# От школьной задачи к элементам высшей алгебры

В. М. Журавлёв, П. И. Самовол

## § 1. Введение

В задачнике «Математического просвещения», вып. 20 [8] предложена следующая задача.

Задача 1. а) В клетках квадрата $5 \times 5$ стоят знаки «+» и «−». Можно положить пятиклеточный крест центральной клеткой на клетку квадрата и поменять все знаки, закрытые крестом, на противоположные. Можно ли с помощью таких операций все знаки поменять на противоположные?

(*Р. Г. Женодаров*)

б) Дан граф, в вершинах которого стоят знаки «+» и «−». Разрешается выбрать вершину и поменять знаки на противоположные в ней и в смежных вершинах. Докажите, что такими действиями можно заменить все знаки на противоположные. (*И. В. Митрофанов*)

Отметим, что условия и решения указанной и аналогичных задач публиковались и раньше.

Любители компьютерных игр, возможно, вспомнят, что случай квадрата $5 \times 5$, т. е. задачи 1а), попал в качестве головоломки в компьютерную игру «Код да Винчи».

Случай квадрата $8 \times 8$ предлагался на Конкурсе имени А. П. Савина «Математика 6–8» 2007/08 уч. г. в журнале «Квант» [7].

Задача 2. За один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую клетку шахматной доски, а также все клетки, имеющие с ней общую сторону. Можно ли за несколько ходов перекрасить в противоположный цвет все клетки доски? (*И. Акулич*)

Кроме того, было проведено небольшое математическое исследование, связанное с указанной задачей и её обобщениями. Мы хотим не только предложить читателям решение задачи 1, но также познакомить их с результатами этого исследования и предложить некоторые новые задачи, возникшие в этой связи. Часть этих материалов доступна школьникам.

В дальнейшем будем использовать терминологию раскрасок, которая применялась в более ранних формулировках этой задачи.

Можно сказать, что началом этого математического исследования послужила статья Игоря Акулича [3]. Он не рассматривал задачу в контексте графов, а изучал обобщения задач 1а) и 2 для квадратов, прямоугольников и других фигур, которые можно вырезать из клетчатой бумаги. Им были рассмотрены случаи квадратных досок $n \times n$ при $n \leqslant 28$ и некоторых прямоугольных досок.

На самом деле вопрос существования решения в задаче 1 был заменён И. Акуличем на вопрос поиска количества решений для заданной фигуры. Здесь необходимо дать уточнение. Если в какую-либо клетку делается не менее двух ходов, то, уменьшив число ходов в эту клетку на 2, мы приходим к такому же результату. Это означает, что нам достаточно рассматривать комбинации ходов, у которых ход в клетку либо сделан один раз, либо не сделан вовсе. Остальные комбинации мы будем считать эквивалентными указанным. После таких пояснений можно говорить о количестве различных наборов ходов, подразумевая количество различных классов эквивалентности.

Предположим, мы отметили клетки, в которые надо сделать ход. Пусть в отмеченных клетках стоит 1, в неотмеченных 0. Попробуем понять, каким условиям должна удовлетворять полученная конфигурация.

Заметим, что с каждой отмеченной клеткой обязано соседствовать чётное число отмеченных клеток (т. е. или ни одной, или две, или четыре), а с каждой неотмеченной клеткой — нечётное число отмеченных клеток (т. е. одна или три). Действительно, рассмотрим любую неотмеченную клетку $A$. Так как при ходе в любую отмеченную соседнюю клетку клетка $A$ поменяет цвет, после всех ходов она поменяет цвет нечётное число раз, если соседствует с нечётным числом отмеченных клеток. Тогда в итоге её цвет станет противоположным исходному.

Рассмотрим любую отмеченную клетку $B$. Так как при ходе в любую отмеченную соседнюю клетку клетка $B$ поменяет цвет, то после всех ходов в соседние отмеченные клетки она поменяет цвет чётное число раз, если соседствует с чётным числом отмеченных клеток. Сверх того, она один раз поменяет цвет при ходе в саму клетку $B$, и в итоге её цвет станет противоположным исходному.

Таким образом, «динамическая» задача (где клетки то и дело меняют цвет) преобразуется в «статический» вариант, где нужно всего лишь отметить некоторые клетки доски так, чтобы *с каждой отмеченной клеткой соседствовало чётное число отмеченных клеток, а с каждой неотмеченной — нечётное число отмеченных клеток*.

Использовав компьютер, И. Акулич нашёл, что для досок $n \times n$, $n \leqslant 28$, решение существует, причём для $n = 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 27$ и 28 оно единственно. Авторам удалось проверить единственность решения также для $n = 36, 37, 38$. Следовательно, в этих случаях решение обладает симметрией относительно всех осей симметрии самой доски (иначе появились бы дополнительные решения, полученные поворотами и отражениями).

Решение для $n = 1$ — это просто единственная отмеченная клетка. При $n=2$ имеем четыре закрашенных клетки. Примеры решений для $n=3, 6, 7, 8$ изображены на рис. 1 (по словам И. Акулича, решения для этих $n$ ещё удалось подобрать «вручную»).

Ходы нужно сделать в отмеченные клетки.

Для $n = 5$ (рис. 2, слева) и $n = 17$ (рис. 2, справа) имеется по 4 решения, которые получаются друг из друга поворотами.

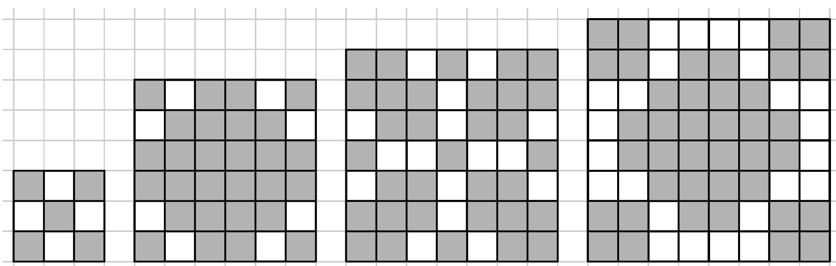


*Рис. 1*

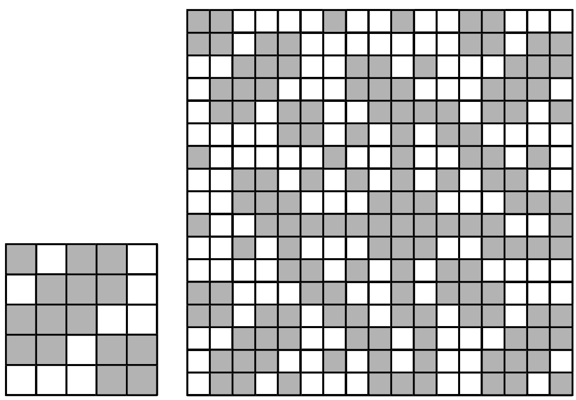


*Рис. 2*

Для квадрата $4 \times 4$ существует 16 различных наборов ходов. Все эти наборы получаются из 5 конфигураций с помощью поворотов и отражений (рис. 3).

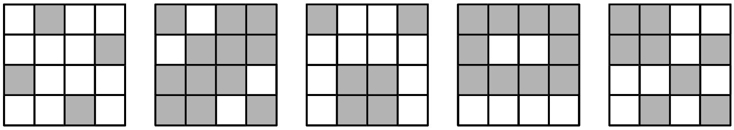


*Рис. 3*

Для $n = 14$ и 24 также имеется по 16 решений. Для $n = 11$ число решений достигает 64, для $n = 9$ и 16 оно равно 256, при $n = 23$ число решений резко «прыгает» до 16 384, а при $n = 19$ — до 65 536. И. Акулич отметил, что каждое из фигурирующих здесь чисел (1, 4, 16, 64, 256, 16 384 и 65 536) является целой неотрицательной степенью четвёрки. При этом появляются конфигурации, не обладающие ни осевой, ни поворотной симметрией. Например, одна из них для доски $9 \times 9$ изображена на рис. 4.

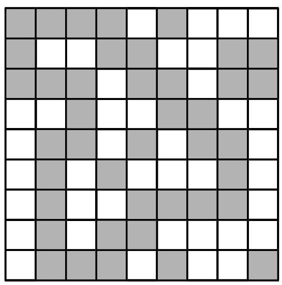


*Рис. 4*

И. Акуличем в статье [3] были сформулированы следующие вопросы.

Вопрос 1. *Для любого ли $n$ можно отметить требуемым образом клетки квадрата $n \times n$?*

Вопрос 2. *Если да, то всегда ли количество способов, которыми можно это сделать, является целой неотрицательной степенью числа 4?*

Вопрос 3. *Для любых ли $m$ и $n$ можно отметить требуемым образом клетки прямоугольника $m \times n$?*

Вопрос 4. *Если да, то всегда ли количество способов, которыми можно это сделать, является целой неотрицательной степенью числа 2?*

Вопрос 5. *Существует ли такое $m$, что для любого $n$ решение для прямоугольника $m \times n$ единственно?*

Вопрос 6. *Существует ли хотя бы одна фигура, которую можно вырезать из клетчатой бумаги (возможно, с дырками) и клетки которой нельзя отметить требуемым образом?*

Конечно, с помощью компьютера нельзя перебрать все варианты досок. Чтобы ответить на часть вопросов, достаточно переложить задачу на язык графов.

