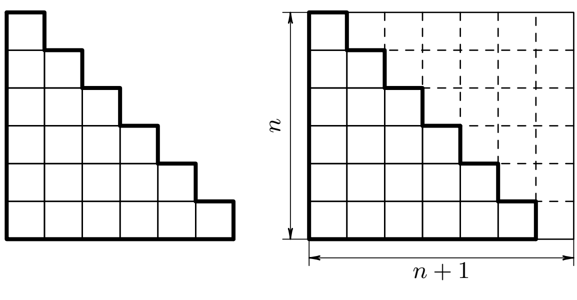
Алгебра, геометрия и анализ сумм степеней последовательных чисел

Г. А. Мерзон

Речь в этой статье пойдёт о вычислении суммы $1^k+2^k+\ldots+n^k$. Обсудив, как найти формулу для любого конкретного k, мы попробуем по нескольким первым формулам угадать, какого рода должен быть общий ответ. После этого мы увидим, как различные точки зрения на нашу задачу — аналитическая, геометрическая, алгебраическая — объясняют различные замеченные закономерности. Будет получен и явный общий ответ в терминах чисел Бернулли (вместе с рецептом вычисления этих чисел). Частично текст основан на лекциях автора в летнем лагере московской 57-й школы в 2016 году.

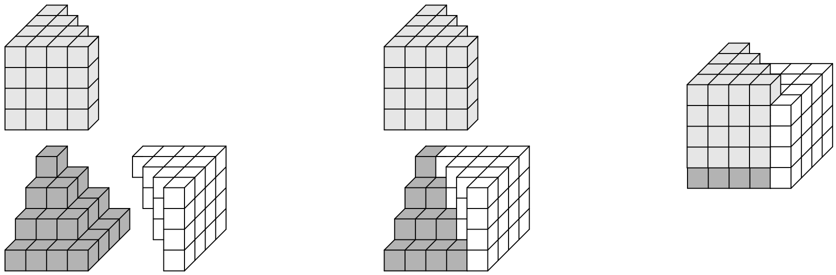
§ 1. Начало

При $k=1$ речь идёт просто о сумме $1+2+\ldots+n$. Наиболее наглядный, видимо, способ её вычислить — геометрический: об этой сумме можно думать как о *треугольном числе*, т. е. площади «пиксельного» (составленного из единичных квадратиков) равнобедренного прямоугольного «треугольника» со стороной n. Но из двух таких треугольников легко составить прямоугольник размера $n \times (n+1)$, поэтому площадь «треугольника» равна $n(n+1)/2$ (вдвое меньше площади прямоугольника).



Подобным образом можно вычислить и сумму $1^2+2^2+\ldots+n^2$: её можно проинтерпретировать как площадь пирамиды, основание которой —

квадрат $n \times n$, а высота имеет длину n и попадает в вершину основания. Из шести таких пирамид можно сложить параллелепипед $n \times (n+1) \times (2n+1)$ (на рисунке ниже показано, как сложить половину этого параллелепипеда из трёх пирамид), поэтому искомая сумма равна $n(n+1)(2n+1)/6$.



Как работать с (многомерными) пирамидами в многомерном пространстве — не очень понятно (хотя мы ещё немного поговорим об этом в § 4), поэтому обратимся к алгебре.

Хорошо известно, что формулы типа

$$\begin{aligned} 1\ \ +2\ \ +\ldots+n\ \ &= \frac{n(n+1)}{2};\\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\\ 1^3+2^3+\ldots+n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

несложно доказать по индукции, — но не очень понятно, как подобные формулы искать.

Самое общее, что можно сказать об ответе, глядя на случаи $k=1, 2, 3,$ — что это многочлен от n. В действительности так будет и дальше.

Теорема 1. $S_k(n) := 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ *— многочлен от n степени $k+1$. Вообще, если p — многочлен степени k, то $p(1)+p(2)+\ldots+p(n)$ — многочлен от n степени $k+1$.*

Каким должен быть многочлен P, чтобы можно было доказать индукцией по n, что $1^k + \ldots + n^k = P(n)$? База индукции — равенство $P(0) = 0$. А утверждение шага индукции состоит в том, что

$$n^k = P(n) - P(n-1) =: \Delta P(n).$$

Доказать, что такой многочлен существует, можно двумя способами.

Доказательство 1. Любой многочлен является суммой мономов, поэтому достаточно доказать первую часть теоремы.

