

# Анализ $m$ -выпуклости многомерных параболоидов и гиперболоидов

Н. В. Филимоненкова, П. А. Бакусов

Работа посвящена новому понятию дифференциальной геометрии, а именно  $m$ -выпуклой гиперповерхности. Это понятие является обобщением классической выпуклости. Оно появилось в конце XX века в результате удачного применения конусов Гординга в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Статья содержит краткое описание  $m$ -выпуклых гиперповерхностей, доступное широкой аудитории, и результаты исследования  $m$ -выпуклости многомерных квадрик: параболоидов и гиперболоидов. Полученные результаты продемонстрированы на двумерных и трёхмерных квадриках.

## § 1. ПОНЯТИЕ $m$ -ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

### 1.1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Для описания дифференциально-геометрических понятий нам понадобятся некоторые алгебраические структуры.

Как известно, элементарной симметрической функцией порядка  $p$  от  $n$  переменных называется сумма всевозможных произведений, где в качестве множителей выбираются  $p$  различных представителей из  $n$  переменных:

$$\sigma_p(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq p \leq n. \quad (1.1)$$

По определению  $\sigma_0(x) = 1$ .

Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим символом  $x^{(i)}$  вектор, полученный заменой  $i$ -й координаты вектора  $x$  на 0:

$$x^{(i)} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.2)$$

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 15-01-07650а, № 15-31-20600 мол\_a\_вед.

При вычислении  $\sigma_p(x^{(i)})$ ,  $p < n$ , можно считать, что вектор  $x^{(i)}$  получен вычёркиванием  $i$ -й координаты из вектора  $x$ . При этом  $\sigma_n(x^{(i)}) \equiv 0$ .

Далее нам понадобятся два простых соотношения:

$$\sigma_p(x) = \sigma_p(x^{(i)}) + x_i \sigma_{p-1}(x^{(i)}), \quad 1 \leq p \leq n, \quad (1.3)$$

$$\sigma_p(x) = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n \sigma_p(x^{(i)}), \quad 1 \leq p \leq n-1. \quad (1.4)$$

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^n$  множество всех точек, в которых первые  $m$  элементарных симметрических функций принимают положительные значения:

$$K_m = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_p(x) > 0, p = 1, 2, \dots, m\}, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (1.5)$$

По определению  $K_0 = \mathbb{R}^n$ .

Множество (1.5) является конусом с вершиной в нуле: если  $x \in K_m$ , то  $\alpha x \in K_m$ ,  $\alpha > 0$ .

Элементарные симметрические функции устойчивы к перестановкам переменных, поэтому векторы из конуса  $K_m$  можно считать пронумерованными семействами чисел.

Сформулируем простую версию критерия Сильвестра для конусов (1.5):

$$\begin{aligned} x \in K_m &\Rightarrow x^{(i)} \in K_{m-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \sigma_m(x) > 0, \exists i: x^{(i)} \in K_{m-1} &\Rightarrow x \in K_m. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Множественно используя первую часть критерия (1.6), можно показать, что любой вектор  $x$  из конуса  $K_m$  имеет по крайней мере  $m$  положительных координат. При  $m = n$  заключаем, что конус  $K_n$  состоит из тех и только из тех векторов, у которых все координаты положительны<sup>1)</sup>.

## 1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ $m$ -ВЫПУКЛОСТИ

Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — некоторая  $C^2$ -гладкая ориентированная гиперповерхность, т. е. двусторонняя  $n$ -мерная поверхность с выбранным направлением нормали. Обозначим символом  $\varkappa(M) = (\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n)(M)$  набор главных кривизн<sup>2)</sup> этой гиперповерхности в точке  $M \in \Gamma$ .

<sup>1)</sup> При  $m < n$  имеется только односторонняя импликация: если  $x \in K_m$ , то  $x$  имеет  $m$  положительных координат, однако обратное не обязательно верно.

<sup>2)</sup> Заметим, что разумного способа нумерации главных кривизн на поверхности не существует, поэтому набор  $\varkappa(M)$  понимается как семейство главных кривизн с произвольно выбранной нумерацией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть  $1 \leq p \leq n$ . Элементарная симметрическая функция порядка  $p$  от главных кривизн гиперповерхности  $\Gamma$  в точке  $M$  называется  $p$ -кривизной или кривизной порядка  $p$  этой поверхности в точке  $M$ . Обозначим  $p$ -кривизну символом  $k_p(M) = \sigma_p(\varkappa(M))$ .

В дифференциальной геометрии два случая  $p$ -кривизны являются классическими:

$$k_1 = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots + \varkappa_n \text{ — средняя кривизна,}$$

$$k_n = \varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_n \text{ — гауссова кривизна.}$$

Заметим, что  $p$ -кривизны, как и главные кривизны, являются геометрическими инвариантами, т. е. не зависят от способа параметризации поверхности. При этом  $p$ -кривизны, в отличие от главных кривизн, обладают естественной глобальной нумерацией на поверхности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть  $1 \leq m \leq n$ . Гиперповерхность  $\Gamma$  называется  $m$ -выпуклой в точке  $M \in \Gamma$ , если  $\varkappa(M) \in K_m$ , иначе говоря,  $k_p(M) > 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, m$ . Областью<sup>3)</sup>  $m$ -выпуклости поверхности  $\Gamma$  называем множество всех точек  $M \in \Gamma$ , в которых  $\Gamma$  является  $m$ -выпуклой.

Все  $C^2$ -гладкие ориентированные поверхности считаются 0-выпуклыми.

Например, на рис. 1 изображена схема некоторой поверхности, где разным тоном выделены области положительной  $p$ -кривизны,  $p = 1, 2, 3$ . Дан-

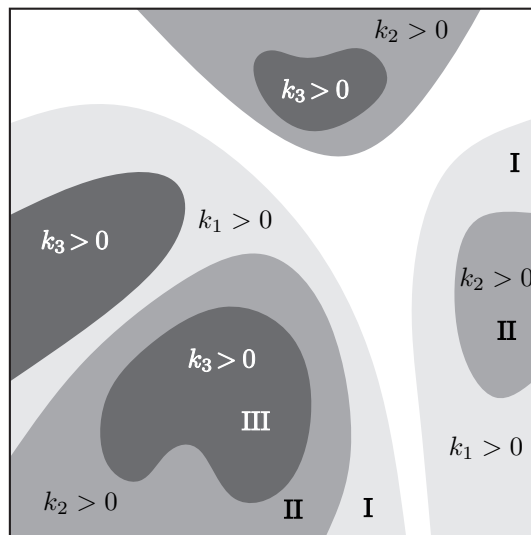


Рис. 1

<sup>3)</sup> В этой статье «область» означает открытое множество, необязательно связное; термин «поверхность» используется как синоним гиперповерхности.

ная поверхность является 1-выпуклой в светло-серой двухкомпонентной области с номером I, является 2-выпуклой в двухкомпонентной области с номером II и является 3-выпуклой в тёмно-серой связной области с номером III. В остальных тёмно-серых областях поверхность не является 3-выпуклой, так как одна из кривизн младших порядков отрицательна.

