Геометрия: классика и современность

Теорема о семи окружностях и другие новые теоремы*

С. Дж. А. Ивлин, Г. Б. Мани-Каутс, Дж. А. Тиррелл

Вышедшая в 1974 г. книга C. J. A. Evelin, G. B. Money-Coutts, J. A. Tyrrell «The seven circles theorem and other new theorems» состоит из трёх независимых параграфов. Ниже публикуется перевод второго параграфа. Сохранены авторские обозначения.

§ 2. Обобщения теорем Паскаля и Брианшона

Теорема Паскаля утверждает, что три точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в конику, лежат на одной прямой (которая называется *прямой Паскаля* шестиугольника). Двойственная ей теорема Брианшона утверждает, что три главные диагонали описанного около коники шестиугольника пересекаются в одной точке (которая называется *точкой Брианшона*)[1]. Эти теоремы иллюстрируются на рис. 1 и рис. 2 (в первом случае шестиугольник, как обычно делается, изображён самопересекающимся ради компактности рисунка).

Эти теоремы не только интересны сами по себе, но и важны как отправной пункт различных путей геометрического исследования, и цель этого параграфа — проследить некоторые из них. Раздел 2.1 содержит новую

* Перевод А. А. Заславского.

[1] В дальнейшем термины «вписанный» и «описанный» означают соответственно «вписанный в конику» и «описанный около коники». Многоугольники могут быть самопересекающимися. — *Прим. перев.*

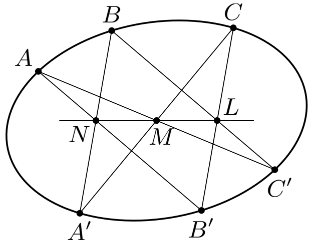

Рис. 1. *К теореме Паскаля*

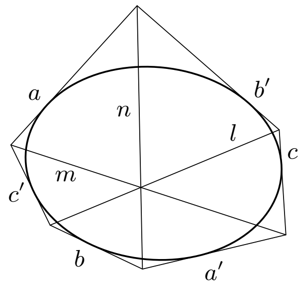

Рис. 2. *К теореме Брианшона*

(как мы полагаем) теорему о прямых Паскаля семи шестиугольников, образованных вершинами вписанного семиугольника. В разделах 2.2–2.4 доказывается ряд теорем, обобщающих теорему Паскаля (подобно тому как сама эта теорема обобщает более простую теорему Паппа). Наконец, в разделе 2.5 доказывается элегантная теорема о вписанном восьмиугольнике.

2.1. Теорема о семиугольнике

Теорема Паскаля относится к шести точкам, лежащим на конике в фиксированном циклическом порядке. В нашей первой теореме рассматриваются шестиугольники, порождённые семью точками коники с фиксированным циклическим порядком.

Теорема о семиугольнике. *Пусть H — вписанный семиугольник (циклический порядок вершин фиксирован). Тогда прямые Паскаля семи шестиугольников, получающихся удалением одной из вершин H (при сохранении циклического порядка остальных вершин), образуют описанный семиугольник I. При этом точки Брианшона семи шестиугольников, получающихся удалением одной из сторон I (с сохранением циклического порядка остальных), совпадают с вершинами исходного семиугольника H.*

Доказательство. Обозначим последовательные вершины H через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (см. рис. 3) и введём следующие точки:

$$B = (45, 71), \quad C = (56, 12), \quad D = (67, 23), \quad E = (71, 34),$$
$$F = (12, 45), \quad X = (23, 56), \quad Y = (34, 67), \quad A = (FX, BY),$$

где $B = (45, 71)$ означает, что B является точкой пересечения прямых, соединяющих 4 с 5 и 7 с 1, и т. д.

Пусть теперь $H_1, \ldots, H_7$ — шестиугольники, полученные из H удалением вершин $1, \ldots, 7$ соответственно, а $p_1, \ldots, p_7$ — их прямые Паскаля. Легко видеть, что $p_1 = XY$, $p_2 = YB$, $p_3 = BC$, $p_4 = CD$, $p_5 = DE$, $p_6 = EF$, $p_7 = FX$.

