
Задачник

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Какая из двух кривых длиннее: эллипс $\{(x, y) : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\}$ или синусоида $\{(x, \sin x) : 0 \leq x \leq 2\pi\}$?
(Л. Радзивиловский)
2. Докажите равенство

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^n - \sum_{j=1}^n (x_1 + \dots + \widehat{x}_j + \dots + x_n)^n + \\ & + \sum_{j_1 < j_2} (x_1 + \dots + \widehat{x}_{j_1} + \dots + \widehat{x}_{j_2} + \dots + x_n)^n + \dots + \\ & + (-1)^{|J|} \sum_{j_1 < \dots < j_{|J|}} (x_1 + \dots + \widehat{x}_{j_1} + \dots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \dots + x_n)^n + \dots + \\ & + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^n = n! \prod_{i=1}^n x_i, \end{aligned}$$

где \widehat{x}_j означает, что соответствующий член опускается.

(А. Я. Канель-Белов)

3. Сеть железных дорог представляет собой дерево (неориентированный конечный связный граф без циклов). По сети проходят маршруты электричек, посредством которых можно проехать от любой станции до любой (возможно, с пересадками). Электричка может повернуть назад лишь на конечных станциях маршрута. Количество тупиков (висячих вершин, т. е. вершин степени 1) в данной сети равно n .
- а) Каково наименьшее возможное количество маршрутов, если от любой станции до любой можно проехать, возможно с пересадками?
(Фольклор)
- б) Каково наименьшее возможное количество маршрутов, если от любой станции до любой можно проехать не более чем с одной пересадкой?
(Б. Р. Френкин)
4. На плоскости отмечено n прямых общего положения, т. е. никакие три не пересекаются в одной точке, никакие две не параллельны и любые три точки пересечения либо не лежат на одной прямой, либо лежат на одной из отмеченных. Сколькими различными способами можно добавить *хорошую* прямую (т. е. не проходящую через точку пересечения двух отмеченных)? Два способа считаются *одинаковыми*, если один можно получить из другого, непрерывно двигая новую прямую так, чтобы она всё время оставалась *хорошей*.
(Фольклор)
5. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что при всяком целом x найдётся такое целое y , что $P(x) = Q(y)$. Докажите, что найдётся такой многочлен R , что $P(x) = Q(R(x))$ при всех x . Что будет, если условие задачи ослабить, т. е. потребовать, чтобы указанное y нашлось для бесконечно многих целых x ?
(А. Я. Канель-Белов)
6. По мотивам задачи М. Патерсон и Д. Стинсона [1].
- а) По кругу стоят n мудрецов, у каждого на голове шапка одного из k цветов. Каждый мудрец видит всех оставшихся. Мудрецы по порядку (по часовой стрелке) говорят либо «пас», либо предполагаемое название цвета своей шапки (в зависимости от того, что они видят и сколько кругов прошло). Все распределения цветов равновероятны. Мудрецы могут заранее согласовать свои ответы. Их цель — чтобы первый, назвавший свой цвет, не ошибся. Какую максимальную вероятность этого они могут обеспечить?
(И. В. Митрофанов)
- б) Король решил казнить n мудрецов. Их поставят в ряд друг за другом (так, чтобы все смотрели в одном направлении), на каждого наденут шляпу белого или чёрного цвета. Каждый мудрец будет видеть шляпы всех впереди стоящих. У каждого мудреца по очереди (от последнего к первому) спросят цвет его шляпы, и если он угадает, то его помилуют

(но уже по окончании опроса). Мудрецам разрешили договориться заранее, но оказалось, что k из них безумны (а кто — неизвестно). Безумный мудрец называет случайный цвет вне зависимости от договорённостей. Какое максимальное количество мудрецов может гарантированно спастись? (М. Фадин)

7. Радиус озера n м. Барон Мюнхгаузен имеет большой запас дощечек длины 1 м каждая и утверждает, что с помощью этих дощечек он может добраться до середины озера. Дощечка считается отрезком, и класть её можно так, чтобы каждый конец был на берегу или на другой дощечке.
- а) Не хвастает ли барон?
 б) Докажите, что для некоторой константы $C > 0$ при всех достаточно больших n ему не хватит Cn^3 дощечек. (А. Я. Канель-Белов)

8. (Задача на исследование.) Дано N -элементное множество M , $N \rightarrow \infty$, и случайное отображение $f: M \rightarrow M$.
- а) Каково наиболее вероятное число элементов у множества $f(M)$?
 б) Оцените n при условии $f^{(n)}(M) = f^{n+1}(M)$.
 в) Оцените мощность множества $S = f^{(n)}(M)$.
 г) Пусть ограничение f на S есть перестановка. Оцените число её циклов. Постарайтесь получить информацию о распределении описанных выше величин. (Фольклор)

