_2, имеющими ровно одну вершину A перекрестья, X-планарен. Цикл K_1 делит плоскость на две части. Лишь в вершине A при движении по циклу K_2 мы переходим из одной части в другую, а в остальных общих вершинах остаёмся в той же части. Противоречие. □

Задача 1. Если в X-графе найдутся два цикла с нечётным числом точек перекрестья, то найдутся и два цикла ровно с одной точкой перекрестья.

Задача 2 (для исследования). Сформулируйте определения $*$-графа и $*$-планарности для графов, степень каждой вершины которых равна 4. (*Указание*: полурёбра, выходящие из каждой вершины, можно разбить на три пары или на две тройки...) Найдите соответствующие критерии $*$-планарности.

Для одного из определений $*$-графа и $*$-планарности решение приведено в [4] и [5]. Насколько мне известно, для других вариантов вопрос открыт!

В оставшейся части заметки приводится *доказательство достаточности в теореме.*

Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он проходит по каждому *ребру* ровно по одному разу.

Пусть в графе степени 4 задан эйлеров цикл. Назовём две вершины P и Q *скрещивающимися*, если они идут вдоль эйлерова цикла в порядке $PQPQ$ (а не $PPQQ$). Назовём эйлеров цикл *удобным*, если вершины графа можно так разбить на два множества, что никакие две вершины из одного множества не скрещиваются.

Идею доказательства можно пояснить на следующей красивой задаче[3)].

Задача 3. Связный граф степени 4 планарен тогда и только тогда, когда в нём найдётся удобный эйлеров цикл.

Решение. *Достаточность.* Пусть вершины разбиты на два множества требуемым образом. Построим несамопересекающийся цикл S на плоскости, рёбра которого соответствуют всем рёбрам удобного эйлерова цикла и идут в том же порядке. Каждой вершине графа отвечают две вершины

[3)] В дальнейшем она не используется формально, а служит лишь для *мотивировки* понятий поворачивающего и сильно поворачивающего эйлерова цикла. Поэтому задачу 3 и её решение можно пропустить.

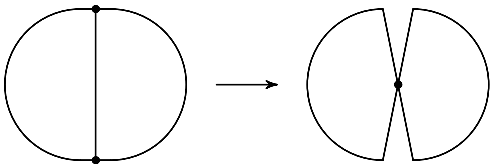

Рис. 5

цикла S. Соединим каждую пару вершин цикла S, отвечающую вершине *первого* множества (из определения удобности), несамопересекающейся ломаной *внутри* цикла S. Эти ломаные можно взять попарно непересекающимися, поскольку соответствующие вершины первого множества не скрещиваются. Аналогично соединим пары вершин цикла S, отвечающие вершинам *второго* множества, несамопересекающимися попарно непересекающимися ломаными *вне* цикла S. Стянем в плоскости каждую проведённую ломаную в точку (рис. 5). Получим вложение графа в плоскость.

Необходимость. Будем называть *гранями* связные куски, на которые распадается плоскость при разрезании по всем рёбрам плоского графа. Начнём двигаться из некоторой вершины A, причём из каждой вершины будем выходить по ребру, соседнему по грани с тем, по которому пришли. По рёбрам разрешается проходить не более чем по одному разу. Будем так двигаться, пока возможно. Завершиться это движение может только в A. Более того, мы вернёмся в A по ребру, лежащему в одной грани с начальным ребром (иначе мы ещё можем продолжить движение). По окончании движения получим цикл T', проходящий через каждую вершину по парам рёбер, лежащих в одной грани (в том числе и через A, как показано ранее). Если T' не эйлеров, то из некоторой его вершины B выходят рёбра, не принадлежащие T'. Пройдём из B по циклу T', а затем продолжим движение так же, как при построении цикла T'. В итоге получим больший цикл, также проходящий через каждую вершину по рёбрам, лежащим в одной грани, и потому несамопересекающийся. Таким образом можно увеличивать цикл, пока он не будет содержать все рёбра графа.

Докажем, что построенный эйлеров цикл удобен. Расцепим этот цикл в каждой вершине, соединив в плоскости расцеплённые точки отрезками (рис. 6). Объединение рёбер полученного графа, не совпадающих с проведёнными отрезками, разбивает плоскость на две части. Включим в первое (второе) множество вершин исходного графа те вершины, которые отвечают проведённым отрезкам, лежащим во внутренней (внешней) части. $\square$

Пусть в X-графе имеется удобный эйлеров цикл T. По нему можно построить вложение X-графа в плоскость, как в задаче 3. При каком условии на T полученное вложение будет «X-вложением»? Ясно, что T должен

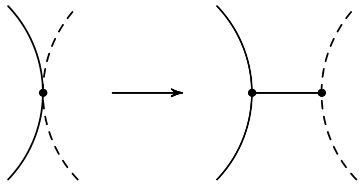

Рис. 6

быть *поворачивающим*, т. е. в каждой вершине последовательно проходить по полурёбрам из разных пар, выходящим из этой вершины. Этого условия недостаточно. Цикл T должен быть *сильно поворачивающим*, т. е. при движении по циклу T (в одном произвольном направлении) мы должны входить в каждую вершину оба раза по полурёбрам одной и той же пары.