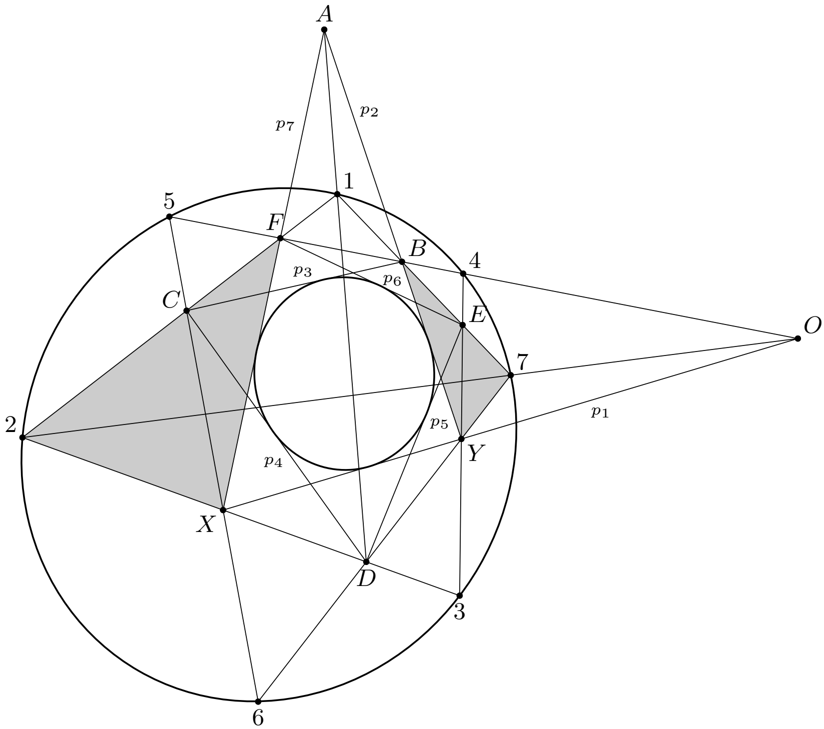

Рис. 3. К теореме о семиугольнике

Рассмотрев шестиугольник H_1, убеждаемся, что третьей точкой на его прямой Паскаля будет $O = (45, 72)$. Следовательно, прямые 45, 72 и XY пересекаются в одной точке, или, так как B и F лежат на прямой 45, треугольники $2FX$ и $7BY$ перспективны (относительно точки O на рис. 3). По теореме Дезарга точки пересечения соответственных сторон этих треугольников $A = (FX, BY)$, $D = (2X, 7Y)$ и $1 = (2F, 7B)$ лежат на одной прямой, т. е. прямая AD проходит через точку $1 = (BE, CF)$. По обратной теореме Брианшона шестиугольник $ABCDEF$, образованный прямыми $p_2, \ldots, p_7$, описан около коники, а его точка Брианшона совпадает с 1. Таким образом, прямая p_2 касается (единственной) коники k, касающейся прямых $p_3, p_4, \ldots, p_7$.

Аналогично прямые $p_1, p_3, \ldots, p_7$ образуют описанный шестиугольник, точка Брианшона которого совпадает с 2, и т. д. В частности, прямая p_1 также касается коники k, т. е. эта коника касается всех прямых $p_1, p_2, \ldots, p_7$, откуда следует теорема. $\square$

Интересно было бы исследовать фигуру, определяемую семью точками коники, рассмотренными во всех 360 возможных циклических порядках.

Эта фигура содержит 420 прямых Паскаля и 360 коник, причём каждая прямая касается шести коник, а каждая коника — семи прямых. Однако здесь мы не станем этим заниматься. (Аналогичное исследование фигуры из 60 прямых Паскаля, задаваемых шестью точками коники, содержится, например, в [1, Appendix].)

2.2. Теорема о трёх кониках

Из многих проективных теорем о кониках можно получать интересные частные случаи, заменяя конику парой прямых. Например, теорема Паппа получается таким образом из теоремы Паскаля. Здесь мы докажем теорему, для которой сама теорема Паскаля является таким частным случаем.

Теорема о трёх кониках. *Если три коники проходят через две данные точки, то три прямые, соединяющие пары остальных общих точек*[2] *каждых двух коник, пересекаются в одной точке* (рис. 4).

Отметим, что если две из трёх коник заменить парами прямых, теорема о трёх кониках переходит в теорему Паскаля[3], а если все три коники вырождены — в теорему Паппа. Если вырождена ровно одна коника, то получается ещё один частный случай, промежуточный между общей теоремой и теоремой Паскаля.

Доказательство. Пусть (см. рис. 4) коники S_1, S_2, S_3 проходят через точки I, J; S_1 и S_2 пересекаются также в точках P_3, Q_3; S_1 и S_3 — в точках P_2, Q_2; S_2 и S_3 — в точках P_1, Q_1. Докажем, что прямые P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 пересекаются в одной точке.

Пусть коника S_1 задана уравнением $S_1(x, y) = 0$, а прямые IJ, P_2Q_2 и P_3Q_3 — уравнениями $L = 0$, $L_2 = 0$ и $L_3 = 0$ соответственно. Тогда коника S_2 принадлежит пучку коник, содержащему S_1 и пару прямых IJ, P_3Q_3, и, значит, её уравнение имеет вид $S_1 + \lambda LL_3 = 0$, где λ — некоторая постоянная. Аналогично уравнение коники S_3 имеет вид $S_1 + \mu LL_2 = 0$.

Тогда уравнение

$$(S_1 - \lambda LL_3) - (S_1 - \mu LL_2) = L(\lambda L_3 - \mu L_2) = 0$$

задаёт конику из пучка, содержащего S_2 и S_3, т. е. проходящую через точки I, J, P_1, Q_1. Эта коника распадается на две прямые, заданные урав-

[2] Возможно, мнимых. — *Прим. перев.*

[3] Пусть в конику вписан шестиугольник 123456. Применим теорему о трёх кониках к данной конике, паре прямых (12, 56) и паре прямых (23, 45). Все они проходят через точки 2, 5. Получим, что в одной точке пересекаются прямые 16, 34 и прямая, соединяющая точки пересечения 12 с 34 и 23 с 56. Это и есть теорема Паскаля применительно к 123456. — *Прим. перев.*