Из определения 1.2 следует, что если поверхность  $\Gamma$  является  $m$ -выпуклой в данной точке, то она является и  $(m - 1)$ -выпуклой. Значит, область её  $m$ -выпуклости вложена в область  $(m - 1)$ -выпуклости и т. д. На рис. 1 область 3-выпуклости вложена в область 2-выпуклости, а та, в свою очередь, включена в ещё более широкую область 1-выпуклости.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.** Определения 1.1 и 1.2 корректны только для ориентированной гиперповерхности, поскольку при изменении направления нормали главные кривизны и  $p$ -кривизны с нечётным значением  $p$  меняют знак на противоположный.

### 1.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ $m$ -ВЫПУКЛОСТИ

Понятие  $m$ -выпуклости является обобщением классической строгой выпуклости и служит для более детальной стратификации поверхностей и точек на поверхности. Чтобы пояснить характер этого обобщения, обратимся к свойству конусов (1.5), описанному в конце раздела 1.1.

Конус  $K_n$  состоит из векторов с положительными координатами, следовательно,  $n$ -выпуклая гиперповерхность  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — это поверхность, у которой все главные кривизны положительны, а значит, она строго выпукла в классическом смысле. Заметим, что строгая выпуклость и  $n$ -выпуклость — очень близкие, но всё же не равносильные понятия. Между ними есть небольшой зазор: строго выпуклая поверхность может иметь точки уплощения (изолированные точки нулевой гауссовой кривизны), тогда как  $n$ -выпуклость подразумевает положительность гауссовой кривизны. Для простоты изложения в этой статье мы не будем делать различия между строгой выпуклостью и  $n$ -выпуклостью.

При  $m < n$  понятие  $m$ -выпуклости слабее, чем строгая выпуклость: если поверхность  $\Gamma$  является  $m$ -выпуклой в точке  $M$ , то в этой точке у неё имеется хотя бы  $m$  положительных главных кривизн. Это свойство, однако, не является критерием  $m$ -выпуклости, т. е. наличие  $m$  положительных главных кривизн не гарантирует  $m$ -выпуклость поверхности с  $m < n$ .

Геометрический смысл этого свойства заключается в следующем. Рассмотрим в точке  $M$  нормальные сечения поверхности вдоль главных направлений: каждое сечение образовано двумерной плоскостью, натянутой на вектор нормали к поверхности и одно из главных направлений. Если

поверхность  $m$ -выпуклая в точке  $M$ , то хотя бы  $m$  таких сечений являются строго выпуклыми кривыми в данной точке<sup>4)</sup>.

Проиллюстрируем понятие  $m$ -выпуклости в самом простом случае — на примере двумерной гиперповерхности  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ . На рис. 2 изображены две такие ориентированные поверхности: стрелкой отмечено выбранное направление нормали в точке  $M$ , пунктиром выделены нормальные сечения поверхности вдоль главных направлений.

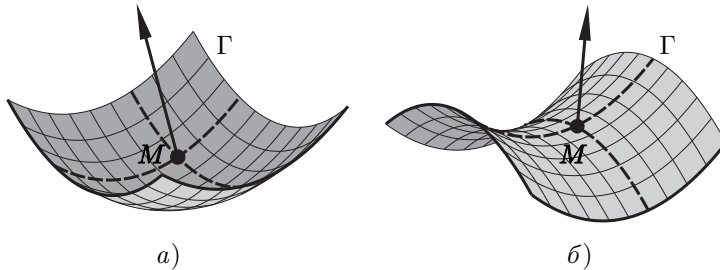


Рис. 2

Двумерная поверхность в каждой точке имеет две главные кривизны  $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2)$ , она может быть 1-выпуклой или 2-выпуклой. Исходя из определения 1.2 легко убедиться, что двумерная поверхность является 2-выпуклой тогда и только тогда, когда обе главные кривизны положительны, а значит, она строго выпукла в классическом смысле (рис. 2а):

$$\varkappa \in K_2 \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow k_1 = \varkappa_1 + \varkappa_2 > 0, k_2 = \varkappa_1 \varkappa_2 > 0 \Leftrightarrow \varkappa_1 > 0, \varkappa_2 > 0.$$

Если двумерная поверхность является 1-выпуклой, то у неё одна главная кривизна положительна (рис. 2б):

$$\varkappa \in K_1 \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow k_1 = \varkappa_1 + \varkappa_2 > 0 \Rightarrow \varkappa_1 > 0 \text{ или } \varkappa_2 > 0.$$

Однако ясно, что поверхность, изображённая на рис. 2б и имеющая одну положительную главную кривизну, может быть как 1-выпуклой, так и 0-выпуклой в точке  $M$ , поскольку её средняя кривизна  $k_1$  необязательно положительна.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.** По нашему мнению,  $m$ -выпуклые гиперповерхности наверняка обладают и другими интересными геометрическими свойствами,

<sup>4)</sup> Недавно выявлена более основательная связь между  $m$ -выпуклыми гиперповерхностями и их нормальными сечениями, аналогичная критерию Сильвестра (1.6). Соответствующая теорема изложена в работе [4], раздел 5.3, однако здесь мы её не приводим из-за громоздкой формулировки и малой степени наглядности.

которые пока ещё не обнаружены или не доказаны. Например, есть гипотеза, что как выпуклая, так и  $m$ -выпуклая замкнутая гиперповерхность с достаточно большим  $m$  ограничивает звёздную область и что это, возможно, является аналитическим критерием звёздности. Кроме того, хотелось бы получить модификации известных характеристик строго выпуклых гиперповерхностей, таких как расположение выше касательной плоскости, неравенство Йенсена.

#### 1.4. ПРОИСХОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ $m$ -ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Конструкции  $p$ -кривизны и  $m$ -выпуклой гиперповерхности появились в конце XX века в результате развития современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных и до сих пор тесно связаны с этой теорией.

Элементарные симметрические функции главных кривизн впервые ввели L. Caffarelli, L. Nirenberg и J. Spruck в работе 1985 г. [9], где рассматривается задача Дирихле для  $m$ -гессиановского уравнения в  $n$ -мерной ограниченной области с достаточно гладкой границей. Условие разрешимости этой задачи сводится к  $(m - 1)$ -выпуклости граничной гиперповерхности. Этот результат обнаружил нелокальную природу полностью нелинейных задач (нелинейных по вторым производным решения): даже малейший изъян геометрических характеристик области может привести к отсутствию гладких решений, какими бы гладкими ни были данные. В этом заключается принципиальное отличие полностью нелинейных задач от линейных и квазилинейных.

Сами термины « $p$ -кривизна» и « $m$ -выпуклость» появились позднее — в работах Н. М. Ивочкиной [1, 12], также посвящённых теории  $m$ -гессиановских уравнений.

С появлением понятий  $p$ -кривизны и  $m$ -выпуклой гиперповерхности возникли новые задачи на стыке полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и дифференциальной геометрии. Появились аналоги задач о построении замкнутых поверхностей по заданной средней или гауссовой кривизне. Последняя, как известно, называется классической проблемой Минковского [6]. Задача о построении замкнутой гиперповерхности по заданной  $p$ -кривизне,  $1 \leq p < n$ , сформулирована в монографии [6] и названа обобщённой проблемой Минковского. Она не имеет удовлетворительного решения до сих пор. Построение поверхности по заданной  $p$ -кривизне и краю исследовалось в работах [1, 8, 17], но также не доведено до конца. В работах [3, 11, 12, 15, 18] были получены некоторые результаты об эволюции замкнутых выпуклых гиперповерхностей с предписанным

законом зависимости  $p$ -кривизны от нормальной скорости эволюции. Все эти задачи сводятся к стационарным либо эволюционным полностью нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных.