Достаточность в теореме вытекает из следующих трёх лемм.

Лемма о планарности. *Если в X-графе существует удобный сильно поворачивающий эйлеров цикл, то X-граф X-планарен.*

Лемма о поворачивающем цикле. *В любом связном X-графе существует поворачивающий эйлеров цикл.*

Лемма о дополнительных свойствах. *Пусть X-граф не содержит двух несамопересекающихся циклов без общих рёбер, имеющих ровно одну вершину перекрестья. Тогда любой поворачивающий эйлеров цикл является удобным и сильно поворачивающим.*

Доказательство[4)] леммы о планарности. Построим несамопересекающийся цикл S на плоскости, рёбра которого соответствуют всем рёбрам удобного эйлерова цикла и идут в том же порядке. Каждой вершине графа отвечают две вершины цикла S.

Соединим каждую пару вершин цикла S, отвечающую вершине *первого* множества (из определения удобности), несамопересекающейся ломаной *внутри* цикла S. Эти ломаные можно взять попарно непересекающимися, поскольку соответствующие вершины первого множества не скрещиваются. Аналогично соединим пары вершин цикла S, отвечающие вершинам *второго* множества, несамопересекающимися попарно непересекающимися ломаными *вне* цикла S.

Стянем в плоскости каждую проведённую ломаную в точку (рис. 5). Получим вложение X-графа в плоскость. Поскольку взятый эйлеров цикл сильно поворачивающий, при обходе вокруг каждой вершины полурёбра из первой и из второй пары чередуются. Значит, это вложение является «X-вложением». □

[4)] Это доказательство, кроме последнего абзаца, повторяет решение задачи 3.

Доказательство леммы о поворачивающем цикле (аналогичное доказательству критерия существования эйлерова цикла). Начнём двигаться из некоторой вершины A. Будем двигаться, меняя пару полуребра в каждой вершине и проходя по рёбрам не более чем по одному разу, пока возможно. Так как из каждой вершины выходит поровну полурёбер обеих пар, завершиться это движение может только в A. Более того, мы вернулись в A по полуребру, не парному начальному полуребру (иначе мы ещё можем выйти по полуребру другой пары, а значит, движение не завершилось). По окончании движения получим поворачивающий цикл F.

Если F не эйлеров, то из некоторой его вершины B выходят рёбра, не принадлежащие F. Пройдём из B по циклу F, а затем продолжим движение так же, как при построении цикла F. В итоге получим больший поворачивающий цикл. Таким образом можно увеличивать цикл, пока он не будет содержать все рёбра X-графа. □

Доказательство сильной поворачиваемости в лемме о дополнительных свойствах. Пусть, напротив, найдётся такая вершина A, что поворачивающий цикл T входит в неё первый раз по полуребру одной пары, а второй — по полуребру другой пары. Обозначим через T_1 цикл, соответствующий части цикла T от первого выхода из A до второго входа в A. Обозначим через T_2 цикл, соответствующий остатку цикла T. Тогда T_1 и T_2 — циклы, поворачивающие во всех вершинах, кроме вершины A, являющейся для них вершиной перекрестья. Если путь поворачивает в вершине, то эта вершина не может быть для него точкой перекрестья с другим путём. Значит, остальные вершины не являются для циклов T_1 и T_2 точками перекрестья. Но такой пары циклов нет по предположению. □

Доказательство удобности в лемме о дополнительных свойствах. Построим вспомогательный граф $Q(T)$. Вершины графа $Q(T)$ — те же, что у исходного графа. Две вершины графа $Q(T)$ соединяются ребром, если они скрещиваются (относительно цикла T).

Удобность цикла T равносильна двудольности графа $Q(T)$, что, в свою очередь, равносильно отсутствию в $Q(T)$ циклов нечётной длины.

Пусть поворачивающий цикл T неудобен. Возьмём наименьший цикл A нечётной длины $2k+1 \geqslant 3$ в $Q(T)$.