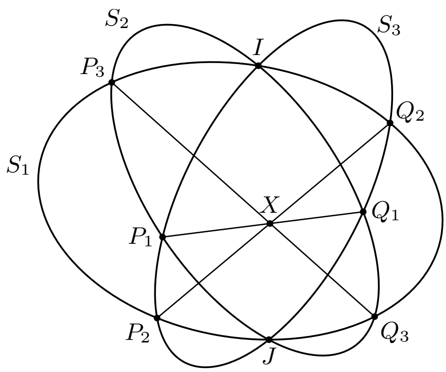

Рис. 4. К теореме о трёх кониках

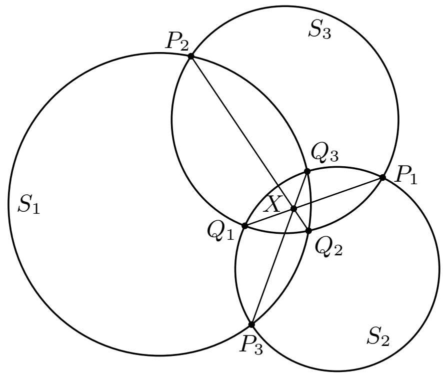

Рис. 5. Пересечение радикальных осей

нениями $L = 0$ и $\mu L_3 - \lambda L_2 = 0$. Так как первое из этих уравнений задаёт прямую IJ, второе должно задавать прямую P_1Q_1. Таким образом, уравнение прямой P_1Q_1 является линейной комбинацией уравнений прямых P_2Q_2 и P_3Q_3, т. е. эти три прямые проходят через одну точку, что и требуется. □

Менее элементарное доказательство можно получить с помощью известной *теоремы о девяти точках*, утверждающей, что *любая кубика, проходящая через восемь из девяти точек пересечения двух данных кубик, проходит и через девятую общую точку*. Действительно, применим эту теорему к двум вырожденным кубикам, одна из которых состоит из коники S_2 и прямой P_2Q_2, а другая — из S_3 и P_3Q_3. Мы видим, что кубика, состоящая из S_1 и прямой P_1Q_1, проходит через восемь их общих точек (а именно I, J, P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3). Следовательно, она проходит и через точку пересечения прямых P_2Q_2 и P_3Q_3. Так как эта точка не может лежать на S_1, она лежит на прямой P_1Q_1. Таким образом, P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 проходят через эту точку (на рис. 4 она обозначена через X).

Нелишне отметить, что частными случаями теоремы о трёх кониках являются два известных факта евклидовой геометрии.

1) Если I, J — круговые точки (мнимые точки пересечения бесконечно удалённой прямой с некоторой окружностью), получаем известный факт (см. рис. 5): *попарные радикальные оси трёх окружностей пересекаются в одной точке*[4].

2) Если круговыми являются точки P_3, Q_3, получаем следующее утверждение.

[4] Отсюда можно получить ещё одно доказательство теоремы о трёх кониках, см. [2, с. 89]. — *Прим. перев.*

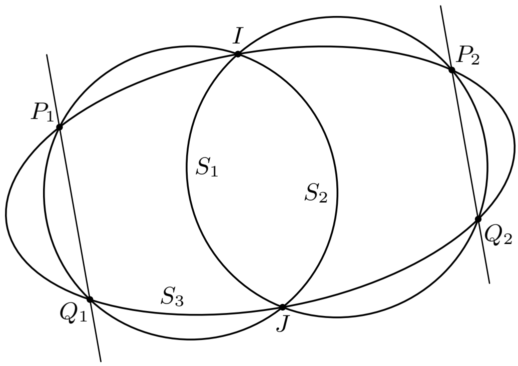

Рис. 6. *Частный случай теоремы о трёх кониках*

Если окружности S_1, S_2 пересекаются в точках I, J, а проходящая через эти точки коника S_3 пересекает S_1 также в точках P_2, Q_2 и S_2 — в точках P_1, Q_1, то прямые P_1Q_1 и P_2Q_2 параллельны (рис. 6).

Справедливо также следующее обращение теоремы о трёх кониках.

Пусть коники S_2, S_3 пересекаются в точках I, J, P_1, Q_1, а P_2Q_2 и P_3Q_3 — хорды коник S_3 и S_2 соответственно, пересекающиеся на прямой P_1Q_1. Тогда точки I, J, P_2, Q_2, P_3, Q_3 лежат на одной конике.

Доказательство получается стандартным рассуждением от противного.

Представляет интерес также двойственная теорема.

Если три коники имеют две общие касательные, то точки пересечения пар оставшихся общих касательных лежат на одной прямой (рис. 7).

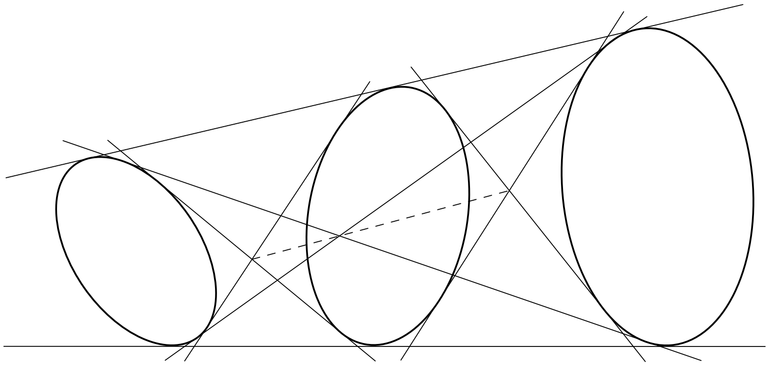

Рис. 7. *К двойственной теореме о трёх кониках*

Любопытное применение теоремы о трёх кониках показано на рис. 8. Пусть восемь точек $1, \ldots, 8$ лежат на конике S, а четыре коники a, b,