Систематическое изучение  $m$ -выпуклых поверхностей как самостоятельного раздела дифференциальной геометрии ещё только начинается. Есть множество открытых вопросов, которые нуждаются во внимании специалистов-геометров (см. например, замечание 1.4). Наиболее полный обзор уже накопленных фактов и методов имеется в работе [4].

Одним из пробелов теории до сих пор было построение простейших примеров  $m$ -выпуклых гиперповерхностей, их численный анализ. В данной работе восполняется именно этот пробел.

В качестве простейших гиперповерхностей мы рассмотрели квадрики (параболоиды и гиперболоиды), которые в двумерном случае называются поверхностями второго порядка.

В § 2 продемонстрирован анализ  $m$ -выпуклости для  $n$ -мерного параболоида, включая техническую реализацию.

В § 3 приведены аналогичные результаты для  $n$ -мерного гиперболоида, но уже без технических выкладок.

Полученные результаты, несмотря на незатейливость вывода, являются новыми. Главный результат работы — полное описание связи между формулой параболоида (или гиперболоида) произвольной размерности и структурой области его  $m$ -выпуклости.

Общие результаты проиллюстрированы на квадриках малой размерности. Самыми простыми и наглядными примерами служат двумерные квадрики: двумерные параболоиды подробно разобраны в разделе 2.3, двумерные гиперболоиды эпизодически рассматриваются в § 3. Но так как двумерная поверхность может быть только 1-выпуклой или 2-выпуклой, причём последнее соответствует классической строгой выпуклости и потому малоинтересно, то в двумерном случае палитра возможностей достаточно бедная. Поэтому в разделе 2.4 мы рассматриваем трёхмерные параболоиды, которые нельзя изобразить, но зато теория на их примере иллюстрируется полнее.

### 1.5. СВЯЗЬ $m$ -ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ С КОНУСАМИ ГОРДИНГА

Целесообразность определения 1.2 и некоторые свойства  $m$ -выпуклых поверхностей вытекают из алгебраической теории гиперболических многочленов и конусов Гординга [10], которая сложилась в середине XX века задолго до появления понятия  $m$ -выпуклости.

Элементарная симметрическая функция (1.1) является классическим примером гиперболических многочленов, а конус (1.5) — примером конусов Гординга.

Обзору теории Гординга посвящена наша предыдущая работа [7]. Статьи [2, 5, 13, 14, 16] освещают теорию  $m$ -выпуклых гиперповерхностей с точки зрения теории Гординга. В этом разделе мы приведём одно методологическое следствие этой теории, на котором основан наш анализ  $m$ -выпуклости квадрик.

Введём обозначение для области положительной  $p$ -кривизны гиперповерхности  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\Omega_p^+ = \{M \in \Gamma : k_p(M) > 0\}, \quad 1 \leq p \leq n. \tag{1.7}$$

По определению 1.2 область  $m$ -выпуклости равна пересечению  $\bigcap_{p=1}^m \Omega_p^+$ . В частности, область  $m$ -выпуклости содержится в  $\Omega_m^+$ . Из теории Гординга вытекает, что область  $m$ -выпуклости, если она не пуста, занимает целиком одну или несколько компонент связности  $\Omega_m^+$ . А именно, верна следующая лемма<sup>5)</sup>.

**ЛЕММА 1.5.** *Если гиперповерхность  $\Gamma$  является  $m$ -выпуклой в точке  $M_0$ , то  $\Gamma$  является  $m$ -выпуклой во всей компоненте связности множества  $\Omega_m^+$ , содержащей точку  $M_0$ .*

Лемма 1.5 неявно включает и обратное утверждение: если в точке  $M_0 \in \Omega_m^+$  поверхность  $\Gamma$  не является  $m$ -выпуклой, то она не  $m$ -выпуклая во всей компоненте связности множества  $\Omega_m^+$ , содержащей точку  $M_0$ .

Таким образом, чтобы установить  $m$ -выпуклость поверхности в какой-то компоненте  $\Omega_m^+$ , достаточно проверить  $m$ -выпуклость всего в одной точке (рис. 3). Напомним, что установить  $m$ -выпуклость поверхности в какой-либо точке  $M_0 \in \Omega_m^+$  — значит проверить в этой точке положительность всех  $p$ -кривизн младших порядков  $p = 1, 2, \dots, m - 1$ .

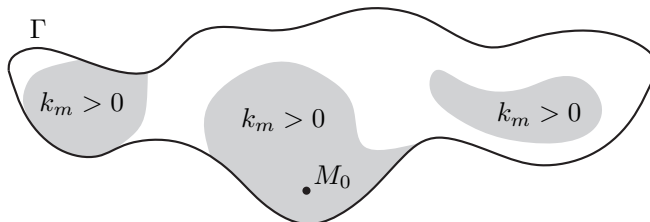


Рис. 3

<sup>5)</sup> Лемма 1.5 является прямым следствием пункта 1 теоремы 3.2 из [7].



Благодаря лемме 1.5 можно проще определить  $m$ -выпуклость замкнутой гиперповерхности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.** Замкнутая гиперповерхность  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , ориентированная внутренней нормалью, называется  $m$ -выпуклой, если её  $m$ -кривизна положительна.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.7.** Для замкнутых гиперповерхностей понятие  $m$ -выпуклости однозначно, поскольку предписывается конкретное направление нормали. Выбор в пользу внутренней нормали необходим для корректности определения 1.6 при  $m = n$ : чтобы граница строго выпуклого компакта, например шара, оказалась  $n$ -выпуклой поверхностью (а не 0-выпуклой, как в случае выбора внешней нормали).

В определении 1.6 речь идёт о тотальной  $m$ -выпуклости — во всех точках поверхности. Согласованность определений 1.2 и 1.6 обусловлена тем, что в данном случае область  $\Omega_m^+ = \Gamma$  содержит одну компоненту связности и на замкнутой гиперповерхности обязательно найдётся точка  $M_0$  строгой выпуклости, в которой все главные кривизны положительны. В точке  $M_0$  поверхность  $n$ -выпуклая, а значит, и  $m$ -выпуклая при  $m \leq n$ .

В подтверждение естественности определения 1.6 напомним известный факт: замкнутая поверхность с положительной гауссовой кривизной ( $n$ -кривизной) является строго выпуклой ( $n$ -выпуклой). Типичным примером служит  $n$ -мерная сфера радиуса  $r > 0$ , чья гауссова кривизна во всех точках равна  $1/r^n$ .

## § 2. АНАЛИЗ $m$ -ВЫПУКЛОСТИ ПАРАБОЛОИДОВ

### 2.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ $p$ -КРИВИЗНЫ ПАРАБОЛОИДА

В этом разделе приведены технические рассуждения и формулы, позволяющие вычислить  $p$ -кривизну гиперповерхности, являющейся графиком функции, и, в частности,  $p$ -кривизну параболоида.

