Нам пишут

Отклик на статью В. М. Журавлёва и П. И. Самовола «Экспоненциальные диофантовы уравнения и сумма цифр числа»

Н. Н. Осипов

В статье В. М. Журавлёва и П. И. Самовола [1] приведена задача 10 (с. 187):

Решить уравнение $3^n + 100 = 7^m$ *в натуральных числах.*

Данное уравнение имеет единственное решение $(m, n) = (3, 5)$. Показать это можно разными способами.

Первый способ. Пусть $m > 3$ и $n > 5$. Перепишем уравнение в виде

$$7^3(7^a - 1) = 3^5(3^b - 1), \tag{1}$$

где $a = m - 3$ и $b = n - 5$. Докажем, что (1) неразрешимо в натуральных числах.

Имеем $7^a \equiv 1 \pmod{3^5}$. Заметим, что $\mathrm{ord}_{3^5}(7) = 81$ (здесь и далее $\mathrm{ord}_x(y)$ обозначает *порядок числа* y *по модулю* x, т. е. наименьшее натуральное число z, для которого $y^z \equiv 1 \pmod{x}$). Значит, a делится на 81 и, как следствие, левая часть уравнения (1) должна делиться на $7^{81} - 1$. Одним из делителей числа $7^{81} - 1$ является 811. Значит, $3^b \equiv 1 \pmod{811}$. Далее заметим, что $\mathrm{ord}_{811}(3) = 810$, поэтому b делится на 810 и правая часть уравнения (1) должна делиться на число $3^{810} - 1$, делителем которого является 3889. Значит, $7^a \equiv 1 \pmod{3889}$. Наконец, $\mathrm{ord}_{3889}(7) = 1944 = 2^3 \cdot 3^5$. В частности, a делится на 3^5. Но $7^{(3^5)} - 1$ делится на 3^6, поэтому $7^a - 1$ должно делиться на 3^6, что противоречит (1). $\square$

Второй способ. Он основан на теории *уравнений Пелля* (см., например, [2, 3]). Ограничимся лишь наброском решения, оставляя детали заинтересованному читателю.

Как видно из сравнения по модулю 8, числа m и n должны быть нечётными, что позволяет записать уравнение в виде

$$7X^2 - 3Y^2 = 100, \tag{2}$$

где $X = 7^{(m-1)/2}$ и $Y = 3^{(n-1)/2}$. Уравнение (2) имеет несколько бесконечных серий решений $(X, Y) = (X_l, Y_l)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, но только три из них содержат решения, удовлетворяющие условию $Y \equiv 0 \pmod 3$. Эти серии таковы:

$$7X_l + Y_l\sqrt{21} = (140 - 30\sqrt{21})(55 + 12\sqrt{21})^l, \\ (49 \pm 9\sqrt{21})(55 + 12\sqrt{21})^l, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Для этих серий, как можно убедиться, из сравнения $Y \equiv 0 \pmod{3^3}$ вытекает сравнение $Y \equiv 0 \pmod{53}$. Таким образом, при $n \geqslant 7$ решений нет. $\square$

Замечание. Поскольку, как отмечено выше, n нечётно, второй способ фактически решает уравнение $3^n + 100 = 7X^2$.

Список литературы

[1] *Журавлёв В. М., Самовол П. И.* Экспоненциальные диофантовы уравнения и сумма цифр числа // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 167–199.

[2] *Barbeau E. J.* Pell's equation. New-York: Springer-Verlag, 2003.

[3] *Бугаенко В. О.* Уравнения Пелля. М.: МЦНМО, 2010.

Николай Николаевич Осипов, Сибирский федеральный университет (Красноярск)

nnosipov@rambler.ru