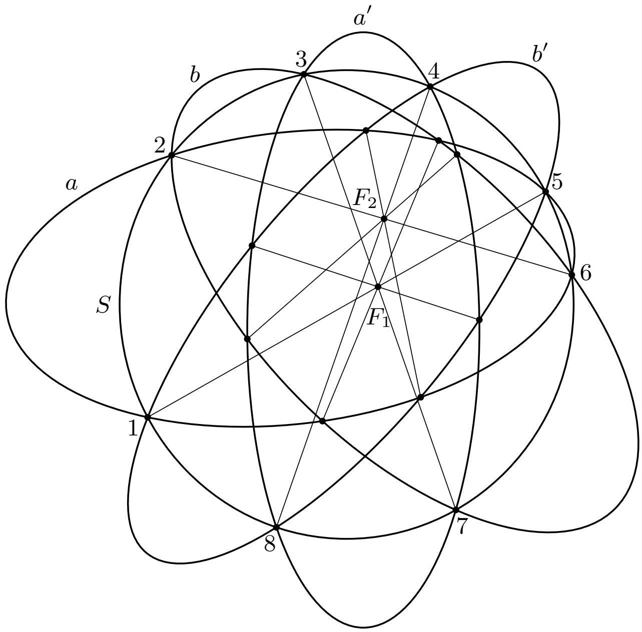

Рис. 8. Применение теоремы о трёх кониках

a', b' проходят через 1256, 2367, 3478 и 4581 соответственно. Тогда, применяя теорему к тройкам коник (S, a, b), (S, b, a'), (S, a', b') и (S, b', a), получаем две четвёрки конкурентных прямых (на рис. 8 пересекающихся в точках F_1 и F_2 соответственно).

2.3. Теорема о двойном касании

В предыдущем разделе было показано, что, если три коники проходят через две общие точки, то их «другие» общие хорды пересекаются в одной точке. Тем не менее, если у трёх коник есть три общие хорды, проходящие через одну точку, то эти коники заведомо не обязаны иметь две общие точки. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема о двойном касании. *Пусть коники S_1, S_2, S_3 таковы, что через некоторую точку X, не лежащую ни на одной из них, можно провести общую хорду каждой пары коник (причём эти три хорды попарно различны). Тогда существует коника ω, касающаяся каждой из данных коник в двух точках.*

Доказательство. Так как три хорды различны и пересекаются в одной точке, мы можем считать, что содержащие их прямые заданы уравнениями $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, причём

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0. \tag{1}$$

Пусть $L_1 = 0$ — уравнение прямой, содержащей общую хорду коник S_2 и S_3, и т. д. Если коника S_i задана уравнением $S_i = 0$, то $S_2 = S_3 + \lambda L_1 M_1$, где $M_1 = 0$ — уравнение общей хорды коник S_2 и S_3, противоположной хорде с уравнением $L_1 = 0$ (т. е. проходящей через две точки их пересечения, не лежащие на прямой $L_1 = 0$). Без ограничения общности можно положить $\lambda = 1$ (поскольку уравнение $M_1 = 0$ можно умножить на соответствующий коэффициент). Таким образом,

$$S_2 - S_3 = L_1 M_1. \tag{2}$$

Аналогично

$$S_3 - S_1 = L_2 M_2, \tag{3}$$

где $M_2 = 0$ — уравнение общей хорды коник S_1 и S_3, противоположной хорде с уравнением $L_1 = 0$.

Исключая S_3 из (2) и (3), получаем

$$S_1 - S_2 = -L_1 M_1 - L_2 M_2. \tag{4}$$

Так как точка X лежит на прямых $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$, её координаты удовлетворяют уравнению $S_1 - S_2 = 0$. Но в пучке коник, содержащем S_1 и S_2, лишь одна коника проходит через X, а поскольку X лежит на общей хорде S_1 и S_2, эта коника распадается на прямую $L_3 = 0$ и противоположную общую хорду S_1 и S_2, заданную, скажем, уравнением $M_3 = 0$. Следовательно,

$$S_1 - S_2 = L_3 M_3. \tag{5}$$

Теперь из (4) и (5) получаем равенство

$$L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3 = 0,$$

которое с учётом (1) приводится к виду

$$L_2(M_2 - M_3) = L_1(M_3 - M_1).$$

Так как прямые $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ не параллельны, отсюда следует, что

$$M_2 - M_3 = kL_1 \tag{6}$$

и

$$M_3 - M_1 = kL_2 \tag{7}$$

для некоторой константы k, что вместе с (1) влечёт

$$M_1 - M_2 = kL_3. \tag{8}$$

Уравнение (6) означает, что прямые $L_1 = 0$, $M_2 = 0$ и $M_3 = 0$ пересекаются в одной точке. Заметим, что они содержат попарные общие хорды данных коник — не те три, которые предполагались конкурентными изначально. Аналогично интерпретируются равенства (7) и (8). Таким образом, мы попутно доказали следующее утверждение.

Если у каждых двух из трёх коник можно выбрать общую хорду так, что эти хорды пересекутся в одной точке, то это можно сделать четырьмя различными способами.