Поскольку главные кривизны трудно вычислимы и являются негладкими функциями точки на поверхности, то определение 1.1 неудобно как в теоретическом анализе, так и в вычислительной практике. Для вычисления  $p$ -кривизны используются альтернативные подходы, например такая формула:

$$k_p = \operatorname{tr}_p(g^{-1}b), \quad 1 \leq p \leq n. \quad (2.1)$$

Здесь  $g$  — матрица первой квадратичной формы,  $b$  — матрица второй квадратичной формы гиперповерхности  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Матрица  $g^{-1}b$  — квадратная, размерности  $n$ , в общем случае несимметричная. Символом  $\operatorname{tr}_p$  обозначен  $p$ -след матрицы, равный сумме всех главных миноров порядка  $p$  этой

матрицы. Например, 1-след матрицы равен сумме элементов на главной диагонали (обычно называется просто следом),  $n$ -след матрицы равен её определителю. Главные кривизны поверхности являются собственными числами матрицы  $g^{-1}b$ . С другой стороны, диагонализация матрицы не меняет значение  $p$ -следа. Поэтому формула (2.1) не противоречит определению 1.1.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** В теоретических вопросах наилучшим способом выражения  $p$ -кривизны является формула  $k_p = \text{tr}_p(\mathcal{K})$ , где  $\mathcal{K} = \tau^T b \tau$  — матрица кривизны гиперповерхности,  $\tau = \sqrt{g^{-1}}$ . Матрица кривизны  $\mathcal{K}$  — это симметричный аналог матрицы  $g^{-1}b$ , аналитические преимущества которого наиболее полно изложены в статье [4]. В данной работе оказалось удобнее пользоваться несимметричной, но зато более простой в вычислительном отношении матрицей  $g^{-1}b$ .

В вычислении  $p$ -кривизны параболоидов (и далее гиперболоидов) по формуле (2.1) ключевую роль сыграло новое свойство  $p$ -следа, которое мы вывели из кососимметричности миноров:

$$\text{tr}_p(S + t\xi \times \eta) = \text{tr}_p(S) + t \sum_{i,j=1}^n \text{tr}_p^{ij}(S) \xi_i \eta_j, \quad (2.2)$$

$$S = (s_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \xi \times \eta = (\xi_i \eta_j)_{i,j=1}^n, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{tr}_p^{ij}(S) = \frac{\partial \text{tr}_p(S)}{\partial s_{ij}}.$$

Допустим, гиперповерхность  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  является графиком  $C^2$ -гладкой функции

$$x_{n+1} = \omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

и  $\Gamma$  ориентирована нормалью, образующей острый угол с координатной осью  $x_{n+1}$ . Обозначим символом  $\omega_x$  вектор градиента функции  $\omega(x)$ , символом  $\omega_{xx}$  — матрицу вторых производных (матрицу Гессе) функции  $\omega(x)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Как известно, в этом случае строгая выпуклость ( $n$ -выпуклость) поверхности  $\Gamma$  равносильна строгой выпуклости функции  $\omega(x)$  и сводится к положительной определённости матрицы  $\omega_{xx}$ . К сожалению, такая редукция от поверхности к функции невозможна при анализе  $m$ -выпуклости в случае  $m < n$ , где не обойтись без вычисления  $p$ -кривизн.

Приведём известные расчётные формулы матриц  $g^{-1}$  и  $b$  для графика функции:

$$g^{-1}(x) = I - \frac{\omega_x \times \omega_x}{1 + \omega_x^2}, \quad b(x) = \frac{\omega_{xx}}{\sqrt{1 + \omega_x^2}}, \quad (2.4)$$

где  $I$  — единичная матрица.

В нашей работе рассматриваются  $n$ -мерные параболоиды, которые являются графиками функций следующего вида:

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Помимо стандартной записи вектора переменных  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , будем использовать следующие обозначения:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ — вектор коэффициентов параболоида,} \quad (2.6)$$

$A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  — диагональная матрица коэффициентов.

После вычисления матриц (2.4), умножения и упрощения получаем для параболоида

$$g^{-1}b(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4(Ax)^2}} \left( A - \frac{4}{1+4(Ax)^2} Ax \times A^2 x \right). \quad (2.7)$$

Как можно видеть,  $p$ -след этой матрицы может быть вычислен по формуле (2.2). Заметим, что если в (2.2) в качестве матрицы  $S$  взять диагональную матрицу  $A$ , то правая часть (2.2) выражается через элементарные симметрические функции от векторов  $a$  и  $a^{(i)}$  (см. обозначение (1.2)):

$$\text{tr}_p(A + t\xi \times \eta) = \text{tr}_p(A) + t \sum_{i=1}^n \text{tr}_p^{ii}(A) \xi_i \eta_i = \sigma_p(a) + t \sum_{i=1}^n \sigma_{p-1}(a^{(i)}) \xi_i \eta_i.$$

Для выражения  $p$ -кривизны параболоида осталось применить последнюю формулу к (2.7), используя однородность  $p$ -следа:

$$\begin{aligned} k_p(x) &= \text{tr}_p(g^{-1}b(x)) = \\ &= \left( \frac{2}{\sqrt{1+4(Ax)^2}} \right)^p \left( \sigma_p(a) - \frac{4}{1+4(Ax)^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{p-1}(a^{(i)}) a_i^3 x_i^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{1+4(Ax)^2}} \right)^{p+2} \left( \sigma_p(a) + 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 (\sigma_p(a) - a_i \sigma_{p-1}(a^{(i)})) \right) = \\ &= c \cdot \left( \sigma_p(a) + 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 \sigma_p(a^{(i)}) \right), \quad c > 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для преобразования  $p$ -кривизны к виду (2.8) пригодилось соотношение (1.3).

2.2. ОБЛАСТЬ  $m$ -ВЫПУКЛОСТИ ПАРАБОЛОИДА

В этом разделе приведены результаты исследования  $m$ -выпуклости параболоида (2.5), ориентированного нормалью, образующей острый угол с координатной осью  $x_{n+1}$ . Будем использовать обозначения (2.6) и (1.2).

Под областью  $m$ -выпуклости параболоида удобнее понимать не только часть самого параболоида (см. определение 1.2), но и множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$  (аргументов функции (2.5)), в которых параболоид  $m$ -выпуклый.

Формула (2.8) при  $p = m$  задаёт в пространстве  $\mathbb{R}^n$  область положительной  $m$ -кривизны параболоида (2.5). Используем для этой области обозначение (1.7) и запишем её в явном виде:

$$\Omega_m^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sigma_m(a) + 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 \sigma_m(a^{(i)}) > 0 \right\}, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (2.9)$$

Выявление топологической структуры  $\Omega_m^+$  составляет несложное упражнение. Область  $\Omega_m^+$  может быть

- связной, если  $\sigma_m(a) > 0$ ;
- связной или двухкомпонентной, если  $\sigma_m(a) \leq 0$  и  $\exists i : \sigma_m(a^{(i)}) > 0$ ;
- пустой в остальных случаях.

В общей ситуации (см. раздел 1.5) можно утверждать, что если гиперповерхность имеет непустую область  $m$ -выпуклости, то она совпадает с некоторыми компонентами связности  $\Omega_m^+$ . Поскольку у параболоида область  $\Omega_m^+$  содержит не более двух компонент, да и те симметричны (геометрические характеристики параболоида на них одинаковы), то имеется альтернатива, отражённая в следующей теореме.

