По мотивам задачника

О минимальных прямых и эллипсах Штейнера

А. А. Заславский

Пусть дан неравносторонний треугольник ABC. Его можно перевести в правильный аффинным преобразованием. Обратное преобразование переводит описанную и вписанную окружности правильного треугольника в эллипсы, гомотетичные друг другу относительно общего центра — центра тяжести данного треугольника. Эти эллипсы называются *эллипсами Штейнера*. Известны следующие экстремальные свойства эллипсов Штейнера: вписанный эллипс имеет наибольшую площадь среди всех эллипсов, вписанных в данный треугольник, а описанный — наименьшую площадь среди всех описанных. Целью данной заметки является вывод ещё одного свойства эллипсов Штейнера. Однако двигаться к этой цели мы будем обходным путём.

Сначала рассмотрим следующую известную задачу.

На плоскости даны n точек. Найти прямую, сумма квадратов расстояний до которой от данных точек минимальна. Такую прямую будем называть *минимальной прямой*.

Примечание. В математической статистике минимальная прямая называется главной компонентой. Это прямая, для которой набор проекций данных точек имеет наибольшую дисперсию. Известна также механическая интерпретация: если поместить в данные точки одинаковые массы, то минимальная прямая будет осью, относительно которой полученная система масс имеет наименьший момент инерции.

Утверждение 1. *Минимальная прямая проходит через центр тяжести данных точек.*

Доказательство. Будем рассматривать плоскость как комплексную, причём начало координат поместим в центр тяжести данных точек (этого соглашения будем придерживаться и в дальнейшем). Тогда этим точкам будут соответствовать комплексные числа $z_1, \ldots, z_n$, сумма которых равна нулю.

Рассмотрим прямую, параллельную действительной оси, с уравнением

$$z - \bar{z} = 2it.$$

Расстояние от точки z_j до этой прямой равно $\left|\dfrac{z_j - \bar{z}_j}{2i} - t\right|$. Следовательно, сумма квадратов равна

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{z_j - \bar{z}_j}{2i}\right)^2 + nt^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{z_j - \bar{z}_j}{2i}\right)^2. \tag{1}$$

Поскольку направление осей можно выбрать произвольно, это означает, что сумма квадратов расстояний до любой прямой, не проходящей через центр тяжести, больше, чем до параллельной ей прямой, проходящей через него. Заметим, что (1) можно интерпретировать как частный случай теоремы Гюйгенса — Штейнера о моментах инерции. □

Итак, минимальную прямую надо искать среди прямых, проходящих через начало координат. Зададим произвольную такую прямую параметрическим уравнением $z = te^{i\varphi}$, $t \in R$. Расстояние от точки z_j до этой прямой найдём, минимизируя функцию $(z_j - te^{i\varphi})(\bar{z}_j - te^{-i\varphi})$ по t. Просуммировав затем по j, получаем, что сумма квадратов равна

$$\frac{1}{4}\Big(2\sum_j z_j\bar{z}_j - e^{-2i\varphi}\sum_j z_j^2 - e^{2i\varphi}\sum_j \bar{z}_j^2\Big).$$

Следовательно, нахождение минимальной прямой эквивалентно определению максимума функции

$$f(\varphi) = e^{-2i\varphi}\sum z_j^2 + e^{2i\varphi}\sum \bar{z}_j^2.$$

Если $\sum z_j^2 = 0$, эта функция не зависит от φ. В противном случае выберем направление осей так, чтобы $\sum z_j^2$ было действительным положительным числом (это условие будем считать выполненным и в дальнейшем). Тогда максимум f достигается при $\varphi = n\pi$ и минимальной прямой является действительная ось. Таким образом, доказано

Утверждение 2. *Либо минимальной является любая прямая, проходящая через центр тяжести данных точек* (*такую систему точек будем называть вырожденной*), *либо существует единственная минимальная прямая.* □

Для невырожденной системы точек справедлив следующий факт, о котором автору сообщила В. Ипатова, в то время 11-классница.

Утверждение 3. *Существуют две точки, обладающие следующим свойством: сумма квадратов расстояний от данных точек до любой проходящей через такую точку прямой постоянна. Эти точки симметричны относительно центра тяжести данных точек и лежат на прямой, перпендикулярной минимальной.*

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве предыдущего утверждения, получаем, что искомая точка z_0 должна удовлетворять соотношению

$$\sum_j (z_j - z_0)^2 = 0,$$

которое с учётом равенства $\sum z_j = 0$ приводится к виду

$$z_0^2 = -\frac{1}{n}\sum_j z_j^2.$$

Так как $\sum z_j^2 > 0$, этому равенству удовлетворяют две точки, лежащие на мнимой оси и симметричные относительно начала координат. □

Будем теперь искать такую точку z_{n+1}, при добавлении которой к данным точкам получается вырожденная система.

Утверждение 4. *Существуют две точки z_{n+1}, обладающие указанным свойством. Эти точки лежат на прямой, перпендикулярной минимальной, и симметричны относительно центра тяжести данных точек.*

Доказательство. Так как при добавлении к точкам $z_1, \ldots, z_n$ точки z_{n+1} центр тяжести системы смещается в точку $\frac{z_{n+1}}{(n+1)}$, искомая точка удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - \frac{z_{n+1}}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1}z_{n+1}\right)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$z_{n+1}^2 = -\frac{n+1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j^2 = (n+1)z_0^2. \qquad \square$$

Перейдём теперь к приложению полученных результатов для случая $n = 3$. Как и прежде, будем считать, что данным точкам соответствуют комплексные числа a, b, c, причём $a + b + c = 0$. Прежде всего отметим следующий факт.

Утверждение 5. *Система из трёх точек вырождена тогда и только тогда, когда эти точки являются вершинами правильного треугольника.*

Доказательство. Вырожденность системы из точек a, b, c равносильна равенству $a^2+b^2+c^2=0$. Но тогда

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2}=0$$

и по теореме Виета числа a, b, c являются корнями уравнения $z^3-abc=0$, т. е. вершинами правильного треугольника. □

Теперь мы наконец можем сформулировать наш основной результат.

Теорема. *Минимальная прямая неравностороннего треугольника содержит большую ось его эллипсов Штейнера.*

Доказательство. Известно (см., например, [1, с. 54–55]), что фокусы вписанного эллипса Штейнера треугольника с вершинами a, b, c являются корнями производной многочлена $(z-a)(z-b)(z-c)$. Значит, при $a+b+c=0$ они удовлетворяют уравнению

$$3z^2=-(ab+bc+ca)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

т. е. лежат на минимальной прямой. □

Следствие. *Точки z_0, z_{n+1}, определённые в утверждениях* 3, 4, *лежат на малой оси эллипсов Штейнера, а расстояние от них до центра равно соответственно $f/\sqrt{2}$ и $f\sqrt{2}$, где f — расстояние между центром и фокусом описанного эллипса Штейнера.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из приведённого уравнения для фокусов с учётом формул для z_0 и z_{n+1}, доказанных в утверждениях 3, 4. □

Последнее утверждение можно сформулировать в виде следующей задачи.

Задача [2, с. 250, задача 6]. Пусть точка D лежит на малой оси эллипсов Штейнера треугольника ABC на расстоянии $f\sqrt{2}$ от его центра, где f — расстояние от центра описанного эллипса Штейнера до его фокуса. Докажите, что C лежит на малой оси эллипсов Штейнера треугольника ABD.

(*А. А. Заславский*)

Интересно, можно ли решить эту задачу, не повторив весь пройденный нами путь?

В заключение приведём набросок другого доказательства теоремы. Введём систему координат, в которой описанный эллипс Штейнера имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда вершины треугольника имеют координаты (ax_i, by_i), где (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3,$ — координаты вершин некоторого правильного треугольника, вписанного в единичную окружность. По утверждению 1 минимальная прямая проходит через начало координат, следовательно, её можно задать параметрическими уравнениями $x = \alpha t$, $y = \beta t$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Найдя расстояния от вершин треугольника до этой прямой, получим задачу нахождения условного экстремума относительно (α, β). Можно показать, что её решением является собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} a^2 \sum x_i^2 & ab \sum x_i y_i \\ ab \sum x_i y_i & b^2 \sum y_i^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку вершины правильного треугольника образуют вырожденную систему с нулевой суммой, эта матрица диагональна. Значит, минимальная прямая содержит ось эллипса.

Заметим, что это рассуждение переносится на случай произвольной размерности, т. е. верно следующее обобщение теоремы: минимальная прямая вершин симплекса содержит наибольшую из осей описанного около него эллипсоида, который при аффинном преобразовании, переводящем симплекс в правильный, переходит в сферу. Напротив, утверждения 3 и 4 верны только в плоском случае.

Список литературы

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

[2] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016.

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН

alzasl@yandex.ru