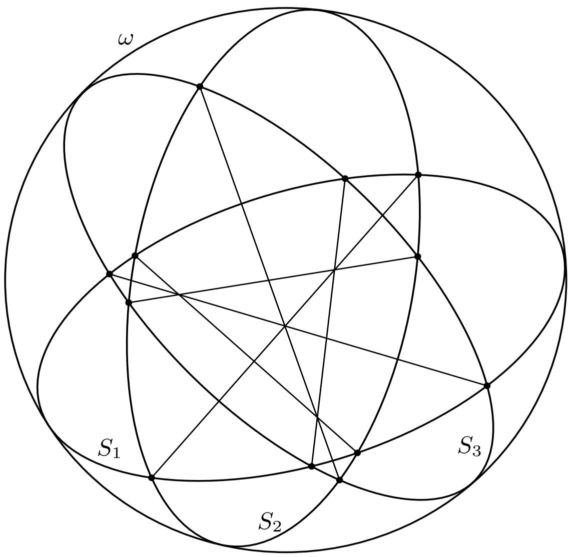

Рис. 9. *К теореме о двойном касании и обратной к ней*

Возвращаясь к доказательству теоремы о двойном касании, заметим, что верно соотношение

$$\begin{aligned} 4kS_1 + (M_2 + M_3 - M_1)^2 &= 4kS_2 + (M_3 + M_1 - M_2)^2 = \\ &= 4kS_3 + (M_1 + M_2 - M_3)^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Действительно, например, первое равенство можно переписать в виде

$$4k(S_1 - S_2) = 4M_3(M_1 - M_2),$$

что является очевидным следствием из (5) и (8); аналогично доказывается второе равенство. Следовательно, обозначив любое из трёх равных выражений в (9) через Ω, мы получим, что коника с уравнением $\Omega = 0$ дважды касается каждой из коник S_1, S_2, S_3 (прямые, соединяющие точки касания, заданы уравнениями $M_2 + M_3 - M_1 = 0$, $M_3 + M_1 - M_2 = 0$, $M_1 + M_2 - M_3 = 0$ соответственно). Теорема доказана. □

Обратное утверждение доказывается гораздо проще.

Если существует коника ω, дважды касающаяся каждой из коник S_1, S_2, S_3, то общие точки каждых двух из этих трёх коник можно разбить на пары так, что три пары прямых, соединяющих соответствующие точки, являются тремя парами противоположных сторон полного четырёхвершинника.

Конечно, пару противоположных общих хорд коник, скажем S_1 и S_2, можно выбрать тремя способами, и необходимо определить «правильный» способ. Как это сделать — видно из приведённого ниже доказательства.

Доказательство. Пусть коника ω задана уравнением $\Omega = 0$. Тогда уравнения коник S_1, S_2, S_3 можно задать в виде

$$\Omega + N_1^2 = 0, \quad \Omega + N_2^2 = 0, \quad \Omega + N_3^2 = 0,$$

где $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$ — уравнения прямых, соединяющих точки касания ω соответственно с S_1, S_2, S_3 [5]. Тогда уравнение

$$(\Omega + N_1^2) - (\Omega + N_2^2) = (N_1 + N_2)(N_1 - N_2) = 0$$

будет уравнением вырожденной коники из пучка, определяемого кониками S_1 и S_2. Эта коника распадается на пару прямых с уравнениями

$$N_1 + N_2 = 0, \quad N_1 - N_2 = 0, \tag{10}$$

содержащих две противоположные общие хорды коник S_1 и S_2. Из вида этих уравнений следует, что *эти общие хорды проходят через точку пересечения общих касательных коники ω соответственно с S_2 и S_3* (*в действительности они гармонически разделяют касательные хорды*); *это свойство определяет «правильный» способ выбора пары общих хорд.* Аналогично получаем, что общие хорды S_1 и S_3 задаются уравнениями

$$N_1 + N_3 = 0, \quad N_1 - N_3 = 0, \tag{11}$$

а общие хорды S_2 и S_3 — уравнениями

$$N_2 + N_3 = 0, \quad N_2 - N_3 = 0. \tag{12}$$

Легко видеть, что шесть прямых, заданных уравнениями (10)–(12), являются сторонами и диагоналями четырёхугольника, вершины которого заданы

[5] См. (9) и последующий абзац. — *Прим. перев.*

соотношениями $N_1 = \pm N_2 = \pm N_3$ для всех возможных выборов знаков. Это доказывает обратную теорему о двойном касании. □

Рисунок 9 иллюстрирует теорему о двойном касании и обратную к ней. Отметим, что если коника ω вырождается в пару точек, обратная теорема превращается в доказанную в предыдущем параграфе теорему о трёх кониках. Нетрудно также сформулировать двойственные теоремы.

Если для каждых двух из трёх коник можно выбрать пару общих касательных так, чтобы три точки пересечения касательных из каждой пары были различны и лежали на одной прямой (*не касающейся данных коник*), *то*

(а) *это можно сделать четырьмя различными способами*;

(б) *существует четвёртая коника, дважды касающаяся каждой из данных.*

Верно и обратное: *если существует коника, дважды касающаяся трёх данных, то общие касательные каждых двух данных коник образуют две пары, точки пересечения которых являются вершинами полного четырёхсторонника.*

Рисунок 10 иллюстрирует частный случай этой теоремы, когда коника, дважды касающаяся трёх данных, вырождается в пару круговых точек;

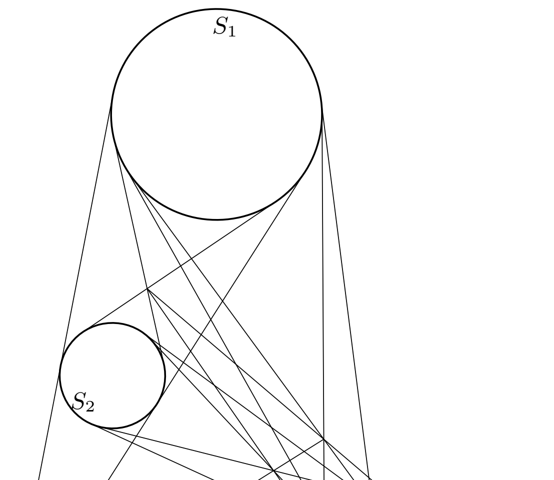

Рис. 10. Частный случай двойственной теоремы о двойном касании

при этом шесть центров гомотетии трёх окружностей являются вершинами полного четырёхсторонника.