## § 2. Графы

Каждую клетку фигуры заменим вершиной графа. Если клетки являются соседями, то соединим вершины ребром. Так каждой доске или фигуре из клеток можно сопоставить граф[1)]. Это обобщение задачи было опубликовано в статьях [5] и [6].

Задача 3 [6]. Вершины графа окрашены в два цвета (чёрный и белый), за один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую вершину графа и все смежные с ней вершины (т. е. соединённые с ней ребром). Можно ли за несколько ходов перекрасить в противоположный цвет все вершины графа?

Оказалось, что в такой общей формулировке задачу решить легче, чем в частном случае для квадратных досок.

Решение задачи 3. *Первый способ.* Заметим, что очерёдность ходов не играет никакой роли. Если выбрать некоторый набор вершин для ходов, то тем самым определится конечная раскраска графа.

Проведём индукцию. Если вершина одна, то просто покрасим её.

Предположим теперь, что мы имеем подходящий набор ходов для любого графа с $k$ вершинами, и рассмотрим граф с $k+1$ вершиной. Обозначим вершины графа через $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$.

Отбросив некоторую вершину $A_i$, получим граф с $k$ вершинами, и для него по нашему предположению существует требуемый набор ходов (при котором все вершины поменяют цвет на противоположный). Если в первоначальном графе вершина связана рёбрами с нечётным числом покрашенных вершин, то этот набор ходов подойдёт и для графа с $k+1$ вершиной.

Однако возможен случай, когда для каждой вершины $A_i$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, мы нашли такой набор ходов на оставшихся $k$ вершинах, что вершина $A_i$ соединена с чётным числом покрашенных вершин. Если мы проделаем один за другим наборы ходов для двух разных вершин $A_i \neq A_j$, то все вершины останутся с начальным цветом, кроме вершин $A_i$ и $A_j$. Это означает, что

[1)] В статье рассматриваются графы без петель.

мы можем перекрасить в противоположный цвет любые две выбранные вершины, не перекрашивая остальные вершины.

Значит, если в графе чётное число вершин, то нужно перекрашивать каждую пару вершин, пока все они не изменят цвет на противоположный.

Если в графе нечётное число вершин, то граф должен содержать вершину, у которой чётное число соседних вершин. Действительно, если такой вершины не существует, то общее число «соседей» у всех вершин графа нечётно, но это невозможно, поскольку общее число соседей в два раза больше, чем количество рёбер в графе.

Выберем эту вершину и перекрасим её вместе с чётным числом всех её соседей. При этом мы перекрасили в противоположный цвет нечётное число вершин. Так как в графе нечётное количество вершин, осталось неперекрашенным чётное количество вершин. Разобьём эти вершины на пары и перекрасим так, как обсуждали ранее.

Итак, требуемая последовательность ходов всегда существует. □

Мы полностью решили задачу 1. Более того, получили ответы на некоторые вопросы И. Акулича, а именно: ответ на шестой вопрос отрицательный — таких фигур нет. И, как следствие, имеем положительный ответ на первый и третий вопросы, т. е. требуемым образом всегда можно отметить клетки любого прямоугольника и, в частности, квадрата.

Из нашего решения получаем

Следствие 1. *Если в графе из каждой вершины выходит чётное число рёбер, то, чтобы получить требуемую последовательность ходов, нужно просто сходить в каждую вершину.*

Расширим вопрос 4 и докажем более сильное утверждение о графах.

Задача 4 [6]. Для графов, вершины которых окрашены в два цвета (чёрный и белый), количество различных наборов ходов, позволяющих перекрасить в противоположный цвет все вершины графа, является целой неотрицательной степенью числа 2. Наборы ходов мы считаем различными, если отличаются наборы вершин, куда сделаны ходы. Как и прежде, ходом называется одновременная перекраска в противоположный цвет некоторой вершины графа и всех смежных (соединённых ребром) с ней вершин.

Применим к «нашим доскам» теорему Лагранжа о том, что порядок подгруппы делит порядок группы. Чуть позже мы углубимся в теорию групп, а сейчас предложим решение, адаптированное для школьников.

Решение задачи 4. *Первый способ.* Рассмотрим граф с $d$ вершинами. Дальнейшие рассуждения мы могли бы проводить для любой раскраски графа. Для простоты будем считать все вершины белыми.

Рассмотрим множество всевозможных наборов ходов в вершины графа. Поскольку в любую вершину ход либо сделан, либо нет, различных наборов ровно $2^d$. При подсчёте мы учитываем «нулевой» набор ходов, при котором ни в одну вершину ходы не делаются.

Выделим подмножество наборов ходов, которые оставляют все вершины графа белыми, т. е. не меняют исходной раскраски графа. Количество таких наборов обозначим через $s$. Очевидно, что это подмножество содержит «нулевой» набор, поэтому $s > 0$. Назовём это подмножество «нейтральным».

Будем считать, что два набора ходов принадлежат одному классу, если результаты их независимого применения к фиксированной (белой) раскраске вершин графа совпадают. Пусть $k$ обозначает количество таких классов. Докажем, что в каждом классе ровно $s$ наборов ходов.

Пусть $h_1$ и $h_2$ — два набора ходов из одного класса. Рассмотрим их объединение (двойной ход в одну и ту же вершину графа приравниваем к отсутствию хода).

Заметим, что объединение наборов $h_1$ и $h_2$ лежит в нейтральном подмножестве. Действительно, каждая вершина после применения объединения $h_1$ и $h_2$ поменяет цвет чётное количество раз и, следовательно, не поменяет исходную раскраску.

Если набор ходов $h_1$ объединить с объединением $h_1$ и $h_2$, то получим набор ходов $h_2$. Значит, $h_2$ получается объединением набора ходов $h_1$ с некоторым уникальным набором ходов из нейтрального подмножества. Следовательно, количество элементов в данном классе не больше, чем количество элементов в нейтральном подмножестве, т. е. не больше $s$.

С другой стороны, если мы возьмём какой-нибудь набор ходов, то в том же классе лежит объединение исходного набора ходов с любым набором ходов из нейтрального подмножества. Следовательно, в этом классе число наборов не меньше чем $s$.

В итоге получаем, что в каждом классе ровно $s$ наборов ходов. Отметим, что и в классе наборов ходов, перекрашивающих все вершины графа в противоположный цвет, также $s$ элементов.

Итак, все наборы ходов разбились на $k$ классов по $s$ элементов, т. е. $ks = 2^d$. Следовательно, и $k$, и $s$ являются степенями двойки. Что и требовалось доказать. $\square$

## § 3. Раскраски и системы сравнений

Итак, мы знаем, что для любого графа искомый набор ходов всегда существует. Но как его найти?

Сопоставим каждому двуцветному графу систему линейных сравнений с коэффициентами 0 и 1 (над полем $\mathbb{Z}_2$). При этом искомый набор ходов будет соответствовать некоторому решению этой системы.

Обозначим вершины графа через $A_1, A_2, \ldots, A_d$. Пусть переменная $a_i$ принимает значение 1, если вершина $A_i$ отмечена, и 0, если вершина $A_i$ не отмечена. Пусть вершины $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ — смежные с вершиной $A_i$. В качестве $i$-го сравнения системы возьмём сравнение $a_i + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} \equiv 1 \pmod 2$. Таким образом, $i$-е сравнение системы выражает для вершины $A_i$ условие, что у неотмеченной вершины нечётное число отмеченных соседок.

Систему линейных сравнений можно решить методом Гаусса последовательного исключения неизвестных. Для шага метода последовательного исключения неизвестных можно воспользоваться любым из уравнений системы. Мы из некоторого имеющегося сравнения выражаем любую из входящих в него переменных и, подставляя полученное выражение в остальные сравнения, уменьшаем тем самым количество неизвестных и сравнений. При этом могут образоваться сравнения $0 \equiv 0$ или $1 \equiv 1$, которые можно отбросить.

Для примера найдём все наборы ходов для графа рис. 5, который отвечает прямоугольнику $2 \times 5$.