Условие $\Delta P(n) = n^k$ представляет собой систему уравнений на коэффициенты многочлена

$$P(n) = a_0 n^{k+1} + a_1 n^k + \ldots + a_k n.$$

А именно, в выражении $P(n) - P(n-1)$ после раскрытия скобок и приведения подобных коэффициент при n^k должен получиться равным 1, а коэффициенты при всех остальных степенях n — равными 0.

Так как

$$n^i - (n-1)^i = i n^{i-1} + \ldots,$$

возникающие уравнения имеют вид (в квадратных скобках указано, коэффициенты при каких степенях n сравниваются):

$$\begin{aligned}
&[n^{k+1}]: && 0 = 0;\\
&[n^{k}\quad]: && 1 = (k+1)a_0;\\
&[n^{k-1}]: && 0 = k a_1 + (\ldots)\cdot a_0;\\
&[n^{k-2}]: && 0 = (k-1)a_2 + (\ldots)\cdot a_1 + (\ldots)\cdot a_0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Эта система имеет решение: последовательно находим коэффициенты a_0, a_1 и т. д. (из уравнения с правой частью $(k-i)a_{i+1} + \ldots$ видно, как выразить a_{i+1} через уже найденные коэффициенты с меньшими номерами). □

Доказательство 2. Определённое выше Δ — линейное отображение из $(k+2)$-мерного пространства многочленов степени не выше $k+1$ в пространство многочленов степени не выше k. Его ядро одномерно ($\Delta P = 0 \Leftrightarrow P$ — константа). Поэтому его образ имеет размерность $(k+2)-1 = k+1$, а значит, совпадает со всем пространством многочленов степени не выше k. □

Упражнение 1. Пользуясь теоремой 1, найдите формулу для суммы $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.

Решить это упражнение можно даже двумя способами: можно воспользоваться *утверждением* теоремы и записать, что

$$S_4(n) = an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en,$$

а неизвестные коэффициенты найти, подставляя небольшие n; но проще найти коэффициенты, посмотрев на первое *доказательство* теоремы.

Отметим, что хотя ответ можно записать в форме, напоминающей формулу для $S_2(n)$, он уже *не раскладывается на линейные множители*! Возможно поэтому формула для $S_4(n)$ была найдена примерно на 1000 лет позже, чем формула для $S_3(n)$, известная уже в античности.

§ 2. Эксперименты и гипотезы

Теперь в принципе понятно, как получить ответ для любого фиксированного k. Но хотелось бы понять, как связаны ответы для разных k (а в идеале — иметь и общую формулу, работающую для произвольного k).

Начнём с эксперимента. Выпишем уже известные нам формулы, но слегка в другой форме: так как ответ не раскладывается, вообще говоря, на линейные множители, будем записывать его просто как многочлен:

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n;\\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;\\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0;\\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + 0 - \frac{1}{30}n.
\end{aligned}
$$

Некоторые закономерности сразу бросаются в глаза.

Гипотеза 1. *Старший член многочлена $S_k(n)$ равен $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$, следующий равен $\frac{1}{2}n^k$.*

Кроме того, появились нулевые коэффициенты. Добавим в таблицу ещё несколько первых k.

$$
\begin{aligned}
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;\\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \ + 0;\\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 \ + 0 - \frac{1}{30}n;\\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + 0 - \frac{1}{12}n^2 + 0;\\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 \ + 0 - \frac{1}{6}n^3 \ + 0 + \frac{1}{42}n;\\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 + 0 - \frac{7}{24}n^4 + 0 + \frac{1}{12}n^2 + 0.
\end{aligned}
$$

Гипотеза 2. *После $\frac{1}{2}n^k$ каждый второй коэффициент (при n^{k-2}, n^{k-4}, …) равен нулю.*

Остальные коэффициенты выглядят довольно загадочно. Попробуем, тем не менее, разобраться. Как ведут себя коэффициенты при n^{k-1} (1/6, 1/4, 1/3, 5/12) — сразу не видно, потому что все они записаны в виде несократимых дробей. Приведём их к общему знаменателю: 2/12, 3/12, 4/12, 5/12 — теперь закономерность очевидна, коэффициент равен $k/12$.

Дальше идёт коэффициент при n^{k-3}. После приведения к общему знаменателю получается последовательность $-4/120$, $-10/120$, $-20/120$, $-35/120$.

Упражнение 2. а) Угадайте формулу для коэффициента при n^{k-3} (если не получается, попробуйте найти числители $4, 10, 20, 35 \ldots$ в треугольнике Паскаля).

б) Придумайте формулу для коэффициента при n^{k-5}.