2.4. Теорема о четырёх кониках

Полезно посмотреть на конфигурацию, описанную в предыдущем параграфе, с другой стороны. В условиях теоремы о двойном касании справедливо ещё одно тождество:

$$kS_1 + M_2M_3 = kS_2 + M_3M_1 = kS_3 + M_1M_2. \tag{1}$$

Действительно, заметим, что первое равенство эквивалентно равенству $k(S_1 - S_2) = M_3(M_1 - M_2)$, которое легко следует из уравнений (5) и (8) в разделе 2.3; второе равенство доказывается аналогично. Обозначая каждое из равных выражений в (1) через S_0, получаем из $S_0 \equiv kS_1 + M_2M_3$, что коника $S_0 = 0$ проходит через точки пересечения S_1 с прямыми $M_2 = 0$ и $M_3 = 0$. Другие два выражения для S_0 приводят к аналогичным результатам. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если три коники удовлетворяют условию теоремы о двойном касании, т. е. шесть из их двенадцати точек пересечения лежат на трёх пересекающихся в одной точке прямых, то остальные шесть точек пересечения лежат на одной конике.*

Таким образом, двенадцать общих точек делятся на две шестёрки: одна образует шестиугольник Брианшона, другая — шестиугольник Паскаля. Более того, как было показано при доказательстве теоремы о двойном касании, такое деление можно осуществить четырьмя различными способами. Легко доказать и обратное утверждение.

Теорема о четырёх кониках. *Если для каждых двух из трёх коник S_1, S_2, S_3 можно выбрать две общие точки так, чтобы шесть выбранных точек лежали на конике S_0, то прямые, соединяющие оставшиеся точки пересечения каждой пары коник, проходят через одну точку.*

Доказательство. Будем использовать обозначения рис. 11. Пусть коника S_0 задана уравнением $S_0 = 0$, а прямые P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 — уравнениями $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ соответственно. Тогда S_1 принадлежит пучку, заданному коникой S_0 и парой прямых P_2Q_2, P_3Q_3, поэтому её уравнение имеет вид $S_1 \equiv \lambda_1 S_0 + L_2L_3 = 0$ где λ_1 — некоторая постоянная. Аналогично S_2 и S_3 имеют уравнения $S_2 \equiv \lambda_2 S_0 + L_3L_1 = 0$ и $S_3 \equiv \lambda_3 S_0 + L_1L_2 = 0$ с соответствующими постоянными λ_2, λ_3. Тогда

$$\lambda_2 S_3 - \lambda_3 S_2 = L_1(\lambda_2 L_2 - \lambda_3 L_3),$$

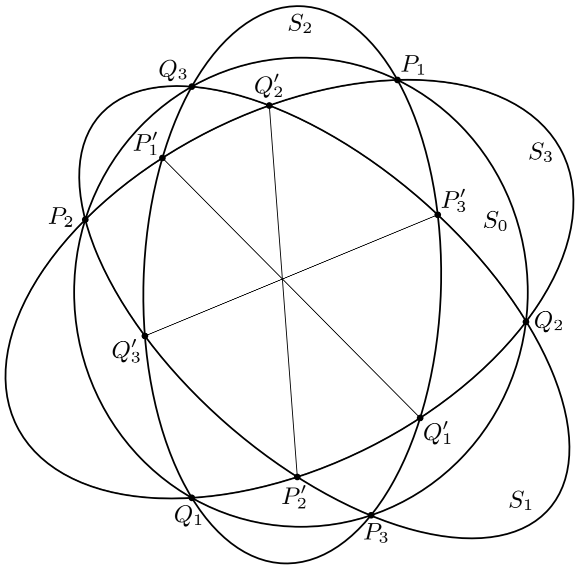

Рис. 11. К теореме о четырёх кониках

т. е. пара прямых $L_1 = 0$, $\lambda_2 L_2 - \lambda_3 L_3 = 0$ принадлежит пучку коник, который задают S_2 и S_3. Но такая пара единственна, а именно P_1Q_1, $P'_1Q'_1$. Следовательно, уравнением прямой $P'_1Q'_1$ будет $\lambda_2 L_2 - \lambda_3 L_3 = 0$. Аналогично прямые $P'_2Q'_2$ и $P'_3Q'_3$ задаются уравнениями $\lambda_3 L_3 - \lambda_1 L_1 = 0$ и $\lambda_1 L_1 - \lambda_2 L_2 = 0$ соответственно. Так как

$$(\lambda_2 L_2 - \lambda_3 L_3) + (\lambda_3 L_3 - \lambda_1 L_1) + (\lambda_1 L_1 - \lambda_2 L_2) = 0,$$