**ТЕОРЕМА 2.3.** Пусть  $1 \leq m < n$ . Область  $m$ -выпуклости параболоида (2.5) либо пуста, либо совпадает с непустой областью  $\Omega_m^+$ . Последнее верно тогда и только тогда, когда

$$\exists i : a^{(i)} \in K_m, \quad (2.10)$$

причём достаточно выполнения условия

$$a \in K_m. \quad (2.11)$$

(В случае (2.11) область  $\Omega_m^+$  связна, в случае (2.10) область  $\Omega_m^+$  может быть как связной, так и двухкомпонентной.)

Область  $n$ -выпуклости параболоида (2.5) либо пуста, либо совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^n$ . Последнее верно тогда и только тогда, когда

$$a \in K_n. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (2.12) равносильно положительности всех коэффициентов  $a_i$ . Ясно, что в этом и только в этом случае параболоид (2.5) является  $n$ -выпуклым, причём в каждой точке  $x \in \mathbb{R}^n$ . В рамках нашей методологии это подтверждается тем, что  $\sigma_n(a^{(i)}) \equiv 0$  и в силу (2.9) либо  $\Omega_n^+ = \emptyset$ , либо  $\Omega_n^+ = \mathbb{R}^n$ .

Для проверки  $m$ -выпуклости параболоида в области  $\Omega_m^+$ ,  $1 \leq m < n$ , используем подход, описанный в разделе 1.5 и основанный на лемме 1.5.

I. Докажем достаточность условия (2.10). Пусть существует такой номер  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , что  $a^{(i)} \in K_m$ , т. е.  $\sigma_p(a^{(i)}) > 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, m$ . Следовательно, область  $\Omega_m^+$  непуста. Проверим  $m$ -выпуклость параболоида в отдельных точках области  $\Omega_m^+$ . Рассмотрим два случая.

1. Если  $a_i = 0$ , то  $\sigma_p(a) = \sigma_p(a^{(i)}) > 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, m$ . Область  $\Omega_m^+$  связна и в силу (2.9) содержит точку  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ . В этой точке все  $p$ -кривизны (2.8) положительны,  $p = 1, 2, \dots, m$ . Следовательно, параболоид является  $m$ -выпуклым в точке  $\mathbf{0}$ , а значит, по лемме 1.5 он является  $m$ -выпуклым во всей области  $\Omega_m^+$ .
2. Если  $a_i \neq 0$ , то в силу (2.9) область  $\Omega_m^+$  содержит пару точек

$$x = (0, 0, \dots, \pm x_i, \dots, 0), \quad |x_i| \gg 1. \quad (2.13)$$

Если область  $\Omega_m^+$  двухкомпонентная, то эти точки попадают в разные компоненты связности. В точках (2.13) все  $p$ -кривизны (2.8) положительны,  $p = 1, 2, \dots, m$ . Следовательно, параболоид является  $m$ -выпуклым в этих точках, а по лемме 1.5 и во всей области  $\Omega_m^+$ .

Достаточность условия (2.11) вытекает из свойств (1.6), (1.4).

II. Докажем необходимость условия (2.10). Пусть  $a^{(i)} \notin K_m$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Покажем, что тогда для параболоида возможны две ситуации:  $\Omega_m^+ = \emptyset$  или  $\Omega_m^+ \cap \Omega_p^+ = \emptyset$  для некоторого  $p < m$ . В обеих ситуациях область  $m$ -выпуклости пуста.

1. Если  $\sigma_m(a^{(i)}) \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то по формуле (1.4) получаем  $\sigma_m(a) \leq 0$  и область  $\Omega_m^+$  пуста.
2. Если существует такой номер  $i$ , что  $\sigma_m(a^{(i)}) > 0$ , то область  $\Omega_m^+$  содержит точки  $x$  вида (2.13). Но поскольку  $a^{(i)} \notin K_m$ , можно показать, что найдётся такое  $p < m$ , что  $\sigma_p(a^{(i)}) < 0$ . Из (2.8) следует, что  $k_p(x) < 0$  и параболоид не является  $m$ -выпуклым в точках (2.13). Тогда по лемме 1.5 параболоид не является  $m$ -выпуклым ни в одной точке области  $\Omega_m^+$ .  $\square$

Из теоремы 2.3 вытекает критерий тотальной  $m$ -выпуклости параболоида.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть  $1 \leq m \leq n$ . Параболоид (2.5) является  $m$ -выпуклым в любой точке  $x \in \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда<sup>6)</sup>

$$a \in K_m, \quad \sigma_m(a^{(i)}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.9) понятно, что  $\Omega_m^+ = \mathbb{R}^n$  только при  $\sigma_m(a) > 0$  (возьмём  $x = \mathbf{0}$ ),  $\sigma_m(a^{(i)}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$  (возьмём  $x$  из (2.13)). Достаточность условия (2.14) очевидна из (2.11). Необходимость следует из (2.10) и критерия Сильвестра (1.6).  $\square$

Таким образом, теорема 2.3 и следствие 2.4 дают полное описание области  $m$ -выпуклости параболоида (2.5). Показательно, что условия  $m$ -выпуклости параболоида записываются в терминах принадлежности вектора коэффициентов  $a$  или  $a^{(i)}$  конусу  $K_m$ .

Общие результаты этого раздела проиллюстрированы в следующих разделах на примерах двумерных и трёхмерных параболоидов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Обратим внимание на связь между  $m$ -выпуклостью параболоида (2.5) и количеством его положительных коэффициентов. Поскольку любой вектор из конуса  $K_m$  имеет хотя бы  $m$  положительных координат (см. раздел 1.1), из критерия (2.10) следует вывод: если параболоид имеет непустую область  $m$ -выпуклости, то у него есть не менее  $m$  положительных коэффициентов. Однако параболоид, имеющий  $m$  положительных коэффициентов, необязательно является  $m$ -выпуклым хотя бы в одной точке. Это верно только при  $m = n$  и  $m = n - 1$ .

Случай  $m = n$  очевиден. Случай  $m = n - 1$  вытекает из теоремы 2.3. Допустим, параболоид (2.5) имеет ровно  $(n - 1)$  положительных коэффициентов и один неположительный коэффициент:  $a_j \leq 0$ . Тогда  $a^{(j)} \in K_{n-1}$ , и параболоид является  $(n - 1)$ -выпуклым в непустой области  $\Omega_{n-1}^+$ , причём эта область устроена следующим образом. Согласно следствию 2.4 в случае вырождения параболоида в цилиндрическую поверхность имеет место его тотальная  $(n - 1)$ -выпуклость:

$$a_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{n-1}^+ = \mathbb{R}^n.$$

В невырожденном случае  $(n - 1)$ -выпуклой является только часть параболоида, расположенная ниже определённого уровня:

$$a_j < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{n-1}^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 < -\frac{\sigma_{n-1}(a)}{4\sigma_n(a)} \right\}.$$

<sup>6)</sup> Условие (2.14) при  $m = n$  не противоречит условию (2.12), так как  $\sigma_n(a^{(i)}) \equiv 0$ .

## 2.3. ДВУМЕРНЫЙ ПАРАБОЛОИД

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^3$  двумерный параболоид

$$x_3 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2, \quad (2.15)$$

ориентированный нормалью, образующей острый угол с координатной осью  $x_3$ .

