# Избранные задачи экзамена по дискретному анализу

А. А. Полянский, П. Б. Тарасов

Дискретный анализ — один из фундаментальных математических курсов, читаемый А. М. Райгородским на факультете инноваций и высоких технологий МФТИ. Преподаватели кафедры дискретной математики МФТИ уже неоднократно делились на страницах «Математического просвещения» методическими материалами, которыми они пользуются при проведении семинаров (см. [2, 3]).

В данной короткой статье мы предложим несколько интересных задач, которые предлагались на устном экзамене по дискретному анализу, проходившем в июне 2015 года. Отличительными чертами этих задач является то, что их условия имеют необычную формулировку, а решения состоят из двух частей: во-первых, студентам необходимо понять, к какой теореме курса данная задача сводится, во-вторых, нужно доказать соответствующие теоремы. Это было сделано для того, чтобы студенты, которые «заучили» билеты не вдумываясь, не смогли распознать теоремы, спрятанные под формулировками задач.

Решения задач мы разбирать в рамках статьи не будем. При желании читатель с лёгкостью сможет найти теоремы, которые нужны для решения задач: для этого достаточно обратиться к подсказкам и списку литературы в конце статьи.

Отметим, что каждую задачу смогла решить приблизительно половина студентов, которым она доставалась. На потоке прикладной математики и информатики обучается приблизительно 100 студентов, каждому студенту доставалось две задачи из списка в 20 задач (ниже предложены лишь 16 из них), т. е. каждую задачу пытались решить около 10 человек. В статье задачи расположены в порядке их сложности.

Первый автор частично поддержан грантами РФФИ № 15–31–20403 мол_а_вед, № 15–01–99563 А, № 15–01–03530 А.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры дискретной математики (особенно А. Б. Скопенкову) за замечания, которые позволили улучшить формулировки задач.

## Задачи

**1.** В скале расположено $n$ комнат-пещер, и некоторые из них соединены коридорами (коридор соединяет две комнаты), при этом из любой комнаты в любую другую ведёт ровно один путь, возможно проходящий через другие комнаты. Какое минимальное количество коридоров необходимо пройти, чтобы посетить все комнаты, если стартовать и заканчивать надо в первой комнате?

**2.** Среди любых ли 8 теннисистов найдётся такая четвёрка, что каждые двое хоть раз играли друг против друга, либо такая тройка, что никакие двое не играли друг против друга?

**3.** В городе $N$ живёт 2016 моноциклистов, причём среди любых 65 из них найдутся по крайней мере два знакомых. Докажите, что нельзя так раскрасить моноциклы в 31 цвет, чтобы на велопараде любые два владельца моноциклов одного цвета были незнакомы.

**4.** Есть $N$ альпинистов, которые любят ходить парами в горы. Каждые два альпиниста однажды вместе посетили либо Кавказ, либо Альпы, либо Гималаи. Известно, что среди любых 20 альпинистов найдутся двое, которые вместе посетили Кавказ или Альпы, а среди любых 30 найдутся двое, которые вместе посетили Кавказ или Гималаи. Докажите, что при достаточно большом $N$ найдётся 1000 таких альпинистов, что каждая пара из 1000 альпинистов посетила Кавказ.

**5.** В волшебном замке пять лестниц между шестью этажами каждый день меняют своё расположение. Известно, что каждый день можно попасть с каждого этажа на каждый (по лестнице можно попасть только с одного этажа на другой, на промежуточном сойти не получится). Могло ли произойти, что на протяжении трёх лет схема переходов между этажами ни разу не повторилась?

**6.** Семирукий инопланетянин хочет попасть на борт корабля NASA, чтобы позавтракать с космонавтами. Для того чтобы войти на корабль, нужно ввести пароль следующим образом. Каждую минуту инопланетянин может внести одну руку в кувшин. После этого сканер, находящийся внутри кувшина, распознаёт руку инопланетянина и запоминает эту руку. Требуется ввести правильную последовательность из 4 рук (возможно, что одну руку нужно ввести 4 раза подряд; сканер помнит только последние 4 введённых объекта). Инопланетянин не помнит пароль от входа (а может быть, вообще не знает). Через какое наименьшее время он сможет гарантированно насладиться пакетиком настоящего английского чая?

**7.** В королевстве 116 городов. Для любых двух городов, не соединённых дорогой, сумма количества дорог из первого города и количества дорог из второго города не меньше 118. Докажите, что король может выехать из столицы, проехать по всем городам и вернуться назад, не посетив никакой город дважды.