прямые $P'_1Q'_1$, $P'_2Q'_2$ и $P'_3Q'_3$ проходят через одну точку, ч. т. д. □

Рисунок 12 иллюстрирует двойственную теорему:

Теорема. *Если две общих касательных каждых двух из трёх коник касаются четвёртой коники, то оставшиеся общие касательные каждой пары пересекаются в трёх коллинеарных точках.*

Интересный пример применения теоремы о четырёх кониках и обращения теоремы о трёх кониках (см. раздел 2.2) показан на рис. 13. Окружность S_0 и коника S_1 пересекаются в точках A, B, C, D. Окружность S_2, проходящая через A и B, пересекает S_1 также в точках E и F, а окружность S_3, проходящая через C и D, — в точках G и H. Тогда E, F, G, H лежат на одной окружности. Для доказательства сначала применим теорему о четырёх кониках к S_1, S_2, S_3 (две точки пересечения каждой пары лежат на S_0) и получим, что EF и GH пересекаются на радикальной оси KL окружностей S_2 и S_3; а затем, применив обратную теорему о трёх

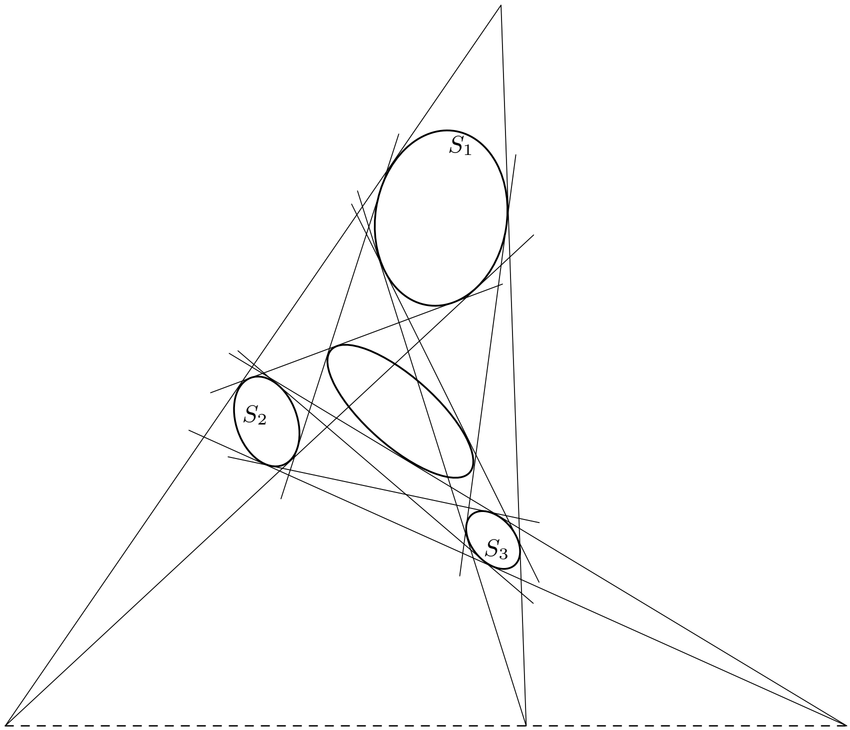

Рис. 12. К двойственной теореме о четырёх кониках

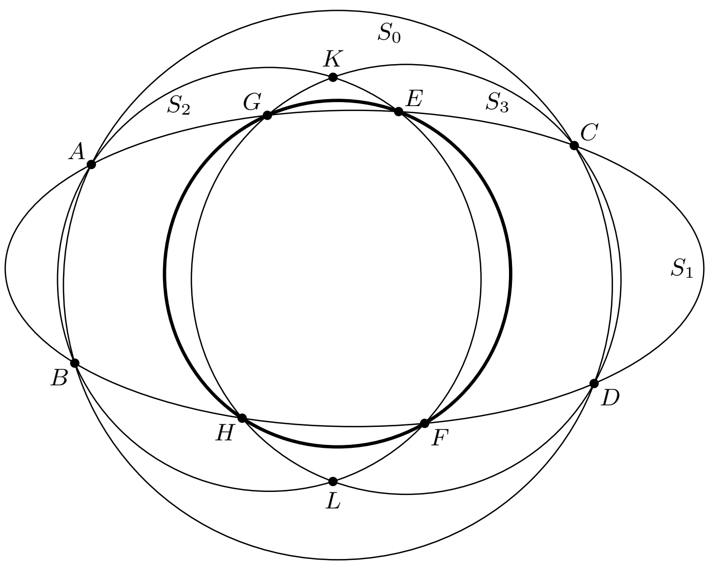

Рис. 13. Применение теорем о трёх и четырёх кониках

кониках к S_2 и S_3, получим, что E, F, G, H и две общие точки коник S_2 и S_3, отличные от K и L (круговые точки), лежат на одной конике. Значит, E, F, G, H лежат на одной окружности, что и требуется.

2.5. Вписанные восьмиугольники

Наконец, посмотрим на теорему Паскаля как на одну из теорем о вписанных в конику многоугольниках с чётным числом сторон.

Для начала сформулируем лемму, доказательство которой можно найти в любой достаточно полной книге по теории плоских кривых.

Лемма. *Если rn из mn общих точек двух кривых порядка m и n соответственно лежат на кривой порядка r, то оставшиеся $(m-r)n$ точек лежат на кривой порядка $m-r$.*

Взяв $m = n = 4$, $r = 2$, получаем следующий результат.