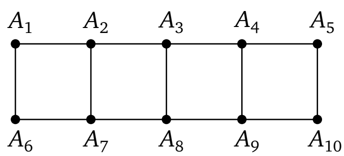



*Рис. 5*

Получим следующую систему сравнений (вершине $A_i$ графа соответствует $i$-я строка составленной системы):

$$\left\{\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_6 &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_1 + a_2 + a_3 + a_7 &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_2 + a_3 + a_4 + a_8 &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_3 + a_4 + a_5 + a_9 &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_4 + a_5 + a_{10} &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_1 + a_6 + a_7 &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_2 + a_6 + a_7 + a_8 &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_3 + a_7 + a_8 + a_9 &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_4 + a_8 + a_9 + a_{10} &\equiv 1 \pmod 2,\\
a_5 + a_9 + a_{10} &\equiv 1 \pmod 2.
\end{aligned}\right.$$

Решением системы будет:

$$\begin{cases} a_1 = a_5 = a_8 = a_{10} + 1, \\ a_3 = a_6 = a_{10}, \\ a_2 = a_4 = a_7 = a_9 = 0. \end{cases}$$

Переменная $a_{10}$ является свободной и принимает одно из двух значений 0 или 1. Следовательно, система имеет два решения и для прямоугольника $2 \times 5$ есть два различных набора ходов (два способа отметить клетки).

Мы уже знаем, что для любого графа система, соответствующая раскраскам, совместна.

Совместность системы мы можем доказать и по-другому. Тем самым мы найдём ещё один способ решения задачи 3.

Предложение 1. *Сумма степеней всех вершин графа чётна*[2]*.*

Доказательство. Достаточно разрезать все рёбра графа пополам. Тогда получим, что удвоенное число рёбер графа равно сумме степеней всех вершин графа. Что и требовалось доказать. $\square$

Решение задачи 3. *Второй способ* [5]. Докажем, что в процессе решения системы, соответствующей графу, не получится сравнение $0 \equiv 1$.

Если мы складываем несколько сравнений системы (а ничего другого по сути мы делать не можем: все операции исключения неизвестных являются операциями почленного сложения — так устроены сравнения по модулю 2), то для получения единицы в правой части мы должны сложить нечётное число сравнений.

Рассмотрим подграф исходного графа, вершинам которого соответствуют складываемые сравнения. Для получения нулевого коэффициента при каждой из соответствующих переменных степени всех вершин рассматриваемого подграфа должны быть нечётны. Но в силу предложения 1 не существует ни одного графа с нечётным числом вершин, степени которых все нечётны. Следовательно, система, отвечающая графу, совместна. Что и требовалось доказать. $\square$

С помощью систем линейных сравнений получим другое несложное решение задачи 4.

Решение задачи 4. *Второй способ* [5]. Пусть $t$ — число свободных переменных, получающихся при решении системы. Тогда общее количество решений системы, соответствующей некоторому графу, равняется $2^t$. Что и требовалось доказать. $\square$

Например, если $t = 0$, то система имеет единственное решение.

[2] Степень вершины графа — это количество рёбер, содержащих эту вершину.

## § 4. Пятый вопрос

Ответ на этот вопрос был дан в статье [5].

Рассмотрим граф, вершины которого — центры клеток прямоугольника размером $m \times n$, а соседними считаем центры клеток, имеющих общую сторону. Сколько для него существует решений — выяснить непросто. Пятый вопрос звучит так: «Существует ли такое $m$, что для любого $n$ решение единственно?»

Ответ отрицательный. Более того, для любого $m$ существует такое $n$, что количество решений равно $2^m$. Более того, для каждого данного $m$ множество таких $n$ бесконечно!

Чтобы это доказать, расставим в $m$ клетках крайнего левого столбца произвольным образом 0 и 1. Условие, что у каждой отмеченной вершины чётное число отмеченных соседок, а у каждой неотмеченной вершины нечётное число отмеченных соседок, однозначно определяет второй столбец. Первый и второй столбцы определяют третий, и так далее...

Пример для $m = 2$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a+b+1$ | $a+1$ | 0 | $a$ | $a+b+1$ | $a+1$ | 0 | ... |
| $b$ | $a+b+1$ | $b+1$ | 0 | $b$ | $a+b+1$ | $b+1$ | 0 | ... |

Пример для $m = 3$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a+b+1$ | $a+c+1$ | $b+c+1$ | $c+1$ | 0 | $c$ | $b+c+1$ | ... |
| $b$ | $a+b+c+1$ | 0 | $a+b+c$ | $b+1$ | 0 | $b$ | $a+b+c+1$ | ... |
| $c$ | $b+c+1$ | $a+c+1$ | $a+b+1$ | $a+1$ | 0 | $a$ | $a+b+1$ | ... |

Пример для $m = 4$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a+b+1$ | $a+c+1$ | $b+c+d+1$ | 0 | $b+c+d$ | $a+c+1$ | $a+b+1$ | ... |
| $b$ | $a+b+c+1$ | $d$ | $a+b+d+1$ | 0 | $a+b+d$ | $d+1$ | $a+b+c$ | ... |
| $c$ | $b+c+d+1$ | $a$ | $a+c+d+1$ | 0 | $a+c+d$ | $a+1$ | $b+c+d$ | ... |
| $d$ | $c+d+1$ | $b+d+1$ | $a+b+c+1$ | 0 | $a+b+c$ | $b+d+1$ | $c+d+1$ | ... |

Доказать, что при любом $m$ в таблице бесконечно много столбцов, состоящих только из нулей (это и означает, что для соответствующих $n$ количество наборов ходов равно $2^m$), довольно просто. Рассмотрим всевозможные пары соседних столбцов $(B, C)$. По каждой такой паре однозначно строится следующий столбец $D$. Таким образом, задано отображение $(B, C) \to (C, D)$.

Поскольку множество различных пар столбцов конечно, рано или поздно произойдёт зацикливание. Возникший цикл не может обладать предпериодом. Дело в том, что пара столбцов $(B, C)$ однозначно определяет не только следующий за ними столбец $D$, но и предшествующий им столбец $A$.

Осталось вспомнить, что к рассматриваемой нами таблице слева с соблюдением правила «у каждой отмеченной вершины чётное число отмеченных клеток, а у каждой неотмеченной нечётное» можно приписать только столбец из одних нулей. Значит, когда произойдёт зацикливание, мы вновь увидим нулевой столбец.

## § 5. Группы

Наш граф обозначим через $\Gamma$, а его вершины через $A_1, A_2, \ldots, A_d$.

Цвет вершины графа заменим числом: пусть, например, вместо белого будет 1, а вместо чёрного 0. Существует ровно $2^d$ различных расстановок чисел 0, 1 в вершинах графа (двуцветных раскрасок графа).

Множество всех двуцветных раскрасок графа превратим в векторное пространство $V$ над полем $\mathbb{Z}_2$. Для этого достаточно определить сумму любых двух раскрасок графа, поставив в каждой вершине сумму чисел из этих раскрасок.

Обозначим через $v_i$, $i=1, \ldots, d$, раскраску, у которой в вершине $A_i$ стоит 1, а в остальных вершинах нули. В качестве элементов базиса векторного пространства $V$ можно взять все векторы $v_i, \ldots, v_d$. Раскраске, состоящей из одних нулей (все вершины графа покрашены чёрным), соответствует нулевой вектор $\overrightarrow{0}$. Раскраске, состоящей из одних единиц (все вершины графа покрашены белым), соответствует вектор $w = v_1 + \ldots + v_d$.

Пусть оператор $g_i\colon V \to V$ действует следующим образом: $g_i(v) = v_i + v$, где $v \in V$. Таким образом, оператор прибавляет 1 к числу, стоящему в вершине $A_i$ (сумма рассматривается по модулю 2), при этом числа в остальных вершинах графа не меняются (можно считать, что к ним прибавляется 0).

Рассмотрим группу операторов $G_d$, порождённую всеми элементами $g_i$, т. е. множество, составленное из всевозможных сумм элементов $g_i$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$. Группа $G_d$ абелева, её порядок $|G_d|$ равен $2^d$. При этом

$$G_d \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{d} \cong \mathbb{Z}_2^d.$$

Обозначим через $s_i$ оператор «хода» в вершину $A_i$, т. е. прибавление 1 к числу в вершине $A_i$ и её соседях. Значения чисел в остальных вершинах графа не меняются. Рассмотрим группу $S_\Gamma$, порождённую всеми элементами $s_i$.

Предложение 2. *Группа $S_\Gamma$ является подгруппой группы $G_d$.*

Доказательство. Очевидно, что $s_i$ равняется сумме $g_i + \sum_j g_j$, где индекс $j$ пробегает множество соседних вершин для $A_i$. □

Следствие 2. *Группа $S_\Gamma$ абелева. Порядок группы $S_\Gamma$ делит порядок группы $G_d$, т. е. является делителем числа $2^d$.*

Мы имеем два принципиально различных случая.

1. Группа $S_\Gamma$ изоморфна группе $G_d$, т. е. $S_\Gamma \cong G_d \cong \mathbb{Z}_2^d$.

Тогда $g_i \in S_\Gamma$ для всех $i$ и, следовательно, из любой расстановки чисел $0, 1$ в вершинах графа можно получить любую другую расстановку при помощи суммы подходящих элементов $s_i$. В частности, существует только один способ требуемой перекраски.

Случай изоморфизма групп осуществляется, например, для квадратов $2 \times 2$ или $3 \times 3$.