Двумерная поверхность может иметь точки 1-выпуклости и точки 2-выпуклости (точки строгой выпуклости). Это случаи  $m = n$  и  $m = n - 1$ , которые разобраны в замечании 2.5.

- При  $a_1 > 0, a_2 > 0$  имеем эллиптический параболоид (рис. 4а). Только такой параболоид является 2-выпуклым, причём сразу во всех точках.
- При  $a_1 = 0, a_2 > 0$  происходит вырождение эллиптического параболоида в параболический цилиндр (рис. 4б). Эта поверхность является 1-выпуклой во всех точках.

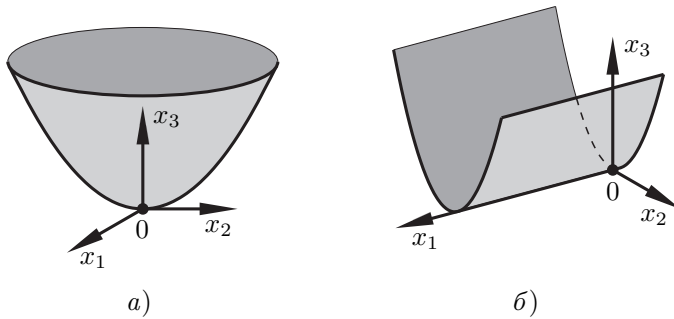


Рис. 4

- При  $a_1 < 0, a_2 > 0$  поверхность (2.15) называется гиперболическим параболоидом или «седлом» (рис. 5а).

Только часть этой поверхности является 1-выпуклой, а именно та часть, которая расположена ниже плоскости

$$x_3 = -\frac{a_1 + a_2}{4a_1 a_2}.$$

В зависимости от знака суммы  $a_1 + a_2$  это может быть плоскость нулевого уровня (рис. 5б), отрицательного или положительного уровня (рис. 6). Соответственно, область 1-выпуклости гиперболического параболоида может быть связной или двухкомпонентной. На рисунках она выделена серым цветом: как на самом параболоиде, так и в пространстве аргументов  $\mathbb{R}^2$ .

- При  $a_1 < 0, a_2 < 0$  параболоид (2.15) с указанной ориентацией является 0-выпуклым. Понятно, что с противоположной ориентацией этот параболоид является всюду 2-выпуклым.

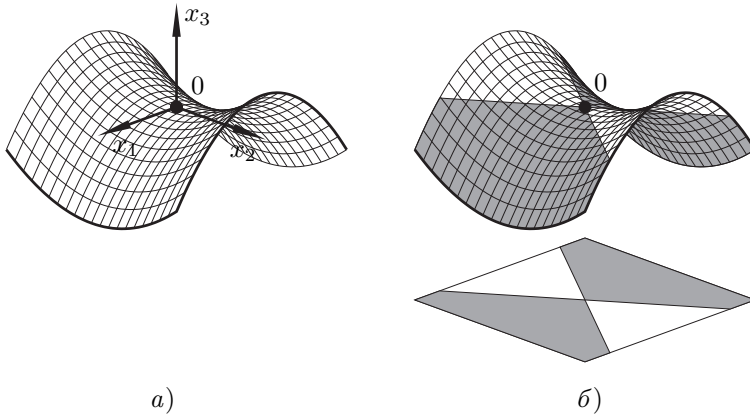


Рис. 5

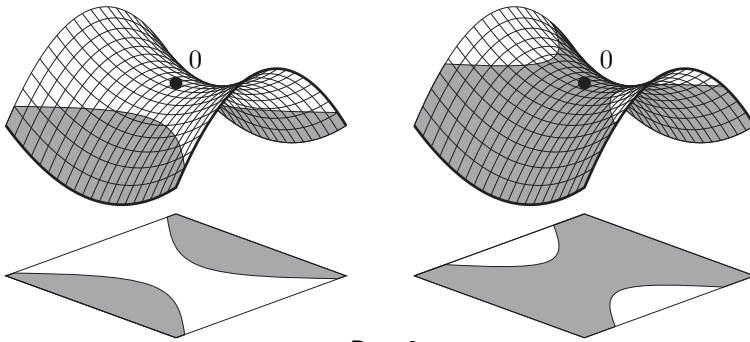


Рис. 6

### 2.4. ТРЁХМЕРНЫЙ ПАРАБОЛОИД

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^4$  трёхмерный параболоид

$$x_4 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2, \tag{2.16}$$

ориентированный нормалью, образующей острый угол с координатной осью  $x_4$ . Трёхмерная гиперповерхность может иметь точки 1-выпуклости, 2-выпуклости и 3-выпуклости.

- Параболоид (2.16) может быть 3-выпуклым (строго выпуклым) только при условии  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ , причём в этом случае он является тотально 3-выпуклым.
- При  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 \leq 0$  параболоид имеет непустые области 2-выпуклости и 1-выпуклости.
- При  $a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 \leq 0$  параболоид может иметь только непустую область 1-выпуклости, однако может быть даже 0-выпуклым (см. замечание 2.5).



- При  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 < 0$  параболоид является всюду 0-выпуклым (однако является 3-выпуклым с противоположной ориентацией).

В таблице приведены некоторые примеры трёхмерных параболоидов с одним или двумя отрицательными коэффициентами и с различными областями  $m$ -выпуклости,  $m = 1, 2$ .

параболоид	область 1-выпуклости	область 2-выпуклости
$x_4 = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$ (рис. 7а)	$\mathbb{R}^3$	связная область: $-72x_1^2 - 48x_2^2 + 24x_3^2 > -1$
$a = (3, 2, -1)$	$a \in K_1, \sigma_1(a^{(i)}) \geq 0 \forall i$	$a \in K_2$
$x_4 = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2$ (рис. 7б)	связная область: $-16x_1^2 - 16x_2^2 + 144x_3^2 > -1$	двухкомпонентная область: $-12x_1^2 - 12x_2^2 + 18x_3^2 > 1$
$a = (2, 2, -3)$	$a \in K_1$	$\exists i: a^{(i)} \in K_2 (i=3)$
$x_4 = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2$ (рис. 8а)	двухкомпонентная область: $-8x_1^2 - 8x_2^2 + 72x_3^2 > 1$	двухкомпонентная область: $-12x_1^2 - 12x_2^2 + 36x_3^2 > 5$
$a = (1, 1, -3)$	$\exists i: a^{(i)} \in K_1 (i=3)$	$\exists i: a^{(i)} \in K_2 (i=3)$
$x_4 = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ (рис. 8б)	связная область: $-8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$	$\emptyset$
$a = (2, -1, -1)$	$\exists i: a^{(i)} \in K_1 (i=2, 3)$	$\nexists i: a^{(i)} \in K_2$
$x_4 = 2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$ (рис. 9а)	двухкомпонентная область: $-32x_1^2 + 18x_2^2 - 2x_3^2 > 1$	$\emptyset$
$a = (2, -3, -1)$	$\exists i: a^{(i)} \in K_1 (i=2)$	$\nexists i: a^{(i)} \in K_2$
$x_4 = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ (рис. 9б)	$\emptyset$	$\emptyset$
$a = (1, -1, -1)$	$\nexists i: a^{(i)} \in K_1$	$\nexists i: a^{(i)} \in K_2$

Каждый пример мы сопровождаем анализом вектора коэффициентов параболоида: проверяем, выполняются ли условия теоремы 2.3 и следствия 2.4.