9. В выпуклом многограннике M степень каждой вершины равна 5, а у всех граней, кроме, может быть, грани A , число сторон делится на 3. Докажите, что число сторон грани A тоже делится на 3. (И. В. Митрофанов)

10. Пусть A — матрица порядка n с комплексными коэффициентами, собственные значения которой по модулю не превосходят 1. Докажите, что

$$\|A^n\| \leq \frac{n}{\ln 2} \|A^{n-1}\|.$$

$$(\|B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\|, \text{ где } x \in \mathbb{C}^n.) \quad (\Phi. В. Петров)$$

11. Пусть $a, b > 0$, $M = (a + b)/2$, $G = \sqrt{ab}$. Докажите равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + M^2)(x^2 + G^2)}}. \quad (\text{К. Ф. Гаусс})$$

12. а) Область между двумя параллельными прямыми раскрашена в 2 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с концами одного цвета.

(Л. А. Емельянов)

б) Область между двумя параллельными плоскостями раскрашена в 4 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с концами одного цвета.

(А. Я. Канель-Белов, Д. Черкашин, В. Воронов)

УТОЧНЕНИЕ УСЛОВИЯ

Условие задачи 20.4 (вып. 20, с. 250) было сформулировано неточно. Приводим точную формулировку.

ЗАДАЧА 20.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентной порядка k* , если для некоторых b_1, \dots, b_k при всех $n \geq k$ выполняется равенство

$$b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \dots + b_k a_{n-k} = 0.$$

Пусть $b_0 = 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i . Докажите, что либо последовательность $\{a_n\}$ содержит член, имеющий не менее 2016 различных простых делителей, либо $a_n = c_n d^n$ для некоторой периодической последовательности целых чисел $\{c_n\}$ и некоторого целого d .

ДОПОЛНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ 6.9

В далёком 1978 году на отборочный тур к Всесоюзной олимпиаде школьников Г. А. Гальпериным была предложена замечательная

ЗАДАЧА. Проектор освещает угол $2\pi/n$. Дано n точек, в каждой стоит по прожектору. Докажите, что прожекторы можно развернуть так, чтобы они осветили всю плоскость.

В. М. Гальперин (тогда десятиклассник) придумал очень красивое решение этой задачи. Позже он вместе с автором задачи написал статью [2].

Эту задачу в дальнейшем обобщил В. В. Произволов, и это обобщение было опубликовано в нашем сборнике (сер. 3, вып. 6, с. 134):

ЗАДАЧА 6.9. Дан выпуклый n -угольник и n точек внутри него. Каждой точке сопоставляется сторона n -угольника (разным точкам — разные стороны) и рассматриваются треугольники, построенные на точках и соответствующих сторонах. Докажите, что можно так установить соответствие, чтобы получившиеся треугольники

а) не перекрывались;

б) покрывали внутренность многоугольника. (В. В. Произволов)

Если отправить точки на бесконечность, то как раз получается задача о прожекторах.

Решению обобщённой задачи были посвящены статьи [3, 4]. Очень красивое топологическое решение придумал Р. М. Карасёв. Развитию этой темы посвящена его статья [5] в настоящем сборнике.

Задача В. В. Произволова имеет обобщение и для неевклидовой плоскости — если расположить вершины многоугольника на абсолюте и рассмотреть модель Кэли — Клейна. В то же время Г. А. Гальперину принадлежит принципиально другое обобщение этой задачи, которое и предлагается читателям:

ЗАДАЧА 6.9'. Проектор освещает бесконечный угол величиной в 1 градус. Разрешается располагать произвольным образом любое конечное количество прожекторов на плоскости так, чтобы они осветили целиком всю плоскость. Какое наименьшее число прожекторов потребуется, если это

а) евклидова плоскость;

б) плоскость Лобачевского?

(Г. А. Гальперин)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Paterson M. B., Stinson D. R.* Yet another hat game // *Electron. J. Combin.* 2010. V. 17, № 1. P. 1–12.
- [2] *Гальперин В., Гальперин Г.* Освещение плоскости прожекторами // *Квант.* 1981. № 11. С. 28–30.
- [3] *Петров Ф. В., Рукшин С. Е.* Теоремы о покрывающих и непересекающихся треугольниках и их обобщения // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8.* М.: МЦНМО, 2004. С. 222–228.
- [4] *Гальперин Г. А.* Геометрическое решение проблемы В. В. Произволова // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8.* М.: МЦНМО, 2004. С. 229–236.
- [5] *Карасёв Р. Н.* О разбиениях многогранника на выпуклые части // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21.* М.: МЦНМО, 2017. С. 224–234.