2. Группа $S_\Gamma$ является собственной подгруппой группы $G_d$, т. е. $S_\Gamma \subset G_d$, $S_\Gamma \neq G_d$.

Как следует из доказанного выше, элемент $g_1 + g_2 + \ldots + g_d$ и в этом случае принадлежит группе $S_\Gamma$: $g_1 + g_2 + \ldots + g_d \in S_\Gamma$. Однако теперь нельзя из любой таблицы получить любую другую, и способов перекраски больше одного. Количество различных способов перекраски делит порядок группы.

Примерами для этого случая являются квадраты $4 \times 4$ или $5 \times 5$.

Составим матрицу, соответствующую рассматриваемой системе сравнений. Если определитель этой матрицы над полем $\mathbb{Z}_2$ равен 1, то группы изоморфны. Если этот определитель равен 0, то реализуется второй случай.

## § 6. Многочлены Чебышёва

Можно ли определить, для каких квадратов $n \times n$ или прямоугольников $m \times n$ имеется только одно решение?

Решение будет единственным тогда и только тогда, когда определитель системы не равен нулю в поле $\mathbb{Z}_2$. Но поскольку мы имеем дело с коэффициентами 0 и 1, то вначале попытаемся найти этот определитель в кольце целых чисел.

Итак, рассмотрим прямоугольник $m \times n$ и его граф (рис. 6) с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{mn}$.

Матрицу системы, соответствующей прямоугольной решётке, обозначим $B_{m,n}$. Она выглядит так:

$$B_{m,n} = \begin{pmatrix} H_n & E_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ E_n & H_n & E_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & E_n & H_n & E_n & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & E_n & H_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & E_n & H_n & E_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E_n & H_n \end{pmatrix},$$

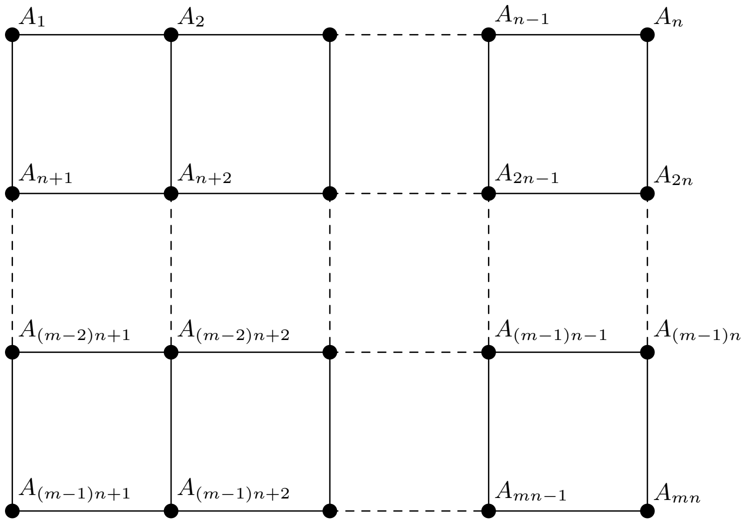



*Рис. 6*

где матрица $H_n$ определена ниже, а $E_n$ — единичная матрица размера $n \times n$. Определитель матрицы $B_{m,n}$ мы выразим через произведение собственных значений.

Рассмотрим тензорное произведение $m$-мерного пространства, в котором выделен базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$, и $n$-мерного пространства, в котором выделен базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Первый сомножитель будет отвечать строкам решётки, а второй — столбцам. Будем рассматривать $B_{m,n}$ как матрицу линейного оператора в базисе $e_i \otimes f_k$.

Действие оператора можно записать так:

$$B_{m,n}\colon\ e_i \otimes f_k \mapsto H_m e_i \otimes f_k + e_i \otimes L_n f_k.$$

Матрицы операторов $H_m$ размера $m \times m$ и $L_n$ размера $n \times n$ имеют следующий вид:

$$H_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных значений операторов $H_m$ и $L_n$ найдём вначале определитель следующей матрицы размера $n \times n$:

$$C_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первой строке, а затем по первому столбцу. Получаем рекуррентное соотношение:

$$C_n(x) = xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x).$$

Положим $C_0(x) = 1$. Начало последовательности находим прямым вычислением: $C_1(x) = x$, $C_2(x) = x^2 - 1$.

Члены последовательности можно выразить через многочлены Чебышёва второго рода $U_0(y) = 1$, $U_1(y) = 2y$, $U_{n+1}(y) = 2yU_n(y) - U_{n-1}(y)$. Для этого достаточно сделать замену переменных $x = 2y$.

Корни многочленов Чебышёва равны

$$y = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому корни многочленов $C_n(x)$ равны

$$x = 2y = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для нахождения собственных значений оператора $H_m$ нужно положить $x = 1 - \lambda$. Поэтому собственные значения оператора $H_m$ равны:

$$\lambda_k = 1 - 2\cos\frac{k\pi}{m+1}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Для нахождения собственных значений оператора $L_n$ нужно положить $x = -\mu$. Поэтому собственные значения оператора $L_n$ равны

$$\mu_j = -2\cos\frac{j\pi}{n+1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Собственные значения матрицы $B_{m,n}$ равны $\lambda_k + \mu_j$.

Тогда её определитель равен

$$\det B_{m,n} = \prod_{k,\,j}(\lambda_k + \mu_j) = \prod_{k,\,j}\left(1 - 2\cos\frac{k\pi}{m+1} - 2\cos\frac{j\pi}{n+1}\right),$$

где $k = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Для графа* $\Gamma$, *отвечающего прямоугольнику* $m \times n$,

1) *группа* $S_\Gamma$ *изоморфна группе* $G_{mn}$, *если*

$$\prod_{k,\,j}\left(1 - 2\cos\frac{k\pi}{m+1} - 2\cos\frac{j\pi}{n+1}\right) \equiv 1 \pmod 2;$$

2) *группа* $S_\Gamma$ *является собственной подгруппой группы* $G_{mn}$, *если*

$$\prod_{k,\,j}\left(1 - 2\cos\frac{k\pi}{m+1} - 2\cos\frac{j\pi}{n+1}\right) \equiv 0 \pmod 2.$$

Следствие 3. *Группа* $S_\Gamma$ *является собственной подгруппой группы* $G_{mn}$, *в частности, для прямоугольников* $m \times n$, *где*

а) $m = 3q-1$, $n = 2t-1$ *или* $m = 2q-1$, $n = 3t-1$;

б) $m = 5q-1$, $n = 5t-1$, $q, t \in \mathbb{N}$.

Доказательство. а) В случае $m = 3q-1$, $n = 2t-1$ посмотрим на сомножитель с $k = \dfrac{m+1}{3} = q$ и $j = \dfrac{n+1}{2} = t$. Имеем

$$1 - 2\cos\frac{k\pi}{m+1} - 2\cos\frac{j\pi}{n+1} = 1 - 2\cos\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Поскольку произведение собственных значений содержит нулевой сомножитель, определитель равен нулю. Остаётся применить теорему 1.

Аналогично в случае $m = 2q-1$, $n = 3t-1$ определитель также равен нулю.

Следовательно, для прямоугольников с длинами сторон $m = 3q-1$, $n = 2t-1$ или $m = 2q-1$, $n = 3t-1$ мы имеем не менее двух решений.

б) В случае $m = 5q-1$, $n = 5t-1$ посмотрим на сомножитель с $k = 3q$ и $j = t$. Имеем

$$1 - 2\cos\frac{k\pi}{5q} - 2\cos\frac{j\pi}{5t} = 1 - 2\cos\frac{3\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} = 1 + 2\frac{\sqrt{5}-1}{4} - 2\frac{\sqrt{5}+1}{4} = 0.$$

Поскольку произведение собственных значений содержит нулевой сомножитель, определитель равен нулю. Опять применим теорему 1. Следовательно, для прямоугольников с длинами сторон $m = 5q-1$, $n = 5t-1$ ($t \in \mathbb{N}$) мы также имеем более одного решения. $\square$

Следствие 4. *Для квадратных досок* $n \times n$, *где* $n = 6t-1$ *или* $n = 5t-1$ *имеется не менее двух решений.*

Эти результаты согласуются со статистикой вычислений для квадратов $n \times n$, $n \leqslant 28$, проведённых И. Акуличем [3]. Как было раньше отмечено, число решений для квадратов $n \times n$ при $n = 4, 5, 9, 11, 14, 17, 19, 23, 24$ больше 2.

Выпадает случай $n = 16$, поскольку этот случай не подпадает под следствие 4. Более того, тогда определитель не равен 0 в кольце целых чисел, но, поскольку он чётен, он равен нулю в кольце $Z_2$.

Похожая техника нахождения определителя через собственные значения матрицы оператора с помощью многочленов Чебышёва применялась для подсчёта количества разбиений прямоугольника на «домино», см. [4].

## § 7. Ацтекский диамант

Кроме прямоугольников, можно посмотреть на другие фигуры на клетчатой доске. В качестве примера рассмотрим ацтекский диамант порядка $n$, см. рисунки ниже. У диаманта $n$-го порядка по $2n$ вертикальных и горизонтальных рядов клеток, а всего $2n(n+1)$ клеток.