Каждому примеру соответствует один из рис. 7–9. Поскольку трёхмерную поверхность в четырёхмерном пространстве изобразить здесь невозможно, рисунок даёт представление только об областях 1-выпуклости и 2-выпуклости параболоида, мы изображаем их как области подходящих аргументов  $x \in \mathbb{R}^3$ . Точнее говоря, для каждого параболоида, включённого в таблицу,

изображены границы областей

$$\Omega_1^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : k_1 > 0\}, \quad \Omega_2^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : k_2 > 0\},$$

полученные из формулы (2.8), и стрелками указаны эти области. Область  $\Omega_1^+$  является также областью 1-выпуклости параболоида, пересечение  $\Omega_1^+ \cap \Omega_2^+$  является областью 2-выпуклости. Так как  $\Omega_1^+ \cap \Omega_2^+ = \emptyset$  на рис. 8а, б,

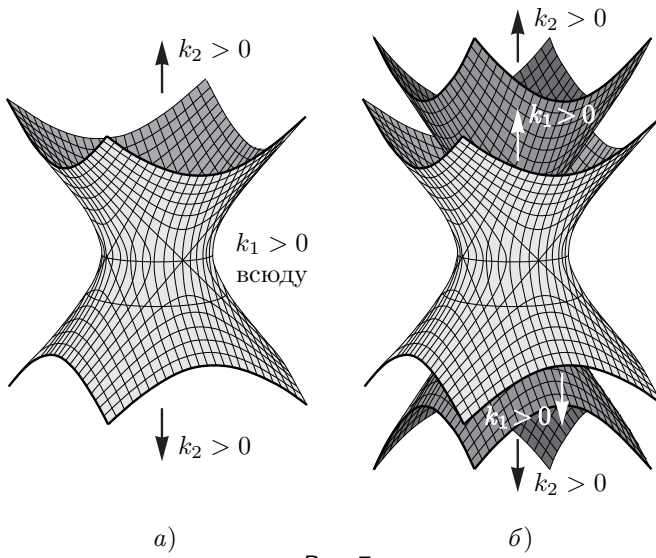


Рис. 7

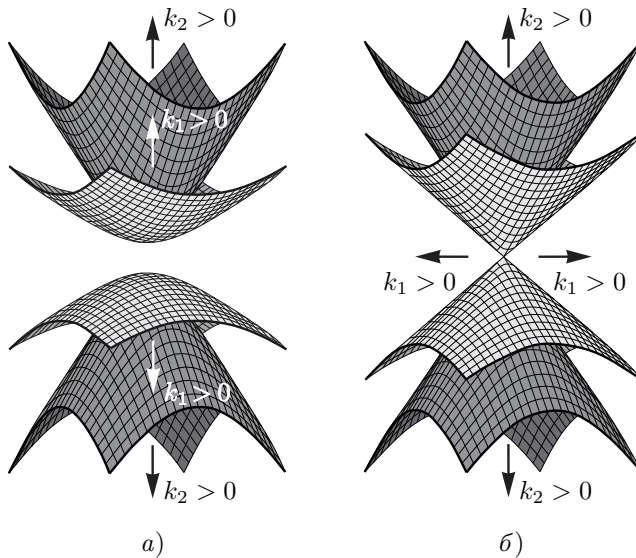


Рис. 8

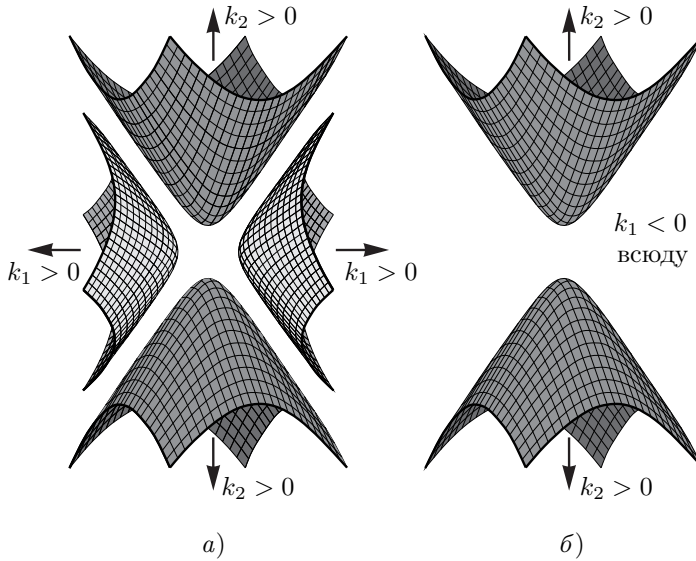


Рис. 9

то соответствующие параболоиды в таблице не имеют точек 2-выпуклости. Последний параболоид в таблице не имеет также точек 1-выпуклости, поскольку для него  $\Omega_1^+ = \emptyset$  (рис. 9б).

### § 3. АНАЛИЗ $m$ -ВЫПУКЛОСТИ ГИПЕРБОЛОИДОВ

Анализ  $m$ -выпуклости гиперboloидов во всём аналогичен анализу параболоидов, но технически более трудоёмок. Поэтому здесь мы ограничимся описанием полученных результатов.

Напомним, что  $n$ -мерным гиперboloидом называется квадрака

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{c_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_{n+1}^2}{c_{n+1}^2} = 1.$$

Поскольку наша техника вычисления  $p$ -кривизны приспособлена для графиков функций (см. раздел 2.1), рассмотрим функцию вида

$$x_{n+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + b}, \quad a_i, b \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

В зависимости от знаков  $a_i$ ,  $b$  графиком этой функции может быть пустое множество, точка, полусфера, конус, но в большинстве случаев — верхняя половина гиперboloида. Для краткости будем называть поверхность (3.1) гиперboloидом.

Считаем, что поверхность (3.1) ориентирована нормалью, образующей острый угол с координатной осью  $x_{n+1}$ . Для вектора коэффициентов  $a_i$  используем обозначения (2.6), (1.2).

Область положительной  $m$ -кривизны гиперболоида (3.1) устроена следующим образом:

$$\Omega_m^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : b \sigma_m(a) + \sum_{i=1}^n a_i(a_i + 1)x_i^2 \sigma_m(a^{(i)}) > 0 \right\}, \quad 1 \leq m \leq n.$$

Способ проверки  $m$ -выпуклости в этой области описан в разделе 1.5 и продемонстрирован при доказательстве критерия  $m$ -выпуклости параболоида (§ 2, теорема 2.3). Для гиперболоида таким же рассуждением удалось получить только достаточные условия  $m$ -выпуклости в области  $\Omega_m^+$ .

**ТЕОРЕМА 3.1.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — область определения и  $C^2$ -гладкости функции (3.1),  $1 \leq m \leq n$ .

Для того чтобы гиперболоид (3.1) с  $b > 0$  являлся  $m$ -выпуклым в непустой области  $\Omega_m^+ \cap \Omega$ , достаточно выполнения условия

$$a \in K_m. \tag{3.2}$$

Для того чтобы гиперболоид (3.1) с  $b \leq 0$  являлся  $m$ -выпуклым в непустой области  $\Omega_m^+ \cap \Omega$ , достаточно выполнения условия

$$\exists i: a_i > 0, \quad a^{(i)} \in K_m. \tag{3.3}$$

При  $m = n$  условия (3.2), (3.3) являются также необходимыми.