Если решить это упражнение, то станет ясно, какого рода должен быть ответ: коэффициент при n^{k-i} является, видимо, многочленом от k, и даже понятно, каким именно — но... только с точностью до мультипликативной константы. Эти константы $(1/12, -1/120, 1/252, \ldots)$ непосредственно связаны с *числами Бернулли* — но о них мы поговорим чуть позже.

Упражнение 3. Докажите, что

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{12}n^{k-1} + \ldots$$

(где многоточие заменяет члены меньшей степени по n).

Читатель, желающий как можно быстрее узнать доказательства гипотез и общий ответ, может пропустить следующие два параграфа (дальше их материал не используется).

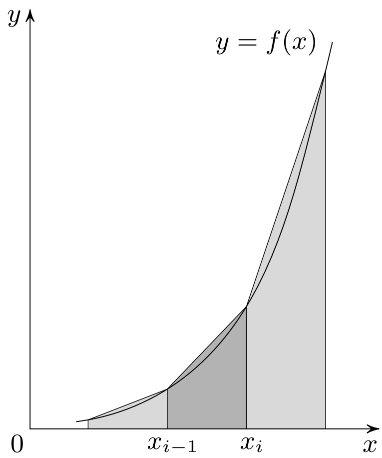
§ 3. Суммы и интегралы

Старший член многочлена $S_k(x)$, $\frac{1}{k+1}x^{k+1}$, должен вызывать немедленную ассоциацию: это как раз первообразная (интеграл) функции x^k, которую мы суммируем по целым точкам. Эту связь с интегрированием нетрудно и объяснить: коэффициент при старшем члене в многочлене $S_k(n)$ — это предел выражения

$$\frac{S_k(n)}{n^{k+1}} = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^k + \left(\frac{2}{n}\right)^k + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^k\right),$$

т. е. предел интегральных сумм для интеграла $\int_0^1 x^k\,dx$.

На самом деле, используя подобные соображения, можно найти и следующий член, $\frac{1}{2}x^k$. Обычная интегральная сумма возникает, если приблизить площадь под графиком функции $f(x)$ суммой площадей прямоугольников со сторонами $1/n$ и $f(i/n)$. Но ясно, что точность приближения повысится, если заменить прямоугольники прямоугольными трапециями (как на рисунке ниже).



Для функции x^n это соответствует переходу от оценки

$$\int\limits_0^1 x^k\,dx \approx \frac{1}{n}\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right)$$

к оценке

$$\int\limits_0^1 x^k\,dx\approx\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{(0/n)^k+(1/n)^k}{2}+\frac{(1/n)^k+(2/n)^k}{2}+\ldots+\frac{((n-1)/n)^k+(n/n)^k}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^k-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n}\right)^k\right),$$

откуда

$$\frac{1}{k+1}\approx\frac{S_k(n)}{n^{k+1}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}.$$

Величину ошибки, которая возникает при таком приближении, можно оценить.

Упражнение 4. а) Докажите *формулу трапеций*: если функция f бесконечно дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

для некоторой точки $\xi\in[a;b]$.

б) При помощи формулы трапеций и соображений, приведённых выше, докажите, что

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+o(n^k).$$

На самом деле существует последовательность *квадратурных формул*, приближающих интегралы, которые дают всё более точные приближения для $S_k(n)$, — причём возникающие утверждения верны и для нецелых k.

Проиллюстрируем полезность формулы трапеций (и других квадратурных формул) ещё на одном примере.

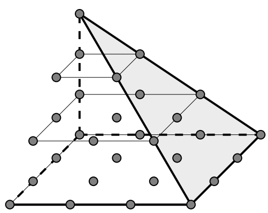
Упражнение 5. Докажите слабую форму *формулы Стирлинга*:

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Её надо понимать в том смысле, что отношение левой и правой частей стремится к 1 для некоторой константы C. (*Указание*: примените формулу трапеций к интегралу функции $\ln x$.)

§ 4. Целые точки в многомерных многогранниках

Сказанное выше можно изложить и без интегралов, на геометрическом языке. Посмотрим, например, на сумму $S_2(n+1)$. Она выражает число целых точек в пирамиде с вершиной в точке $(0, 0, n)$ и квадратным основанием с вершинами в точках $(0, 0, 0)$, $(n, 0, 0)$, $(0, n, 0)$, $(n, n, 0)$. Действительно, в плоскости $z = n - i$ лежит как раз $(i + 1)^2$ целых точек этой пирамиды.



