Этюд о рекуррентных соотношениях*

А. С. Волостнов, А. Б. Скопенков, Ю. Н. Яровиков

Мы демонстрируем важный метод работы с рекуррентными соотношениями на простых примерах его применения (§ 1). Один из них — «олимпиадная» задача (утверждение 1), возникшая из новой оригинальной детали в доказательстве *локальной леммы Ловаса* (§ 2). Мы приводим несколько определений и формулировок, поясняющих метод *разложения многочлена от оператора сдвига*, вместе со ссылками на более подробное изложение (§ 3). Формально § 3 не использует предыдущие параграфы, поэтому чтение заметки можно начинать и с него. Но лучший способ познакомиться с методом — разобрать простые примеры его применения (§ 1).

§ 1. Применения к «олимпиадной» задаче

Начнём с простых примеров, поясняющих основную идею.

Пример 1. Если $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_{k+2} \geqslant 2a_{k+1} - a_k$ при любом $k > 0$, то $a_k \geqslant k$ при любом k.

Доказательство. Неравенство $a_{k+2} \geqslant 2a_{k+1} - a_k$ можно переписать в виде $(a_{k+2} - a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k) \geqslant 0$. Обозначим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда $b_1 = 1$ и $b_{k+1} - b_k \geqslant 0$. Следовательно, $b_k \geqslant 1$ при любом k. Отсюда $a_{k+1} \geqslant a_k + 1$. Поскольку $a_1 = 1$, то $a_k \geqslant k$ при любом k, что и требовалось доказать. □

Пример 2. Если $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_{k+2} \geqslant 5a_{k+1} - 6a_k$ при любом $k > 0$, то $a_k > 0$ при любом k.

Доказательство. Неравенство $a_{k+2} \geqslant 5a_{k+1} - 6a_k$ можно переписать в виде $(a_{k+2} - 2a_{k+1}) - 3(a_{k+1} - 2a_k) \geqslant 0$. Обозначим $b_k = a_{k+1} - 2a_k$. Тогда $b_1 = 0$ и

$$b_{k+1} - 3b_k = a_{k+2} - 2a_{k+1} - 3(a_{k+1} - 2a_k) = a_{k+2} - 5a_{k+1} + 6a_k \geqslant 0,$$

* Эта заметка возникла из обсуждений на семинарах по дискретному анализу на факультете инноваций и высоких технологий МФТИ.

Второй автор поддержан грантом фонда Д. Зимина «Династия» и стипендией фонда Саймонса.

следовательно, $b_{k+1} \geqslant 3b_k$. Отсюда $b_k \geqslant 0$ при любом k, т. е. $a_{k+1} - 2a_k \geqslant 0$, $a_{k+1} \geqslant 2a_k$. Так как $a_1 > 0$, то $a_k > 0$ при любом k, что и требовалось доказать. $\square$

Следующее утверждение возникает при доказательстве локальной леммы Ловаса (§ 2). Оно предлагалось в качестве задачи на студенческой олимпиаде МФТИ в 2015 г. [4]. Мы приведём доказательство, развивающее идею доказательства примера 2.

Утверждение 1. *Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ и целое число $d \geqslant 2$. Известно, что $a_0 = a_1 = \ldots = a_d = 1$ и $a_{k+1} \geqslant a_k - a_{k-d}/(4d)$ при любом $k \geqslant d$. Тогда все числа a_k положительные.*

Доказательство. Обозначим

$$f(x) := x^{d+1} - x^d + \frac{1}{4d}.$$

Тогда $f(1) > 0$. Имеем

$$f\Big(\frac{d}{d+1}\Big) = -\frac{1}{d}\Big(1 + \frac{1}{d}\Big)^{-d-1} + \frac{1}{4d} < 0,$$

так как величина $(1 + 1/d)^{d+1}$ убывает и равна 4 при $d = 1$. Следовательно, у многочлена $f(x)$ есть корень α, где $0 < \alpha < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\alpha) = (x^{d+1} - \alpha^{d+1}) - (x^d - \alpha^d) = \\ &= (x - \alpha)\big(x^d - (1 - \alpha)x^{d-1} - \alpha(1 - \alpha)x^{d-2} - \ldots - \alpha^{d-1}(1 - \alpha)\big). \end{aligned}$$

Обозначим (аналогично разобранным примерам)

$$b_k := a_k - (1 - \alpha)a_{k-1} - \alpha(1 - \alpha)a_{k-2} - \ldots - \alpha^{d-1}(1 - \alpha)a_{k-d}.$$

Тогда

$$0 \leqslant a_{k+1} - a_k + \frac{a_{k-d}}{4d} = b_{k+1} - \alpha b_k$$

для любого k. Здесь неравенство выполнено по условию, а равенство — ввиду вышеприведённого разложения для $f(x)$.