В графе, отвечающему ацтекскому диаманту, все вершины имеют чётный порядок, поэтому одним из решений всегда является набор ходов во все вершины диаманта.

Как и ранее, поставим вопрос о количестве решений для ацтекского диаманта порядка $n$.

Приведём результаты для $n \leqslant 10$.

Ацтекский диамант для $n = 1$ — это просто квадрат $2 \times 2$. Как мы знаем, в этом случае имеется только одно решение.

Для ацтекского диаманта порядка 2 (т. е. при $n = 2$) имеем четыре решения, все они показаны на рис. 7. Как видим, два решения получаются друг из друга симметрией относительно вертикальной оси.

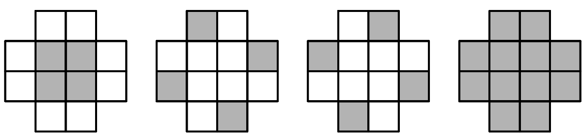


*Рис. 7*

При $n = 3$, $n = 6$, $n = 7$ и $n = 10$ имеем по одному решению, т. е. нужно сходить по разу во все клетки диаманта и других решений нет.

При $n = 4$ и $n = 5$ имеем по 16 решений, см. рис. 8, 9. Здесь и далее мы не показываем решение с набором ходов во все клетки диаманта и решения, получающиеся из приведённых поворотами и отражениями.

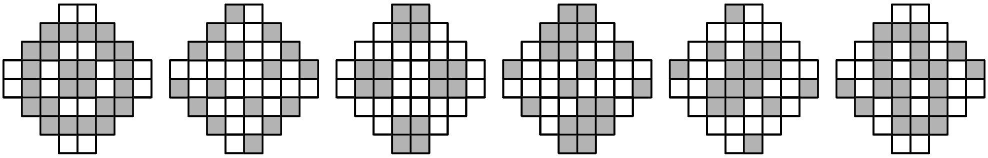


*Рис. 8*

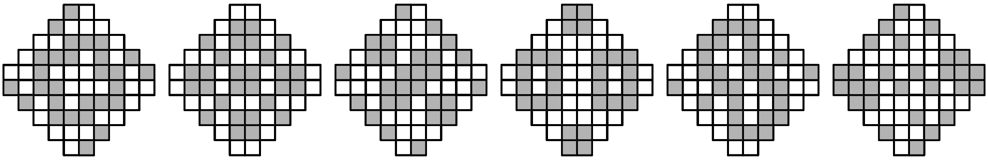


*Рис. 9*

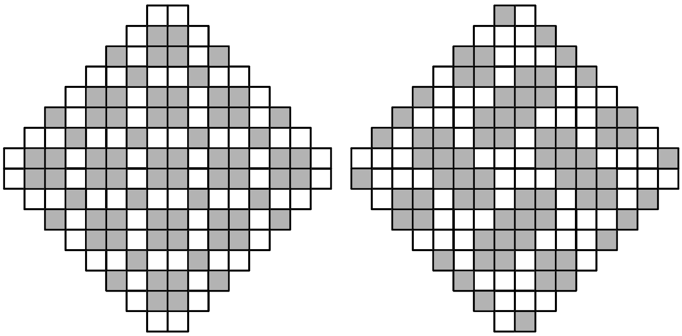


*Рис. 10*

При $n = 8$ (как и для $n = 2$) имеем 4 решения (рис. 10).

При $n = 9$ имеем 256 решений.

Как видим в проверенных случаях, количество решений является не только степенью двойки, но также степенью четвёрки.

Попытаемся продвинуться в поисках тех значений $n$, когда имеется только одно решение, т. е. группа $S_\Gamma$ совпадает с $G_d$.

Составим систему сравнений по модулю 2, но при этом нумеровать клетки будем не как в случае квадрата и прямоугольника, а немного по-другому. Используя шахматную раскраску диаманта, мы видим, что чёрные клетки соответствуют графу прямоугольника $n(n+1)$. То же самое можно сказать о белых клетках.

Занумеровав вершины соответствующим образом, см. рис. 11, придём к системе сравнений, матрица которой имеет вид

$$D_n = \begin{pmatrix} E_m & K_m \\ K_m^T & E_m \end{pmatrix},$$

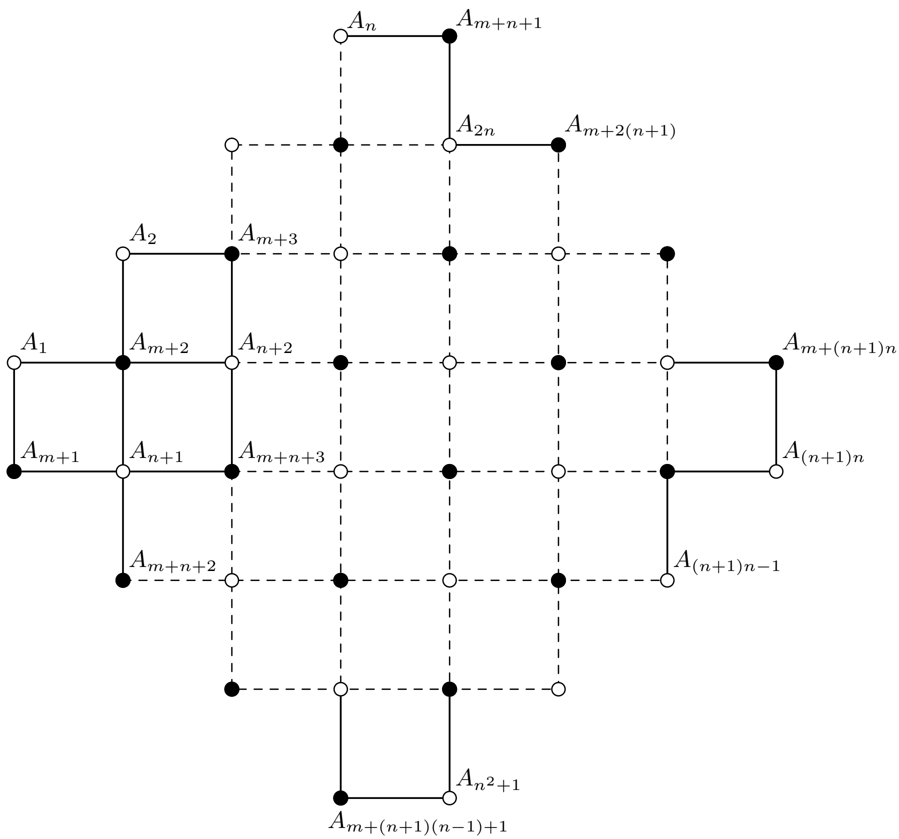



*Рис. 11*

где $m = n(n+1)$, $E_m$ — единичная матрица, матрица $K_m$ определена ниже, а $K_m^T$ — транспонированная матрица.

Матрицу $K_m$ можно рассматривать как кронекерово произведение матриц: $K_m = A_n \otimes A_n^T$, где матрица $A_n$ имеет размер $n \times (n+1)$ и равна

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь нам понадобится решить одну задачу по алгебре для первокурсников.

Задача 5 [9]. Доказать, что если $A$, $B$, $C$, $D$ — квадратные матрицы порядка $n$, причём $C$ или $D$ — невырожденная матрица и $CD = DC$, то

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\| = \|AD - BC\|.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть произведение

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1} & D \\ 0 & -C \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Что и требовалось доказать. □

Используя эту задачу, получим

$$\det D_n = \left\| \begin{matrix} E_m & K_m \\ K_m^T & E_m \end{matrix} \right\| = \|E_m E_m - K_m K_m^T\| = \|E_m - K_m K_m^T\|.$$

Положим $P_m = K_m K_m^T$. Наша цель — найти спектр матрицы $P_m$. Для этого воспользуемся следующей теоремой. Её доказательство читатели могут провести самостоятельно или найти в курсе линейной алгебры.

Теорема 2 (Кронекер). *Докажите следующие свойства кронекеровского произведения матриц*:

1) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;

2) *если* $A, B, C, D$ *— матрицы такого размера, что существуют произведения* $AC$ *и* $BD$, *то* $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$;

3) *пусть* $A$ *и* $B$ *— квадратные матрицы размеров* $n \times n$ *и* $m \times m$; *если* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— собственные значения матрицы* $A$, *а* $\mu_1, \ldots, \mu_m$ *— собственные значения матрицы* $B$, *то собственными значениями матрицы* $A \otimes B$ *являются* $\lambda_i \mu_j$, *где* $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Итак, используя свойства кронекеровского произведения, получаем

$$P_m = K_m K_m^T = (A_n \otimes A_n^T)(A_n \otimes A_n^T)^T = \\ = (A_n \otimes A_n^T)(A_n^T \otimes A_n) = (A_n A_n^T) \otimes (A_n^T A_n).$$

Матрица $A_n A_n^T$ является симметрической квадратной матрицей порядка $n$, и

$$A_n A_n^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Её собственные значения можно найти, как в предыдущем параграфе, они равны $\lambda_k = 2 - 2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \ldots, n$.