Если восемь из шестнадцати точек пересечения двух кривых четвёртого порядка лежат на одной конике, то и восемь остальных точек лежат на одной конике.

Этот результат остаётся верным и в случае, когда одна или обе кривые четвёртого порядка вырождены. Например, если каждая из кривых распадается в пару коник, мы получаем конфигурацию из 16 точек и шести коник, в которой каждая точка лежит на трёх кониках, а каждая коника проходит через восемь точек. Или, взяв в качестве кривых четвёртого порядка две четвёрки прямых, получим конфигурацию, изображённую на рис. 14.

Другая интерпретация этого же результата приводит к интересному свойству вписанного в конику восьмиугольника. А именно, предположим,

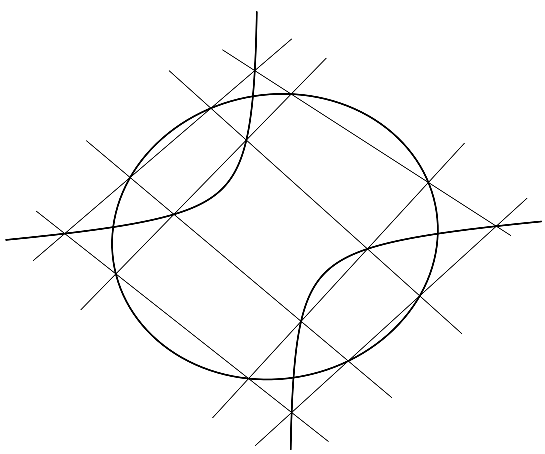

Рис. 14. К лемме

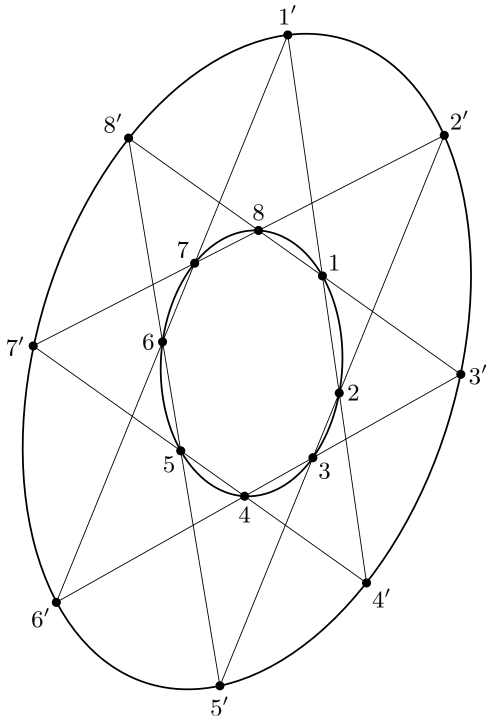

Рис. 15. *К теореме о вписанном восьмиугольнике*

что $1, 2, \dots, 8$ — вершины такого восьмиугольника (рис. 15), и рассмотрим две вырожденные кривые четвёртого порядка, состоящие из четвёрок прямых 12, 34, 56, 78 и 23, 45, 67, 81 соответственно. Так как $1, 2, \dots, 8$ — общие точки этих кривых, лежащие на одной конике, восемь оставшихся точек — $1', \dots, 8'$ на рис. 15 — также лежат на одной конике. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема о вписанном восьмиугольнике. *Если восьмиугольник вписан в конику, то восемь точек пересечения каждой из его сторон с третьей от неё стороной также лежат на одной конике.*

Заметим, что конфигурации на рисунках 14 и 15 не являются проективно эквивалентными: хотя обе они описывают 16 точек пересечения двух четвёрок прямых, лишь конфигурация рис. 15 соответствует теореме о вписанном восьмиугольнике.

Интересно, что теорема о вписанном восьмиугольнике сама себе обратна. Если на рис. 15 взять вершины внешнего восьмиугольника в порядке $8'$, $3'$, $6'$, $1'$, $4'$, $7'$, $2'$, $5'$, то третьей от стороны $8'3'$ будет сторона $1'4'$, эти стороны пересекаются в вершине внутреннего восьмиугольника 1, и т. д.

Наконец, чтобы выявить связь теоремы о вписанном восьмиугольнике с теоремой Паскаля, отметим, что обе они являются частными случаями следующего факта при значениях $n = 3$ и $n = 4$.

Если $2n$-угольник вписан в конику, то $n(n-2)$ точек пересечения его «чётных» сторон (при выбранной нумерации) с несмежными «нечётными» лежат на кривой порядка $n-2$.

Доказательство. Применим сформулированную в начале параграфа лемму к двум вырожденным кривым порядка n, одна из которых содержит чётные, а другая — нечётные стороны многоугольника. Из n^2 точек их пересечения $2n$ (а именно вершины исходного многоугольника) лежат на данной конике. По лемме (при $m = n$ и $r = 2$) оставшиеся $n(n-2)$ точек (это как раз пересечения «чётных» сторон с несмежными «нечётными») лежат на кривой порядка $n-2$, что и требуется. $\square$

Список литературы

[1] *Salmon G.* Treatise on Conic Sections (6th edition). London, 1879.

Литература, добавленная переводчиком

[2] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

Сесил Джон Алвин Ивлин (1904–1976)

Годфри Бёрдет Мани-Каутс (1905–1979)

Джон Алфред Тиррелл (1932–1992)