Так как $0 < \alpha < 1$, отсюда по индукции $b_k > 0$ для любого k. Из определения b_k по индукции выводим, что $a_k > 0$. $\square$

Замечание. Немного более громоздкое изложение получается при помощи языка *формальных степенных рядов* [4, первое решение задачи 5]. Ещё одно доказательство [2, задача 6.2.15.c], [4, второе решение задачи 5] основано на доказательстве неравенства $a_{k+t} \geqslant a_k(1 - 1/d)^t$ для любых $k, t \geqslant 0$. До этой оценки для чисел a_n трудно догадаться (но можно догадаться, основываясь на развиваемой идее!).

§ 2. Применение к доказательству локальной леммы Ловаса

Обсуждение понятия независимости, его применения к доказательствам существования, а также вероятностного языка в комбинаторике см. в [3], [2, § 6.2]. Здесь мы сразу приведём окончательные формулировки.

Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если $|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|$. При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M.

Подмножество A конечного множества M называется *независимым от набора подмножеств* $B_1, \ldots, B_k \subset M$, если A независимо с любым подмножеством, являющимся пересечением нескольких (возможно, одного) множеств из $B_1, \ldots, B_k$.

Локальная лемма Ловаса в симметричной форме. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества. Пусть для некоторого d и любого k*

- *доля подмножества A_k не меньше $1 - 1/(4d)$,*
- *среди данных подмножеств существует набор из не менее чем $n - d$ подмножеств, от которого A_k не зависит.*

Тогда $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Замечание. Приводимое доказательство леммы похоже на доказательство в [3], [2, § 6.2]. Отличие, во-первых, в том, что явно выделено нижеприведённое утверждение 2, позволяющее *свести* лемму к утверждению 1 (а не проводить доказательство аналитического утверждения 1 на комбинаторном языке внутри доказательства леммы). Во-вторых, в том, что мы по-другому доказываем утверждение 1 (в § 1; см. замечание в конце § 1).

Утверждение 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_{k+1}$ — подмножества конечного множества M. Если A_{k+1} не зависит от набора $A_1, \ldots, A_{k-d}$, то*

$$|A_1 \cap \ldots \cap A_k| - |A_1 \cap \ldots \cap A_{k+1}| \leqslant |A_1 \cap \ldots \cap A_{k-d}| \cdot \left(1 - \frac{|A_{k+1}|}{|M|}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}|A_1 \cap \ldots \cap A_k| - |A_1 \cap \ldots \cap A_{k+1}| &= |A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}| = \\ &= |A_1 \cap \ldots \cap A_{k-d} \cap \overline{A_{k+1}} \cap A_{k-d+1} \cap \ldots \cap A_k| \leqslant \\ &\leqslant |A_1 \cap \ldots \cap A_{k-d} \cap \overline{A_{k+1}}| \overset{(*)}{=} |A_1 \cap \ldots \cap A_{k-d}| \cdot \frac{|\overline{A_{k+1}}|}{|M|} = \\ &= |A_1 \cap \ldots \cap A_{k-d}| \cdot \left(1 - \frac{|A_{k+1}|}{|M|}\right).\end{aligned}$$

Здесь $\overline{A_{k+1}}$ — дополнение подмножества A_{k+1}; равенство $(*)$ выполнено в силу независимости подмножества A_{k+1} от набора $A_1, \ldots, A_{k-d}$. $\square$

Доказательство локальной леммы Ловаса. Обозначим через M данное конечное множество. Для каждого k обозначим

$$a_k := \begin{cases} \max\Bigl\{\Bigl|\bigcap\limits_{i\in S} A_i\Bigr|/|M| \colon S\subset\{1,2,\ldots,n\},\ |S|=k\Bigr\}, & k\geqslant 1,\\ 1, \quad k\leqslant 0. \end{cases}$$