Матрица $A_n^T A_n$ является симметрической квадратной матрицей порядка $n+1$, и

$$A_n^T A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти её собственные значения, придётся ещё немного поработать.

Найдём вспомогательный определитель матрицы порядка $n+1$, который является многочленом от переменной $x$:

$$F_{n+1}(x) = \begin{Vmatrix} x-1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & x-1 \end{Vmatrix}.$$

Разложим определитель по первой строке, а затем по первому столбцу. Полученные определители разложим по нижней строке и последнему столбцу. Получим

$$F_{n+1}(x) = (x-1)^2 C_{n-1}(x) - 2(x-1)C_{n-2}(x) + C_{n-3}(x).$$

Вспоминая рекуррентное соотношение

$$C_n(x) = xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x),$$

упростим выражение до следующего

$$F_{n+1}(x) = (x-2)C_n(x).$$

Чтобы найти собственные значения матрицы $A_n^T A_n$, мы должны положить $x = 2 - \mu$ и решить уравнение

$$F_{n+1}(2-\mu) = (2-\mu-2)C_n(2-\mu) = 0.$$

Таким образом, одно из собственных значений матрицы $A_n^T A_n$ равно нулю: $\mu_0 = 0$, а остальные равны

$$\mu_j = 2 - 2\cos\frac{j\pi}{n+1}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

По теореме 2, пункт 3 собственные значения матрицы $P_m$ равны $\lambda_k\mu_j$, $k=1,\ldots,n$, $j=0,\ldots,n$, а собственные значения матрицы $E_m - P_m$ равны $1-\lambda_k\mu_j$.

Тогда имеем

$$\det D_n = \det(E_m - P_m) = \\ = \prod_{k,\,j}(1-\lambda_k\mu_j) = \prod_{k,\,j}\Bigl(1 - 4\Bigl(1-\cos\frac{k\pi}{n+1}\Bigr)\Bigl(1-\cos\frac{j\pi}{n+1}\Bigr)\Bigr),$$

где $k = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n$. Итак, доказана

Теорема 3. *Для графа* $\Gamma$*, отвечающего ацтекскому диаманту порядка* $n$*, выполнено следующее*:

1) *группа* $S_\Gamma$ *изоморфна группе* $G_{2n(n+1)}$*, если*

$$\prod_{k,\,j}\Bigl(1 - 4\Bigl(1-\cos\frac{k\pi}{n+1}\Bigr)\Bigl(1-\cos\frac{j\pi}{n+1}\Bigr)\Bigr) \equiv 1 \pmod 2;$$

2) *группа* $S_\Gamma$ *является собственной подгруппой группы* $G_{2n(n+1)}$*, если*

$$\prod_{k,\,j}\Bigl(1 - 4\Bigl(1-\cos\frac{k\pi}{n+1}\Bigr)\Bigl(1-\cos\frac{j\pi}{n+1}\Bigr)\Bigr) \equiv 0 \pmod 2.$$

Следствие 5. *Группа* $S_\Gamma$ *является собственной подгруппой группы* $G_{2n(n+1)}$*, в частности, для ацтекского диаманта порядка* $n$*, где*

$$\text{а) } n = 3q-1; \quad \text{б) } n = 5q-1, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. а) В случае $n = 3q-1$ посмотрим на сомножитель с $k = j = q = (n+1)/3$. Имеем

$$1 - 4\Bigl(1-\cos\frac{k\pi}{n+1}\Bigr)\Bigl(1-\cos\frac{j\pi}{n+1}\Bigr) = 1 - 4\Bigl(1-\cos\frac{\pi}{3}\Bigr)\Bigl(1-\cos\frac{\pi}{3}\Bigr) = 0.$$

Поскольку произведение собственных значений содержит нулевой сомножитель, определитель равен нулю.

Следовательно, для ацтекского диаманта порядка $n = 3q-1$ мы имеем не менее двух решений.

б) В случае $n = 5q - 1$ посмотрим на сомножитель с $k = 3q$ и $j = q$. Имеем

$$1 - 4\Big(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\Big)\Big(1 - \cos\frac{j\pi}{n+1}\Big) = 1 - 4\Big(1 - \cos\frac{3\pi}{5}\Big)\Big(1 - \cos\frac{\pi}{5}\Big) = 0.$$

Значит, определитель равен нулю, поскольку произведение собственных значений содержит нулевой сомножитель. Следовательно, для ацтекского диаманта порядка $n = 5q - 1$ мы также имеем не менее двух решений. $\square$

## § 8. Упражнения

Задача 6 (Н. Агаханов, [2]). Клетки доски $8 \times 8$ раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

Задача 7 (С. Токарев, XXIV Турнир городов 2002/03, [10]). В каждой клетке таблицы размером $4 \times 4$ стоит знак «$+$» или «$-$». Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такую операцию?

Задача 8 (С. Токарев, [1]). В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано число 1 или $-1$. Известно, что для каждой клетки произведение всех чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону, равно 1. Докажите, что в любых двух клетках, симметричных относительно центра таблицы, записаны одинаковые числа.

Задача 9. Найдите последовательность ходов, перекрашивающую клетки доски $n \times n$ в противоположный цвет, для $n = 10$, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 36, 37, 38.

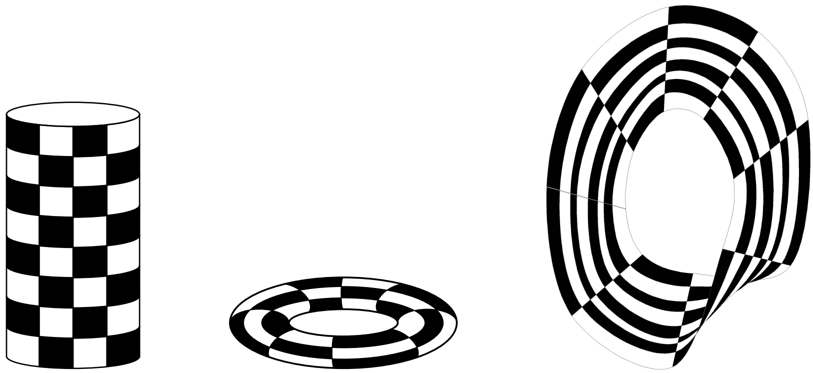
Задача 10. Найдите все последовательности ходов, перекрашивающие клетки доски $n \times n$ в противоположный цвет, для $n = 14$.

Задача 11 [5]. Постройте таблицу из § 4 для $m = 5$.

Задача 12 [6]. За один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую клетку шахматной доски, а также все клетки, имеющие с ней общую сторону. Найдите последовательность ходов, перекрашивающую в противоположный цвет:

а) цилиндрическую шахматную доску, склеенную из доски $8 \times 8$ (рис. 12*а*);

б) тороидальную шахматную доску, склеенную из доски $8 \times 8$ (рис. 12*б*);



*а*) *б*) *в*)

*Рис. 12*

в) доску в форме листа Мёбиуса, склеенную из доски $8 \times 8$ (рис. 12*в*). Нарисуйте соответствующие графы.

Задача 13 [6]. За один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую клетку доски, а также все клетки, в которые можно попасть из неё ходом коня. Найдите последовательности ходов, перекрашивающие в противоположный цвет клетки квадратных досок размеров $3 \times 3$, $4 \times 4$, и постройте соответствующие графы.

Задача 14. Клетки доски $8 \times 8$ раскрашены в шахматном порядке. За один ход можно выбрать клетку доски, и одновременно перекрасить в противоположный цвет все клетки, имеющие с ней общую сторону, при этом сама клетка не перекрашивается. Можно ли за несколько ходов перекрасить в противоположный цвет все клетки доски?

В заключение мы хотим отойти от двух красок и квадратных досок и перейти к многоцветным задачам.

Необходимо отметить, что исследование подобных многоцветных задач сопряжено с серьёзными трудностями. В частности, даже в трёхцветном случае существуют примеры раскрасок гексагональных досок, все клетки которых нельзя перекрасить в один цвет (вместе с клеткой перекрашиваются все соседние с ней по стороне) со следующей заменой цветов:

$$\text{белый} \to \text{серый} \to \text{чёрный} \to \text{белый}.$$

Задача 15 [6]. Приведите пример раскраски трёхцветной гексагональной доски, все клетки которой нельзя перекрасить в один цвет описанным образом.