Таким образом, условие  $m$ -выпуклости гиперболоида, как и параболоида, выражается в терминах принадлежности векторов  $a, a^{(i)}$  конусу  $K_m$ . Заметим, что требование (3.3) сильнее, чем (3.2).

Проанализируем требование (3.2) при  $m = n$ . Для гиперболоидов (3.1) с  $b > 0$  условие  $a \in K_n$  равносильно положительности всех коэффициентов  $a_i$ . Очевидно, что в этом и только в этом случае гиперболоид является  $n$ -выпуклым (строго выпуклым), причём всюду. Двумерная версия такого гиперболоида изображена на рис. 10а.

Требование (3.3) при  $m = n$  не может быть выполнено, поскольку  $\sigma_n(a^{(i)}) \equiv 0$ . Это соответствует тому, что гиперболоиды (3.1) с  $b < 0$  и конусы ( $b = 0$ ) не могут иметь точек  $n$ -выпуклости (строгой выпуклости), даже если все их коэффициенты  $a_i$  положительны.

Рассмотрим подробнее свойства поверхностей (3.1) с параметрами вида

$$b \leq 0, \quad a_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.4}$$

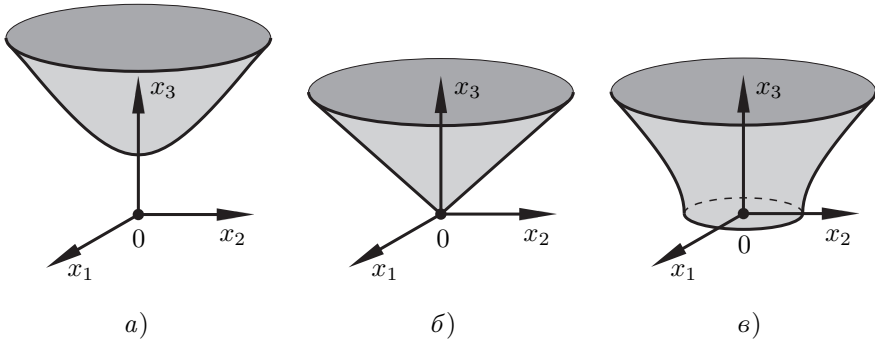


Рис. 10

Двумерные версии соответствующего конуса ( $b = 0$ ) и гиперboloида ( $b < 0$ ) изображены на рис. 10б, в. Согласно теореме 3.1 в этом случае гарантированно имеется  $m$ -выпуклость в области  $\Omega_m^+ \cap \Omega$  при всех  $m = 1, 2, \dots, n - 1$ . Для конусов это означает  $(n - 1)$ -выпуклость во всех точках, кроме вершины. Поясним, какова ситуация для гиперboloидов, на конкретном их представителе

$$x_{n+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} - 1. \quad (3.5)$$

В этом случае  $a = (1, 1, \dots, 1)$  и прямые вычисления приводят к формуле

$$\Omega_m^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2 \sum_{i=1}^n C_{n-1}^m x_i^2 > C_n^m \right\}.$$

Для данного гиперboloида (3.5) области  $\Omega_m^+$  и  $\Omega$  занимают части пространства, расположенные вне некоторых сфер. Сравнивая радиусы этих сфер, приходим к следующим выводам. Если  $n/2 < m < n$ , то  $m$ -выпуклой является только часть гиперboloида (3.5), расположенная выше плоскости

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{2m - n}{2n - 2m}}.$$

При  $m \leq n/2$  гиперboloид (3.5) является  $m$ -выпуклым во всех своих внутренних точках. В частности, двумерная версия гиперboloида (3.5), изображённая на рис. 10в, — 1-выпуклая поверхность во всех своих внутренних точках. Аналогичным образом можно получить условия тотальной  $m$ -выпуклости для остальных гиперboloидов с параметрами вида (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При  $b > 0$ ,  $a_i < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , график функции (3.1) является верхней половиной сферы, которая ориентирована внешней (по отношению к сфере) нормалью. Нет ничего странного в том, что согласно теореме 3.1 такая поверхность не является  $n$ -выпуклой. Сферу, как и любую замкнутую поверхность, нужно ориентировать внутренней нормалью, чтобы она оказалась  $n$ -выпуклой (см. определение 1.6, замечание 1.7).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Ивочкина Н. М.* Задача Дирихле для уравнения кривизны порядка  $m$  // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, № 3. С. 192–217.
- [2] *Ивочкина Н. М.* От конусов Гординга к  $p$ -выпуклым гиперповерхностям // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 94–104.
- [3] *Ивочкина Н. М., Ладыженская О. А.* Оценка вторых производных на границе для поверхностей, эволюционирующих под действием их главных кривизн // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 2. С. 30–50.
- [4] *Ивочкина Н. М., Филимонова Н. В.* Геометрические модели в теории полностью нелинейных уравнений. Препринты Санкт-Петербургского математического общества. 2016. № 6.
- [5] *Ивочкина Н. М., Филимонова Н. В.* О новых структурах в теории полностью нелинейных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 58. С. 82–95.
- [6] *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975.
- [7] *Филимонова Н. В., Бакусов П. А.* Гиперболические многочлены и конусы Гординга // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 143–166.
- [8] *Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J.* Nonlinear second-order elliptic equations V. The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 41, № 1. P. 47–70.
- [9] *Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J.* The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian // Acta Math. 1985. V. 155. P. 261–301.
- [10] *Gårding L.* An inequality for hyperbolic polynomials // J. Math. Mech. 1959. V. 8. P. 957–965.
- [11] *Ivochkina N. M.* Geometric evolution equations preserving convexity // AMS Transl. Ser. 2. Adv. Math. Sci. 2007. V. 220. P. 191–121.
- [12] *Ivochkina N. M.* Symmetry and geometric evolution equations // Записки науч. сем. ПОМИ. 2004. Т. 318. С. 135–146.
- [13] *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations // J. Fixed Point Theory Appl. 2015. V. 16, № 1. P. 11–25.

- [14] *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On the backgrounds of the theory of  $m$ -Hessian equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 2013. V. 12, № 4. P. 1687–1703.
- [15] *Ivochkina N. M., Nehring Th., Tomi F.* Evolution of starshaped hypersurfaces by nonhomogeneous curvature functions // *Алгебра и анализ.* 2000. Т. 12, вып. 1. С. 185–203.
- [16] *Ivochkina N. M., Prokof'eva S. I., Yakunina G. V.* The Gårding cones in the modern theory of fully nonlinear second order differential equations // *J. Math. Sci.* 2012. V. 184, № 3. P. 295–315.
- [17] *Trudinger N. S.* The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1990. V. 111. P. 153–179.
- [18] *Urbas J.* On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures // *Math. Z.* 1990. V. 205, № 3. P. 355–372.

---

Надежда Викторовна Филимонова, Санкт-Петербургский  
политехнический университет Петра Великого  
nf33@yandex.ru

Павел Анатольевич Бакусов, Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет  
bakusovpavel@gmail.com