**8.** В средневековом государстве между замками проложена сеть непересекающихся дорог, идущих от замка к замку. Если перекрыть все дороги, ведущие к некоторому замку, то его можно захватить. Какое наименьшее число дорог заведомо достаточно перекрыть, чтоб захватить хотя бы один замок?

**9.** Президент Тридевятого Царства отдал приказ тысяче министров заняться строительством городов. Министры решили, что любая тройка министров объединится для строительства своего города (другие министры не участвуют в этом) и соединит его авиалинией с теми городами, в строительстве которых участвовал ровно один министр из этих трёх. По окончанию проекта по строительству городов и авиалиний Президент хочет объехать всю страну с визитом, побывав в каждом городе лишь один раз. Сможет ли он это сделать?

**10.** Группа из 10 000 жуликов сформировала 5000 банд по 25 жуликов в каждой (жулик может одновременно входить в несколько банд). Детективу хочется уничтожить все банды, для этого достаточно посадить в тюрьму по одному жулику из каждой банды. Докажите, что детективу достаточно посадить в тюрьму 1600 жуликов, чтобы уничтожить все банды.

**11.** В городе живёт 2015 человек. Вася узнал новость и решил её распространить, при этом другие жители города не знают эту новость. Известно, что на следующий день было совершено 2015 звонков и в результате эту новость узнали все. Напишите формулу для подсчёта количества возможных различных схем совершённых звонков (две схемы, отличающиеся порядком следования звонков, считаются одинаковыми).

**12.** В Техасе проживает 1000 бандитов. Известно, что они образовали банды по 45 человек в каждой. Шерифу поступила информация о том, что у любых двух банд есть по крайней мере один общий представитель. Помогите шерифу понять, какое наибольшее число банд находится в его штате.

**13.** Тысяча школьников города Новые Васюки вышли на парад. Известно, что дети ходят в 300 кружков. Остап Бендер хочет раздать учащимся пилотки двух цветов (красные и синие) так, чтобы среди представителей одного кружка разность (по модулю) между количеством людей в красных пилотках и в синих пилотках не превосходила 150. Докажите, что Остап Бендер может справиться с поставленной задачей.

**14.** Существует ли группа из $C_{7^3}^{7^2}$ человек, в которой нет $7C_{7^3}^{7}$ человек, попарно знакомых или незнакомых?

## Подсказки

1. Воспользуйтесь соотношением между количеством рёбер и количеством вершин в дереве (см. [1, задача 2.2.1]).
2. Вспомните (и докажите), чему равно число Рамсея $R(4,3)$ (см. [1, задача 4.1.1]).
3. Воспользуйтесь соотношением между кликовым числом и числом независимости графа (см. [1, задача 3.1.3]).
4. Воспользуйтесь конечностью чисел Рамсея (см. [1, задача 4.1.2]).
5. Воспользуйтесь формулой Кэли (см. [1, задача 2.2.3]).
6. Воспользуйтесь свойствами последовательности де Брёйна (см. [1, задача 2.5.7]).
7. Воспользуйтесь критерием Дирака гамильтоновости графа (см. [1, задача 2.6.2]).
8. Докажите, что в планарном графе существует вершина степени не более 5 (см. [1, задача 2.4.3]).
9. Воспользуйтесь гамильтоновостью графа 1-пересечений 3-элементных множеств $n$-элементного множества (см. [1, задача 2.6.5]).
10. Воспользуйтесь теоремой об оценке сверху для системы общих представителей (см. [4, теорема 3.1]).
11. Воспользуйтесь формулой для числа унициклических графов (см. [1, задача 2.2.5]).
12. Воспользуйтесь теоремой Эрдёша — Ко — Радо (см. [1, задача 5.1.3]).
13. Воспользуйтесь теоремой об оценке сверху уклонения в гиперграфе (см. [5, лекция 26]).
14. Воспользуйтесь нижней оценкой для чисел Рамсея, основанной на векторных пространствах (теорема Франкла — Уилсона, см. [5, лекция 17]).

## Список литературы

[1] *Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г. и др.* Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016.

[2] *Ильинский Д., Купавский А., Райгородский А., Скопенков А.* Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач) // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 162–181.

[3] *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 164–177.

[4] *Райгородский А. М.* Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2009.

[5] *Райгородский А. М.* Дискретный анализ, видеолекции.
http://lectoriy.mipt.ru/course/Maths-DiscreteMathematics-13L

Александр Андреевич Полянский, МФТИ, Технион, ИППИ РАН
alexander.polyanskii@yandex.ru

Павел Борисович Тарасов, МФТИ
tarasov.p.b@gmail.com