Задача 16 [6]. За один ход разрешается одновременно перекрасить любую клетку гексагональной шахматной доски (доски Глинского) (рис. 13)

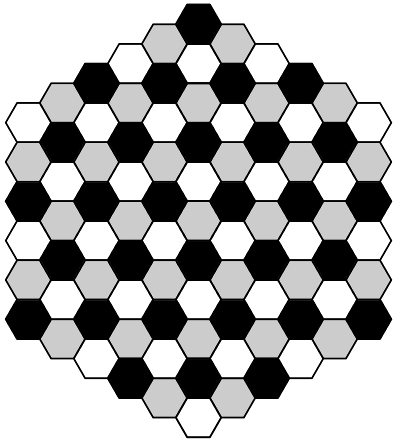


*Рис. 13*

и все клетки, имеющие с ней общую сторону, с заменой цветов:

белый → серый → чёрный → белый.

Можно ли за несколько ходов перекрасить все клетки доски в белый цвет?

Как, зная решение, при котором все клетки доски Глинского перекрашиваются в белый цвет, получить решение, при котором все клетки доски Глинского перекрашиваются в чёрный цвет?

Задача 17 [6]. Докажите, что если для произвольной трёхцветной гексагональной доски решение существует, то число этих решений является целой неотрицательной степенью числа 3.

Вернёмся к двуцветным раскраскам.

Вопрос 2 оказался крепким орешком. И ответ на него неизвестен авторам. Возможно, нужно учитывать достаточно много симметрий квадрата.

Задача 18 (для исследования). Найдите, при каких $n$ для доски $n \times n$ имеется ровно одно решение.

Задача 19 (для исследования). Найдите ответ на вопрос 2. Другими словами, докажите или опровергните, что для квадратной доски $n \times n$ количество способов поменять цвет клеток на противоположный является целой неотрицательной степенью числа 4.

Задача 20 (для исследования). Найдите, при каких $n$ для ацтекского диаманта порядка $n$ имеется ровно одно решение.

Задача 21 (для исследования). Докажите или опровергните, что для ацтекского диаманта порядка $n$ количество способов поменять цвет клеток на противоположный — целая неотрицательная степень числа 4.

## § 9. Решения и указания к упражнениям

**6.** Рассмотрим клетку, которую мы перекрашиваем последней. К моменту её перекрашивания все остальные клетки должны были бы изменить цвет на противоположный. Значит, в этот момент все её соседние клетки — одного с ней цвета и мы эту клетку перекрасить не можем.

Эту задачу несложно обобщить, переложив её на язык графов. Каждую клетку доски мы можем заменить вершиной графа. Если клетки являются соседями, то соединим вершины ребром графа. Отметим, что такое обобщение задачи 6 в терминах графов не усложнит её решения.

**7.** Мы уже знаем, что количество разных таблиц будет степенью двойки. Поскольку из данной таблицы можно получить таблицу с любыми знаками в первых трёх строках, число различных таблиц не меньше чем $2^{12}$. Это число будет искомым ответом: нетрудно убедиться, что первые три строки однозначно определяют четвёртую.

**8.** Заметим, что если заданы все числа первой строки, то все остальные числа таблицы определяются однозначно. (По первой строке заполняем вторую, затем третью и т. д.) Укажем два способа заполнения таблицы. При этом из первого способа будет следовать симметричность таблицы относительно её диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, а из второго способа — симметричность относительно другой диагонали.

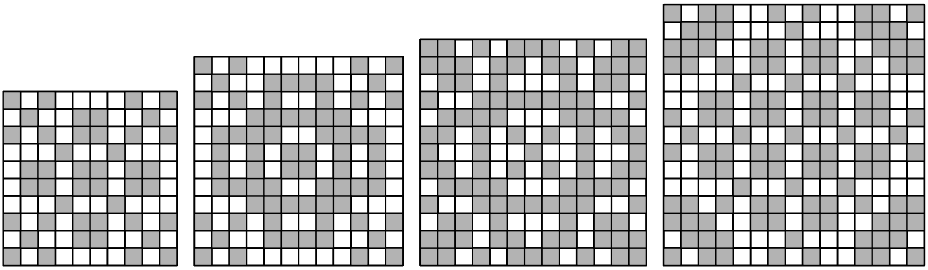
*Первый способ.* Вторую и последующие строки заполняем слева направо: во вторую вписываем $n-1$ число, в третью $n-2$ числа, в четвёртую $n-3$ числа и т. д., в самую нижнюю строку (в левый нижний угол таблицы) вписываем одно число. Затем в каждую из пустых клеток записываем число так, чтобы таблица оказалась симметричной относительно диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Построенная таблица удовлетворяет условию задачи.

*Второй способ.* Аналогичен первому, но строки заполняются справа налево (во вторую строку вписывается $n-1$ число и т. д., в самую нижнюю, т. е. в правый нижний угол таблицы, — одно число). Пустые клетки заполняем так, чтобы таблица оказалась симметричной относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний.

Поскольку таблица с заданной первой строкой существует только одна, она совпадает с построенными, т. е. симметрична относительно каждой из своих больших диагоналей. Из симметричности относительно диагоналей следует симметричность относительно центра таблицы.

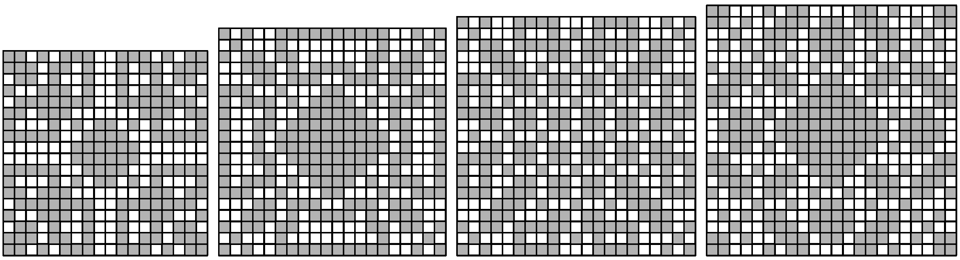
**9.** См. рис. 14, 15, 16, 17.

**10.** См. рис. 18.



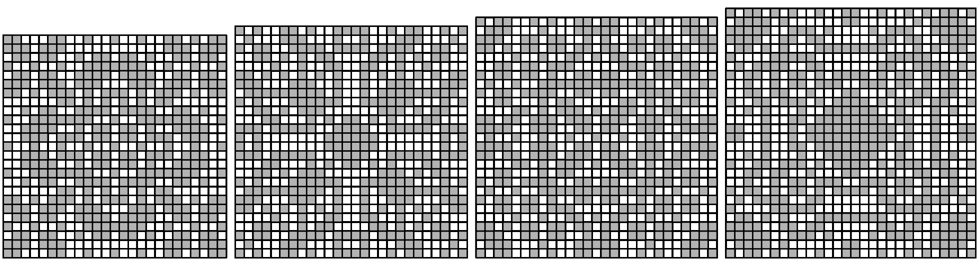
$n = 10$ $n = 12$ $n = 13$ $n = 15$

*Рис. 14*



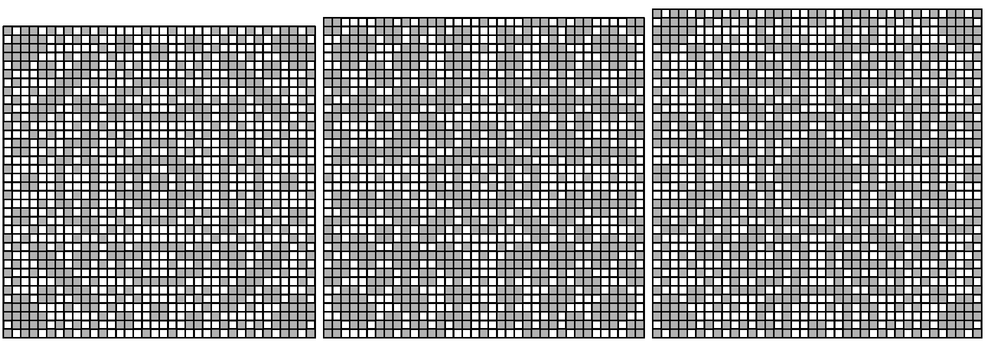
$n = 18$ $n = 20$ $n = 21$ $n = 22$

*Рис. 15*



$n = 25$ $n = 26$ $n = 27$ $n = 28$

*Рис. 16*



$n = 36$ $n = 37$ $n = 38$

*Рис. 17*

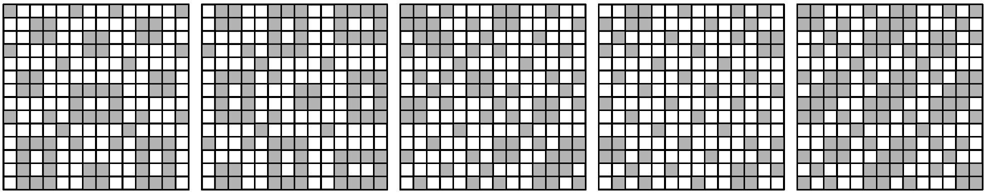


Рис. 18

Таблица 1

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a+b+1$ | $a+c+1$ | $b+c+d+1$ | $e$ | $b+c+e+1$ | $a$ | $a+c+e+1$ | $c+e$ |
| $b$ | $a+b+c+1$ | $d$ | $a+b+d+e+1$ | $d+1$ | $a+b+c$ | $b+1$ | $0$ | $b$ |
| $c$ | $b+c+d+1$ | $a+e$ | $a+c+e$ | $c+1$ | $a+b+d+e$ | $c$ | $a+c+e+1$ | $a+e$ |
| $d$ | $c+d+e+1$ | $b$ | $a+b+d+e+1$ | $b+1$ | $c+d+e$ | $d+1$ | $0$ | $d$ |
| $e$ | $d+e+1$ | $c+e+1$ | $b+c+d+1$ | $a$ | $a+c+d+1$ | $e$ | $a+c+e+1$ | $a+c$ |