При больших n количество целых точек примерно равно объёму этой пирамиды. Но из трёх таких пирамид нетрудно сложить куб с ребром n: выберем одну вершину куба и соединим её с каждой из трёх не содержащих её граней. Поэтому объём одной пирамиды равен $\frac{1}{3}n^3$, а значит, $S_2(n+1) \approx \frac{1}{3}n^3$.

Аналогично $S_k(n+1)$ есть количество целых точек в $(k+1)$-мерной пирамиде высоты n с основанием в виде k-мерного куба со стороной n

(и высотой, попадающей в одну из вершин основания). Куб с ребром n разбивается на $k+1$ такую пирамиду: весь куб задаётся неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant n$, а j-я часть состоит из точек, для которых $\max\{x_1, \ldots, x_n\} = x_j$. Поэтому объём одной пирамиды (являющийся первым приближением для $S_k(n+1)$) равен $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$.

(Разумеется, объём нашей пирамиды можно записать как интеграл функции x^k. А предыдущее рассуждение позволяет вычислить этот интеграл геометрически, не используя формулу Ньютона — Лейбница.)

Для данного k при всех n интересующие нас пирамиды получаются растяжением эталонной пирамиды с ребром 1 в n раз по всем измерениям. О том, как при гомотетии меняется количество целых точек внутри многогранника, говорит *теория Эрхарта*.

Теорема 2. (1) *Пусть P — некоторый k-мерный многогранник с вершинами в целых точках. Тогда количество $N(nP)$ целых точек внутри многогранника P, растянутого в n раз, зависит от n как многочлен степени k («многочлен Эрхарта»), причём старший коэффициент многочлена $N(nP)$ равен объёму многогранника P.*

(2) *Кроме того, имеет место* взаимность Эрхарта — Макдональда:

$$N(-nP) = (-1)^k I(nP),$$

где $I(\ldots)$ — количество целых точек строго внутри многогранника.

Вероятно, вторая половина теоремы требует комментария. Мы определяем $N(nP)$ как количество целых точек в некотором многограннике *только для целых положительных n*. Но раз это многочлен от n, можно формально подставлять в него и отрицательные аргументы. Смысл получающихся значений и объясняет вторая часть теоремы.

Упражнение 6. Выведите из теоремы *формулу Пика*: площадь многоугольника на клетчатой бумаге с вершинами в узлах сетки равна $i + \frac{b}{2} - 1$, где i — число вершин строго внутри многоугольника, а b — на его границе.

Теорему 2 можно рассматривать как многомерный аналог формулы Пика. О формуле Пика можно прочитать в популярной статье [3]; из неё же можно узнать, как доказать первую часть теоремы 2 для многоугольников и трёхмерных многогранников. Здесь доказывать эту теорему мы не будем. Вместо этого применим её к нашей $(k+1)$-мерной пирамиде.

Целые точки внутри этой пирамиды суть целые точки в пирамиде такого же вида, но меньшего размера: действительно, целые точки строго внутри квадрата со стороной n суть целые точки в квадрате со стороной $n-2$, а кроме того, основание внутренней пирамиды находится «на этаж выше» основания внешней пирамиды. Следовательно, $I((n+1)P) = N((n-2)P)$. Напомним ещё, что $S_k(m) = N((m-1)P)$. Поэтому взаимность Эрхарта — Макдональда даёт связь между значениями многочлена S_k в отрицательных и неотрицательных целых числах:

$$\begin{aligned} S_k(-n) = N((-n-1)P) = (-1)^{k+1}I((n+1)P) = \\ = (-1)^{k+1}N((n-2)P) = (-1)^{k+1}S_k(n-1). \end{aligned}$$

На самом деле получившееся равенство $S_k(-n) = (-1)^{k+1}S_k(n-1)$ несложно доказать чисто алгебраически. Об этом пойдёт речь в следующем параграфе.

Упражнение 7. Из соотношения $S_k(-n) = (-1)^{k+1}S_k(n-1)$ выведите, что в многочлене $S_k(n)$ после коэффициента $1/2$ при n^k каждый второй коэффициент равен 0.

В качестве последней иллюстрации теории Эрхарта (уже не связанной непосредственно с суммированием степеней) рассмотрим k-мерный *симплекс* $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant 1$ (для $k=2$ это треугольник, для $k=3$ — тетраэдр).

По теореме 2 функция $I((n+1)P)$ является многочленом от n. Этот многочлен читателю отлично известен: целые точки строго внутри многогранника суть наборы целых чисел, удовлетворяющие условию $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < n+1$, т. е. k-элементные подмножества n-элементного множества. Таким образом,

$$I((n+1)P) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Посмотрим теперь на многочлен $N((n-1)P)$. