О разбиениях многогранника на выпуклые части

Р. Н. Карасёв

§ 1. Введение

В нашей статье мы обсудим факты, относящиеся к разбиению выпуклых многогранников в евклидовом пространстве произвольной размерности. Для начала мы сформулируем их как утверждения про многоугольники на плоскости. Читатель может попробовать доказать их самостоятельно, прежде чем продолжить чтение статьи; но это необязательно. Далее для этих утверждений мы сформулируем многомерные аналоги и докажем их; заметим, что даже двумерные утверждения у нас будут доказаны с выходом в пространство большей размерности.

Эта статья развивает тему задачи 6.9 (автор В. В. Произволов) из «Математического просвещения» [2]. Об источниках и обобщениях этой задачи см. Дополнение к задаче 6.9, с. 274–275.

Утверждение 1.1. *Пусть участок земли имеет форму выпуклого m-угольника, его стороны занумерованы. Внутри участка вбиты менее m столбов. Тогда участок можно разрезать на m выпуклых многоугольников $X_1, \ldots, X_m$ так, что каждая часть X_i пересекает границу участка в точности по стороне номер i и ни один столб не оказывается строго внутри ни одной из частей X_i.*

Утверждение 1.2. *Пусть участок земли имеет форму выпуклого m-угольника, его стороны занумерованы и на участке рассыпаны N монет. Тогда для любых положительных чисел $n_1, \ldots, n_m$, в сумме дающих N, участок можно разрезать на m выпуклых многоугольников $X_1, \ldots, X_m$ так, что в части X_i, включая её границу, будет не менее n_i монет.*

Утверждение 1.3. *Пусть участок земли имеет форму выпуклого m-угольника, его стороны занумерованы. По участку распределено месторождение золота, пусть всего золота на участке $Z > 0$. Тогда для любых положительных чисел $z_1, \ldots, z_m$, в сумме дающих Z, участок* *можно разрезать на m выпуклых многоугольников $X_1, \dots, X_m$ так, что в части X_i будет ровно z_i золота.*

Столбы и монеты в предыдущих утверждениях следует считать точечными. В утверждении 1.3 может быть не вполне ясно, что такое *распределение золота на участке*, далее это будет пояснено при формулировке многомерного варианта — теоремы 2.4; вообще различие между утверждениями 1.2 и 1.3 чисто техническое. Следующее утверждение на плоскости мы для большей строгости сформулируем уже в терминах точек:

Утверждение 1.4. *Пусть на плоскости дан выпуклый m-угольник. Его вершины и ещё несколько точек внутри него покрашены в синий цвет, ещё менее m точек внутри него покрашены в красный цвет, при этом никакие три из покрашенных точек не лежат на одной прямой. Тогда существует необязательно выпуклый многоугольник с вершинами во всех синих точках, содержащий все красные точки.*

Здесь *необязательно выпуклым многоугольником* мы называем замкнутую область, ограниченную замкнутой ломаной без самопересечений.

§ 2. Многомерные формулировки

Структура наших рассуждений будет такова, что даже для доказательства утверждений на плоскости понадобится выход в пространство большей размерности. Поэтому и сами утверждения нам естественно сформулировать в многомерном случае. Читатель может представлять себе случай размерности 3, в котором эти утверждения вполне имеют смысл и нетривиальны.

Нам будет удобно определить *выпуклый многогранник* как ограниченное пересечение конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^n$, где полупространство — это множество решений нетривиального линейного неравенства $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$.

В литературе обычно выпуклый многогранник определяется иначе — как выпуклая оболочка конечного множества точек [1]. Эквивалентность этих двух определений неочевидна и требует дополнительных соображений, которые мы здесь приводить не будем. Читатель может поразмышлять об этом самостоятельно или открыть учебник [5, с. 52 и след.] или [8, с. 55].

Размерностью выпуклого многогранника $X \subset \mathbb{R}^n$ будем называть минимальное целое k, для которого X можно поместить в k-мерное аффинное подпространство $A^k \subseteq \mathbb{R}^n$. Для выпуклого многогранника $X \subset \mathbb{R}^n$ раз-

[1] *Выпуклая оболочка множества* $V \subset \mathbb{R}^n$ — это множество всевозможных *выпуклых комбинаций* элементов V, обозначаемое $\operatorname{conv} V = \left\{\sum_{v\in V} a_v v\colon \sum_{v\in V} a_v = 1 \text{ и все } a_v \geqslant 0\right\}$.

мерности n рассмотрим подпространства $\{H_i\}$, пересечением которых он является. Если набор этих подпространств минимален, т. е. при выкидывании из него некоторого подпространства пересечение увеличивается, то *гипергранями* X мы будем называть множества $F_i = X \cap \partial H_i$, где ∂H_i — гиперплоскость, ограничивающая H_i. Следующие два утверждения мы не доказываем и даём в качестве упражнения.

Упражнение 2.1. Докажите, что гиперграни n-мерного выпуклого многогранника имеют размерность $n-1$.

Упражнение 2.2. Докажите, что однозначно определён минимальный набор полупространств, дающий в пересечении данный выпуклый многогранник размерности n.

Сформулируем теперь многомерное обобщение утверждения 1.1.

Теорема 2.3. *Пусть X — n-мерный выпуклый многогранник, и пусть $F_1, \ldots, F_m$ — его гиперграни. Предположим, что внутри X дано конечное множество V из менее чем m точек. Тогда X можно разбить на выпуклые многогранники $X_1, \ldots, X_m$ так, что каждый X_i будет пересекать границу многогранника по соответствующей гиперграни F_i и ни одна точка множества V не попадёт внутрь ни одной части X_i.*

Далее нам надо строго сформулировать многомерное обобщение утверждения 1.3. Предположим, что в выпуклом многограннике X задана какая-то плотность $\rho \geqslant 0$ (её можно считать интегрируемой по Лебегу или хотя бы по Риману) и она нормирована условием $\int_X \rho(x)\, dx = 1$. Будем говорить, что в X распределена *единичная масса* с данной плотностью. Тогда нужное нам утверждение будет звучать так:

Теорема 2.4. *Пусть X — выпуклый многогранник и $F_1, \ldots, F_m$ — его гиперграни. Предположим, что в X задана плотность ρ единичной полной массы. Пусть также заданы положительные числа $y_1, \ldots, y_m$ с единичной суммой. Тогда X можно разбить на выпуклые многогранники $X_1, \ldots, X_m$ так, что каждый X_i будет пересекать границу многогранника по соответствующей гиперграни F_i и масса части X_i будет равна y_i.*

Мы также выведем многомерное обобщение утверждения 1.4 о существовании необязательно выпуклого многогранника с заданным множеством вершин, содержащего данное конечное множество точек:

Следствие 2.5. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ дан выпуклый многогранник с m гипергранями. Его вершины и ещё несколько точек внутри него покрашены в синий цвет, ещё менее m точек внутри него покрашены в красный цвет, при этом никакие $n+1$ из покрашенных точек не лежат в одной* *гиперплоскости. Тогда существует необязательно выпуклый многогранник с вершинами во всех синих точках, содержащий все красные точки.*

Нужно пояснить, что такое *необязательно выпуклый многогранник* в размерности большей двух.

В данном случае под необязательно выпуклым многогранником будем подразумевать такое объединение выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^n$, которое кусочно-линейно гомеоморфно n-мерному симплексу. Наглядные рассуждения об определении необязательно выпуклого многогранника читатель может найти в [1]. Определение понятия «кусочно-линейный гомеоморфизм» содержится в [4, § 5]. А тем, кто проявит серьёзный интерес к кусочно-линейной топологии, мы рекомендуем классический учебник [3].

При таком определении всякий выпуклый многогранник является многогранником[2)].

Заметим также, что понятие *вершина многогранника* в невыпуклом случае тоже требует своего определения[3)]. Для следствия 2.5 граница получающегося в его доказательстве многогранника будет состоять из выпуклых $(n-1)$-мерных многогранников, и утверждение теоремы следует понимать так, что в качестве вершин этих многогранников используются все синие точки и только они.

§ 3. Доказательство теоремы 2.4 о делении меры

Воспользуемся классическим способом свести утверждение о произвольном выпуклом многограннике к утверждению о самом простом из возможных многогранников — о симплексе.

Определение 3.1. Выпуклая оболочка $n+1$ точки в $\mathbb{R}^n$ называется *симплексом*, если она не содержится ни в каком аффинном подпространстве размерности менее n.

Упражнение 3.2. Если $v_0, v_1, \ldots, v_n$ — вершины симплекса S, то всякая точка $x \in S$ однозначно задаётся в виде выпуклой комбинации

$$x = x_0v_0 + x_1v_1 + \ldots + x_nv_n, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1.$$

Упорядоченный набор чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называется *барицентрическими координатами* в симплексе.

---

2) Хотя и это утверждение надо строго проверить!

3) Точка p многогранника P называется его *вершиной*, если для любой прямой ℓ найдётся такая сколь угодно близкая к p точка $p' \in P$, что на прямой $\ell' \ni p'$, параллельной ℓ, найдётся сколь угодно близкая к p' точка, не принадлежащая P.

Обсуждение понятия вершины многогранника см. в [7].

Упражнение 3.3. Докажите, что симплекс имеет $n+1$ гипергрань.

Мы будем использовать следующий исключительно полезный факт:

Лемма 3.4. *Всякий выпуклый многогранник является сечением симплекса некоторым аффинным подпространством. Более точно: всякий выпуклый многогранник можно представить в виде сечения симплекса большей размерности так, что каждая гипергрань симплекса в сечении будет давать гипергрань многогранника, а не вырождаться в грань меньшей размерности или пустое множество.*

Это известное и полезное утверждение. Например, его можно доказать, воспользовавшись полярностью ([5, § 2.3] или [8, с. 145]) и сведя утверждение о сечении к утверждению о проекции.

Доказательство теоремы 2.4. С учётом предыдущей леммы будем считать $X = L \cap S$ для некоторого аффинного подпространства $L \subseteq \mathbb{R}^n$ и симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$, а его гиперграни обозначим $F_0, \dots, F_n$, здесь $n+1$ равно m из условия теоремы. (Гиперграни здесь занумерованы по-другому, это не вызовет путаницы.)

Разбиения симплекса на выпуклые многогранники $C_0, \dots, C_n$ будем делать очень простым способом: выбирать точку в симплексе x и брать в качестве C_i выпуклую оболочку x и F_i, т. е. пирамиду с основанием F_i и вершиной x. Очевидно, что для исходного многогранника $X = L \cap S$ (L — некоторое аффинное подпространство) множества $X_i = C_i \cap L$ будут давать разбиение требуемого в теореме вида. Пусть вершины симплекса — это $v_0, \dots, v_n$ (нумерацию зафиксируем так, чтобы $v_i \notin F_i$). Представим некоторую точку $x \in S$ в барицентрических координатах:

$$x = x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n.$$

Если на сечении $L \cap S$ задана некоторая плотность, то построим отображение $f\colon S \to S$, в барицентрических координатах заданное формулой

$$f(x)_i = \int\limits_{L \cap C_i(x)} \rho(t)\, dt, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

т. е. координаты являются массами частей $L \cap C_i(x)$. Ясно, что

$$f(x)_0 + f(x)_1 + \ldots + f(x)_n = 1$$

и числа $f(x)_i$ — это барицентрические координаты какой-то точки в S. Отображение f обладает важным свойством: если $x_i = 0$, то соответствующее $y_i = 0$, потому что размерность $L \cap C_i(x)$ при $x_i = 0$ становится меньше размерности L и масса $L \cap C_i(x)$ обнуляется. Определим *грань симплекса* (более общее понятие, чем гипергрань) как множество решений некоторой системы уравнений $x_i = 0$, $i \in I$ для некоторого $I \subset \{0, 1, \ldots, n\}$. С помощью понятия грани мы можем переформулировать свойства построенного отображения: f непрерывно и *переводит каждую грань симплекса в неё саму.*

Теорема 2.4 теперь свелась к сформулированной ниже теореме 3.5. □

Теорема 3.5. *Если отображение симплекса $f\colon S \to S$ непрерывно и переводит каждую грань симплекса в неё саму, то оно сюръективно, $f(S) = S$.*

По существу эта теорема эквивалентна классической теореме [13]:

Теорема 3.6 (Кнастер — Куратовский — Мазуркевич, 1929). *Если n-мерный симплекс S с гипергранями $F_0, \ldots, F_n$ так покрыт множествами $V_0, \ldots, V_n$, что $F_i \cap V_i = \varnothing$ для любого i и либо все V_i открыты, либо все они замкнуты, то $\bigcap_{i=0}^{n} V_i \neq \varnothing$.*

Эта теорема имеет глубокие связи с другими классическими вопросами, такими как определение размерности[4)], теорема Брауэра о неподвижной точке [9] и т. п. Интересующемуся читателю рекомендуем книги [6, 14] про теоремы такого типа и их многочисленные приложения в комбинаторике.

Сведение теоремы 3.5 к теореме 3.6. Пусть дана точка $z \in S$ с барицентрическими координатами $z_0, z_1, \ldots, z_n$ и мы хотим найти такое x, что $f(x) = z$. Будем считать все координаты z_i положительными, иначе мы можем перейти в грань симплекса S, отбросив нулевые координаты, и воспользоваться индукцией по размерности; здесь важно, что f переводит грани в грани.

Пусть $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — барицентрические координаты точки $f(x)$. Положим $V_i = \{x \in S\colon y_i(x) \geqslant z_i\}$. Эти множества замкнуты и удовлетворяют условиям теоремы 3.6, а значит, они должны иметь общую точку. Но так как сумма y_i равна сумме z_i, то в этой общей точке $y_i(x) = z_i$, как мы и хотели. □

Отметим, что на самом деле можно сначала доказать теорему 3.5, заметив по индукции, что при данных условиях отображение f имеет степень один, а потом уже вывести из неё теорему 3.6, как это сделано в [10, Lemma 9.2]. Но мы приведём более элементарное рассуждение для доказательства теоремы Кнастера — Куратовского — Мазуркевича, основанное на другом классическом факте [16].

[4)] Подмножество в $\mathbb{R}^m$ называется *n-мерным*, если любое его достаточно мелкое открытое покрытие покрывает какую-то его точку не менее $n + 1$ раза.

Триангуляция n-мерного симплекса — такое его разбиение на n-мерные симплексы, что любые два из них пересекаются по их общей грани[5]. В этом определении грань может иметь любую размерность; если размерность равна -1, то грань является пустым множеством.

Теорема 3.7 (Шпернер, 1928). *Вершины n-мерного симплекса помечены числами $0, 1, \ldots, n$. Вершины некоторой его триангуляции помечены теми же числами таким образом, что любая вершина на $(n-1)$-мерной грани исходного симплекса, противолежащей его вершине k, помечена числом, отличным от k. Тогда обязательно существует симплекс триангуляции, на вершинах которого есть все числа от 0 до n. Более того, количество таких симплексов нечётно.*

Набросок вывода теоремы 3.6 из теоремы 3.7. Каждому множеству V_i сопоставим определённый цвет. В триангуляции симплекса S покрасим каждую вершину каждого из маленьких симплексов в цвет одного из V_i, которым она принадлежит. Тогда на грани F_i отсутствует цвет множества V_i. По теореме 3.7 найдётся маленький симплекс, в вершинах которого присутствуют все цвета, т. е. он задевает все V_i. Будем брать всё более мелкие триангуляции. Переходя к пределу и используя компактность симплекса S, мы получим общую для всех V_i точку, если все эти множества замкнуты. Случай открытых множеств можно вывести из случая замкнутых, читатель может проделать это самостоятельно; на самом деле мы случай открытых множеств не использовали. $\square$

Теорема Шпернера на плоскости может быть известна некоторым читателям. Мы докажем её классическим способом через рассуждение с *комнатами и дверями*, которое очень наглядно в плоском случае и работает в произвольной размерности.

Доказательство теоремы 3.7. Используем индукцию по размерности. Нульмерный случай очевиден. Далее рассмотрим гипергрань F_n, она является симплексом размерности $n-1$, и на ней нет цвета n. Значит, на ней есть нечётное число маленьких $(n-1)$-мерных симплексов с цветами $0, 1, \ldots, n-1$. Посмотрим на триангуляцию всего S, назовём её маленькие n-мерные симплексы *комнатами*. Комнаты разделены *стенками* — $(n-1)$-мерными симплексами. Стенку мы заменим на *дверь*, если на её вершинах стоят цвета $0, 1, \ldots, n-1$ в некотором порядке. Тогда

(a) количество дверей, ведущих за пределы симплекса S, нечётно (по предположению индукции);

[5] Заметим, что определение триангуляции в `https://ru.wikipedia.org/wiki/лемма_Шпернера` некорректно.

(б) любая разноцветная комната имеет ровно одну дверь;

(в) любая из остальных комнат либо не имеет ни одной, либо имеет две двери.

Рассмотрим граф, вершины которого — комнаты, а рёбра — двери между ними. Сложив количества дверей в каждой комнате, ввиду (а) получим нечётную сумму. Ввиду (в) существуют разноцветные комнаты, а ввиду (б) их количество нечётно. □

Приведённое рассуждение с комнатами и дверями на самом деле можно рассматривать как некоторое утверждение о степени отображения, см. статью [15], где эта мысль должным образом развивается.

§ 4. Доказательство утверждений 2.3 и 2.5 о конечном множестве точек

Вывод теоремы 2.3 из теоремы 2.4. Пусть $k = |V| < m$. Заменим каждую точку $v \in V$ на плотность ρ_v, равномерно распределённую по шарику радиуса ε с центром в v и имеющую интеграл, равный $1/k$. Сложим все такие плотности и получим плотность ρ, годящуюся для теоремы 2.4. Применим эту теорему с равными весами $y_i = 1/m < 1/k$. Тогда мы получим требуемое разбиение X на $X_1(\varepsilon), \dots, X_m(\varepsilon)$, в котором

$$\int\limits_{X_i(\varepsilon)} \rho(x)\, dx = \frac{1}{m}$$

при всех $i = 1, \dots, m$. Их этого следует, что ни одно из множеств $X_i(\varepsilon)$ не содержит шара с центром в $v \in V$ радиуса ε, иначе интеграл был бы не менее $1/k > 1/m$.

Теперь нам надо устремить ε к нулю и воспользоваться тем, что все наши разбиения параметризовались точками некоторого симплекса размерности $m-1$, т. е. множество всех разбиений оказывается компактно. Таким образом, мы можем взять последовательность $\varepsilon_n \to 0$ так, что $X_i(\varepsilon_n) \to X_i$ в некотором разумном смысле, например, в смысле метрики Хаусдорфа (см. определение в `https://ru.wikipedia.org/wiki/Метрика_Хаусдорфа`). В пределе мы увидим, что никакое X_i не сможет содержать никакую точку $v \in V$ внутри себя. □

Для доказательства следствия 2.5 нам понадобится ещё одна лемма:

Лемма 4.1. *Пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество точек в общем положении, $|W| \geqslant n + 1$, F — гипергрань в* $\operatorname{conv} W$. *Тогда существует многогранник с вершинами W, одна из граней которого совпадает с F.*

Доказательство. Проведём индукцию по $|W|$. При $|W| = n+1$ всё очевидно. Будем обозначать через $\operatorname{int} S$ внутренность множества S.

Если $\operatorname{int}\operatorname{conv} W \cap W = \varnothing$, то $\operatorname{conv} W$ и есть искомый многогранник. Иначе пусть F' — другая грань $\operatorname{conv} W$ и

$$W' = (F' \cup \operatorname{int}\operatorname{conv} W) \cap W.$$

Ясно, что $W' \subseteq W$ и W' не содержит какую-то из вершин грани F, так как иначе F и F' совпали бы. Следовательно, $|W'| < |W|$. Кроме того, $F' \cap W$ содержит как минимум n точек, а $\operatorname{int}\operatorname{conv} W \cap W$ — как минимум одну, значит, $|W'| \geqslant n+1$.

Применим предположение индукции к W' и F'. Получим некоторый многогранник Y' с вершинами в W'. Возьмём многогранник

$$Y = \overline{(\operatorname{conv} W) \setminus Y'}$$

(черта сверху у нас обозначает замыкание). Его граница состоит из границы $\operatorname{conv} W$ без относительной внутренности грани F' и границы Y' без той же относительной внутренности грани F'. Это будет необязательно выпуклый многогранник, множество вершин которого совпадает с W, и одна из его граней — F. □

Доказательство следствия 2.5. Пусть W — синие точки, а V — красные точки. Положим $X = \operatorname{conv} W$, и пусть $\{F_i\}_{i=1}^m$ — множество гиперграней X. Применим теорему 2.3 к X и множеству V. Получим такое разбиение X на множества X_i, что $X_i \cap \partial X = F_i$ и $V \cap \operatorname{int} X_i = \varnothing$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

Разобьём точки из $W \cap \operatorname{int} X$ на множества W_i так, чтобы выполнялось $W_i \subset X_i$. Положим также $W_i' = W \cap F_i$.

Рассмотрим такие $1 \leqslant i \leqslant m$, что $W_i \neq \varnothing$. Тогда к множеству $W_i \cup W_i'$ и гиперграни F_i применима лемма 4.1, которая даёт некоторый многогранник Y_i, в числе вершин которого состоят все точки из W_i. Заметим, что $Y_i \subseteq X_i$, следовательно, $\operatorname{int} Y_i \cap V = \varnothing$, а в силу общего положения точек $Y_i \cap V = \varnothing$.

Положим

$$Y = \overline{X \setminus \Big(\bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m,\\ W_i \neq \varnothing}} Y_i\Big)}.$$

Можно показать, что Y — многогранник в смысле используемого нами определения, мы полагаемся здесь на интуицию читателя, хотя строгое объяснение этого факта требует некоторых технических усилий. Вершины Y совпадают с множеством W; $Y \supset V$, так как для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, $W_i \neq \varnothing$ имеем: $Y_i \cap V = \varnothing$. □

§ 5. Заключение

Изложенные результаты по сути взяты из статьи [11]. Изложение близких к рассмотренным в этой заметке вопросов можно найти в записках лекций [10]; современные результаты о разбиении выпуклого тела на выпуклые части равной меры можно посмотреть в [12]; более продвинутые варианты теоремы Кнастера — Куратовского — Мазуркевича можно найти в статье [15] и упомянутых в ней ссылках. Последовательное изложение затронутых в этой заметке вопросов можно найти в книгах [6, 14].

Благодарности

Автор благодарит А. Б. Скопенкова за многочисленные полезные замечания.

Список литературы

[1] *Долбилин Н. П.* Жемчужины теории многогранников. М.: МЦНМО, 2012.

[2] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 134. Задача 6.9.

[3] *Рурк К., Сандерсон Б.* Введение в кусочно линейную топологию. М.: Мир, 1974.

[4] *Скопенков А. Б.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2015.

[5] *Циглер Г. М.* Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014.

[6] *Шашкин Ю. А.* Неподвижные точки. М.: Наука, 1989. (Популярные лекции по математике; Вып. 60).

[7] *Akopyan A., Bárány I., Robins S.* Algebraic vertices of non-convex polyhedra. `https://arxiv.org/abs/1508.07594`

[8] *Barvinok A.* A course in convexity. Providence, RI: AMS, 2002. (Graduate Studies in Math.; V. 54).

[9] *Brouwer L.* Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten // Math. Annalen. 1910. Bd. 71. S. 97–115.

[10] *Karasev R.* Geometry of measures: partitions and convex bodies. `http://rkarasev.ru/common/upload/mes_partition.pdf`

[11] *Karasev R. N.* Partitions of a polytope and mappings of a point set to facets // Discrete Comput. Geom. 2005. V. 34, № 1. P. 25–45.

[12] *Karasev R., Hubard A., Aronov B.* Convex equipartitions: the spicy chicken theorem // Geometriae Dedicata. 2014. V. 170, № 1. P. 263–279.

[13] *Knaster B., Kuratowski C., Mazurkiewicz S.* Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe // Fundamenta Mathematicae. 1929. V. 14, № 1. P. 132–137.

[14] *Matoušek J.* Using the Borsuk — Ulam theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[15] *Musin O. R.* KKM type theorems with boundary conditions. https://arxiv.org/abs/1512.04612

[16] *Sperner E.* Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1928. Bd. 6. S. 265–272.

Роман Николаевич Карасёв, МФТИ, ИППИ РАН

r_n_karasev@mail.ru, http://www.rkarasev.ru/en/