$\mapsto$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a+b$ | $e$ | $a+b+d+e+1$ | $e+1$ | $a+b$ | $c+e$ | $a+c+e$ | $a+1$ |
| $a+b+c+1$ | $d$ | $a+b+d+e+1$ | $d+1$ | $a+b+c$ | $b+1$ | $0$ | $b$ |
| $b+c+d$ | $c+1$ | $0$ | $c$ | $b+c+d+1$ | $a+e$ | $a+c+e$ | $c+1$ |
| $c+d+e+1$ | $b$ | $a+b+d+e+1$ | $b+1$ | $d+e+c$ | $d+1$ | $0$ | $d$ |
| $d+e$ | $a$ | $a+b+d+e+1$ | $a+1$ | $d+e$ | $a+c$ | $a+c+e$ | $e+1$ |

$\mapsto$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b+c+e$ | $e+1$ | $b+c+d$ | $a+c+1$ | $a+b+1$ | $a+1$ | $0$ | $a$ | $\ldots$ |
| $a+b+c+1$ | $d$ | $a+b+d+e+1$ | $d+1$ | $a+b+c$ | $b+1$ | $0$ | $b$ | $\ldots$ |
| $a+b+d+e$ | $c$ | $a+c+e+1$ | $a+e$ | $b+c+d$ | $c+1$ | $0$ | $c$ | $\ldots$ |
| $c+d+e+1$ | $b$ | $a+b+d+e+1$ | $b+1$ | $c+d+e$ | $d+1$ | $0$ | $d$ | $\ldots$ |
| $a+c+d$ | $a+1$ | $b+c+d$ | $c+e+1$ | $d+e+1$ | $e+1$ | $0$ | $e$ | $\ldots$ |

**11.** См. табл. 1.

**12.** Вершины, куда необходимо сделать ход, на графах обозначены чёрным цветом.

а) Граф для цилиндрической доски $8 \times 8$ см. на рис. 19 наверху слева.

б) Граф для тороидальной доски $8 \times 8$ см. на рис. 19 внизу. Поскольку из любой вершины графа тороидальной доски $n \times n$ для $n \geqslant 3$ выходит ровно 4 ребра, одной из подходящих раскрасок будет раскраска с ходом в каждую вершину.

в) Граф для листа Мёбиуса, склеенного из доски $8 \times 8$, см. на рис. 19 наверху справа.

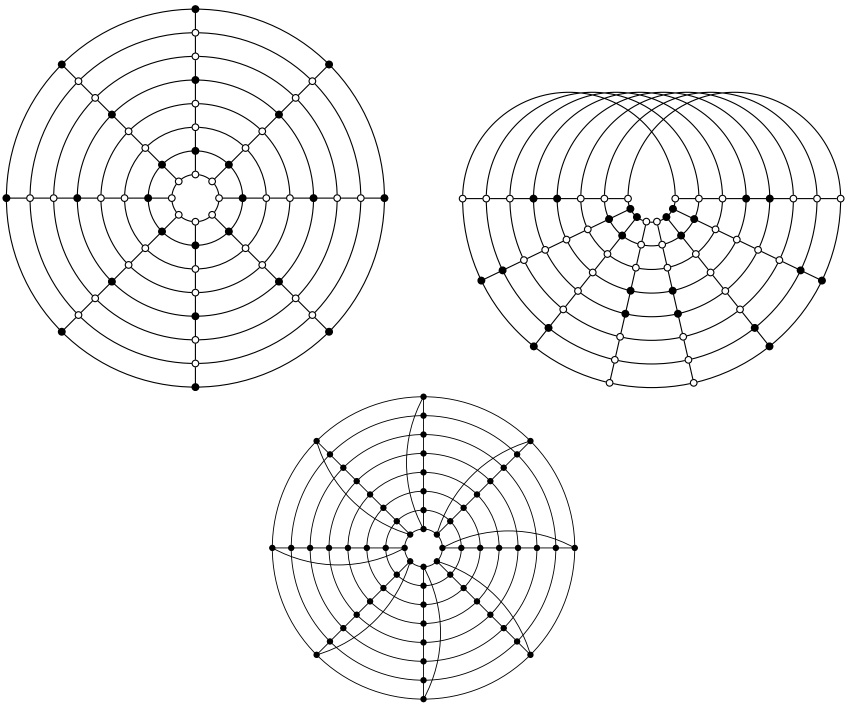


Рис. 19

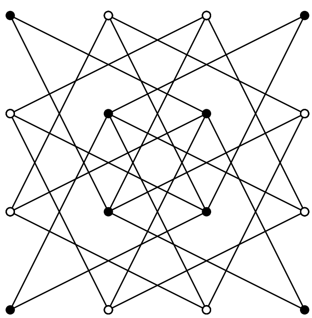


Рис. 20

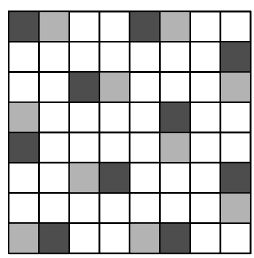


Рис. 21

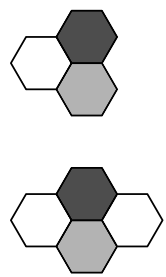


Рис. 22

**13.** *Указание.* В случае $3 \times 3$ граф представляет собой восьмирёберный цикл и изолированную точку. В случае $4 \times 4$ см. рис. 20.

**14.** См. рис. 21. Ходы в клетки, отмеченные чёрным, перекрашивают все чёрные клетки и не трогают белые клетки доски. И наоборот, ходы в клетки, отмеченные серым, перекрашивают все белые клетки и не трогают чёрные клетки доски.

**15.** См. рис. 22.

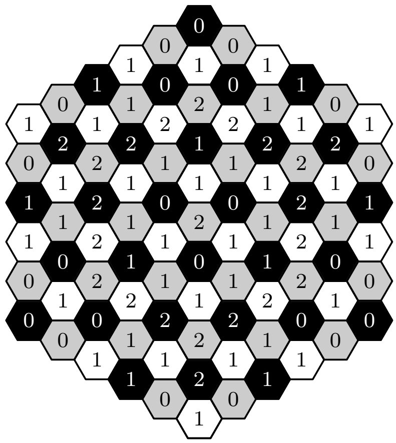


*Рис. 23*

**16.** Одно из возможных решений (для белой раскраски) см. на рис. 23. В каждой ячейке записано количество ходов в эту ячейку. Конечно, при решении этой задачи можно применить все методы, о которых мы говорили ранее. Можно также попытаться составить систему линейных уравнений с коэффициентами 0, 1, 2 (над полем вычетов по модулю 3), но не будем заставлять читателя решать эту систему из 91 уравнения с 91 неизвестным.

**17.** *Указание.* С учётом того, что решение существует, проведите рассуждения, аналогичные решению задачи 4, и получите соотношение $ks = 3^n$, где $n$ — число вершин графа, $k$ — число классов, в каждом из которых по $s$ элементов.

## Список литературы

[1] *Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А. и др.* Математика. Областные олимпиады. М.: Просвещение, 2010. С. 29, задача 200.

[2] *Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А. и др.* Математика. Областные олимпиады. М.: Просвещение, 2010. С. 54, задача 385.

[3] *Акулич И.* Призрак Леонардо // Квант. 2008. № 1. С. 26–29.

[4] *Вялый М. Н.* Пфаффианы или искусство расставлять знаки // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 129–142.

[5] *Дорофеев В., Спивак А.* Раскраски графов и линейные уравнения // Квант. 2011. № 4. С. 39–42.

[6] *Журавлёв В., Самовол П.* Охота на призрак Леонардо // Квант. 2011. № 4. С. 36–38.

[7] Конкурс им. А. П. Савина «Математика 6–8», задача 5 // Квант. 2007. № 4. С. 27.

[8] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 249, задача 2.

[9] Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. М.: МЦНМО, 2009. С. 48, задача 16.14.

[10] *Толпыго А. К.* Тысяча задач Международного математического Турнира городов. М.: МЦМНО, 2010. С. 179, XXIV Турнир городов (2002/03), задача 46.

Валерий Михайлович Журавлёв, ПАО «Туполев», Москва, Россия

zhuravlevvm@mail.ru

Пётр Исаакович Самовол, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel

pet12@012.net.il