Для любого (одного!) k предположим без ограничения общности, что

$$\frac{|A_1\cap\ldots\cap A_k|}{|M|} = a_k$$

и что A_{k+1} не зависит от набора $A_1, \ldots, A_{k-d}$. Тогда

$$a_k - a_{k+1} \leqslant \frac{|A_1\cap\ldots\cap A_k| - |A_1\cap\ldots\cap A_{k+1}|}{|M|} \leqslant \\ \leqslant \frac{|A_1\cap\ldots\cap A_{k-d}|}{|M|}\cdot\Bigl(1-\frac{|A_{k+1}|}{|M|}\Bigr) \leqslant \frac{a_{k-d}}{4d},$$

где второе неравенство справедливо по утверждению 2. По утверждению 1 получаем $|A_1\cap\ldots\cap A_n| = a_n|M| > 0$. $\square$

§ 3. Многочлены от оператора сдвига (набросок)

Будем рассматривать *последовательности* вещественных чисел и *отображения* множества всех последовательностей в себя.

Пусть $E\{a_n\} := \{a_n\}$ — тождественный оператор. *Сдвигом* последовательности $\{a_n\}$ называется последовательность $Ta_n := a_{n+1}$. *Последовательностью разностей* последовательности $\{a_n\}$ называется последовательность $\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$.

На множестве отображений (множества всех последовательностей в себя) естественно определяются операции суммы и умножения на число. Тогда $\Delta = T - E$.

Упражнение. (1) Приведите пример некоммутативности композиции отображений.

(2) Любое ли отображение имеет обратное по сложению? А по композиции?

(3) Выполняется ли ассоциативность для умножения отображений на числа? А для композиции отображений?

(4) Выполняется ли дистрибутивность для сложения и композиции отображений?

Несмотря на некоммутативность композиции отображений, степени одного отображения коммутируют между собой. Поэтому *многочлен* от отображения определён. Значит, рекуррентное уравнение

$$c_k a_{n+k} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_0 = 0$$

можно записать в виде

$$(c_k T^k + \ldots + c_1 T + c_0 E)\{a_n\} = 0.$$

Метод *разложения многочлена от оператора сдвига* заключается в разложении на множители многочлена $c_k t^k + \ldots + c_1 t + c_0$. Этим методом фактически доказаны примеры 1, 2 и утверждение 1: разобранные доказательства фактически используют разложение на множители многочленов $x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 5x + 6$ и $x^{d+1} - x^d + 1/(4d)$. Этим методом можно доказать следующий замечательный результат, полезнейший для приложений.

Теорема о решениях линейного однородного рекуррентного уравнения. *Пусть P — многочлен, корни которого — числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ с кратностями $l_1, \ldots, l_k$. Если $P(T)\{a_n\} = 0$, то существуют такие многочлены $f_1, \ldots, f_k$, что $\deg f_j < l_j$ и $a_n = f_1(n)\lambda_1^n + \ldots + f_k(n)\lambda_k^n$.*

Эта теорема несложно выводится из следующих утверждений.

(1) *Метод вариации постоянной.* Если $P(T)(T - \lambda E)^l a_n = 0$ для многочлена P и целого $l > 0$, то для последовательности $b_n := a_n \lambda^{-n}$ имеем $P(T)\Delta^l b_n = 0$.

(2) Если λ — корень многочлена P кратности l (у P могут быть и другие корни), то $P(T)[f(n)\lambda^n] = 0$ для любого числа n и многочлена f степени меньше l.

(3) Если $\Delta^l b_n = \lambda^n n^k$ для некоторых чисел $l, k, \lambda \geqslant 0$, то $b_n = g(n)\lambda^n + h(n)$ для некоторых многочленов h степени меньше l, а также g степени не больше $l + k$ при $\lambda = 1$ и степени не больше k при $\lambda \neq 1$.

(4) Для любых различных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ и $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{Z}_+$ последовательности $n^i \lambda_j^n$, $j = 1, \ldots, k$, $i = 0, \ldots, l_j$, линейно независимы.

(*Указание*: рассмотрите предел при $n \to \infty$.)

Предлагаем попытаться самостоятельно доказать эти утверждения. О рассмотренных вопросах см. [1, гл. V, § 4].

Список литературы

[1] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Эдиториал УРСС, 2012.

[2] *Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г. и др.* Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016.
http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf

[3] *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 164–177. http://arxiv.org/abs/1411.3171

[4] *Карасёв Р. Н.* Студенческая олимпиада по математике МФТИ. http://rkarasev.ru/common/upload/2015-05-sol.pdf

Алексеевич Сергеевич Волостнов, МФТИ
gyololo@rambler.ru

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ
www.mccme.ru/~skopenko

Юрий Николаевич Яровиков, МФТИ
yu-rovikov@ya.ru