Так как цикл A минимален, скрещиваются только соседние его вершины. Пройдём по эйлерову циклу T, обозначая появляющиеся вершины цикла A через $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{4k+2}$: каждая из этих вершин получит два номера, отличающиеся на 3. Более аккуратно: обозначим через

- T отображение из $\{1, 2, \ldots, n\}$ в множество вершин исходного графа, выражающее порядок обхода эйлерова цикла T,

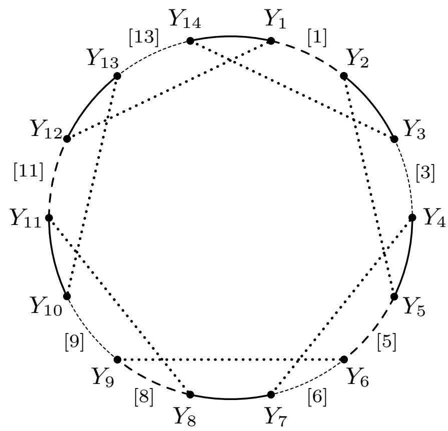

Рис. 7

- $1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{4k+2} \leqslant n$ числа, образами которых являются вершины цикла A,
- Y_j вершину $T(y_j)$.

Без ограничения общности можно считать, что $Y_2 = Y_5$, $Y_4 = Y_7$, …, $Y_{4k} = Y_1$, $Y_{4k+2} = Y_3$.

Положим

$$[i] := (T(y_i), T(y_i + 1), \ldots, T(y_{i+1}))$$

для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, 4k + 1\}$. (Неформально, это «отрезок эйлерова цикла T, проходимый между Y_i и Y_{i+1}». Чтобы строго объяснить, что это такое, и нужно рассматривать T как отображение.)

Возьмём первый цикл (рис. 7):

$$[1], [5], \ldots, [4l - 7], [4l - 3], \overline{[4l]}, [4l + 3], [4l + 7], \ldots, [4k - 5], [4k - 1],$$

где $l := [(k + 1)/2]$. Здесь путь $[4l]$ проходится против эйлерова цикла T, а остальные пути — по циклу T.

(Вот неформальное объяснение этого построения для $k = 3$, см. рис. 7. Пройдём по циклу T из $Y_{12} = Y_1$ в Y_2, затем из $Y_2 = Y_5$ в Y_6, затем против цикла T из $Y_6 = Y_9$ в Y_8, затем по циклу T из $Y_8 = Y_{11}$ в Y_{12}.)

Возьмём второй цикл, «симметричный» первому (рис. 7):

$$[3], [7], \ldots, [4m - 5], [4m - 1], \overline{[4m + 2]}, [4m + 5], [4m + 9], \ldots, [4k - 3], [4k + 1],$$

где $m = k - l$. Здесь путь $[4m + 2]$ проходится против цикла T, а остальные пути — по циклу T.

(Вот неформальное объяснение этого построения для $k = 3$, см. рис. 7. Пройдём по циклу T из $Y_{14} = Y_3$ в Y_4, затем против цикла T из $Y_7 = Y_4$ в Y_6, затем по циклу T из $Y_6 = Y_9$ в Y_{10}, затем из $Y_{10} = Y_{13}$ в Y_{14}.)

У построенных двух циклов одна общая вершина $Y_{2k} = Y_{2k+3}$. Первый цикл выходит из неё против цикла T, а входит по циклу T. Как уже доказано, цикл T сильно поворачивающий. Поэтому первый цикл в обоих случаях идёт по полурёбрам одной пары. Аналогично второй цикл проходит через эту вершину по полурёбрам другой пары. Таким образом, у этих циклов единственная точка перекрестья. Противоречие. $\square$

Благодарности

Благодарю редколлегию сборника «Математическое просвещение» за полезные замечания и обсуждения.

Список литературы

[1] *Васильев В. А.* Инварианты и когомологии первого порядка для пространств вложений самопересекающихся кривых в $\mathbb{R}^n$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 5. С. 3–52.

[2] *Мантуров В. О.* Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 5. С. 169–178.

[3] *Мантуров В. О.* Четырёхвалентные графы с крестовой структурой // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО. 2011. С. 128–137.

[4] *Friesen T.* A generalization of Vassiliev's planarity criterion. `http://arxiv.org/abs/1210.1539`

[5] *Friesen T., Manturov V.* Embeddings of $*$-graphs into 2-surfaces. `http://arxiv.org/abs/1212.5646`

[6] `http://olympiads.mccme.ru/lktg/2005/3/index.htm`

[7] `https://arxiv.org/abs/1008.4940`

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ

`skopenko@mccme.ru`, `http://www.mccme.ru/~skopenko/`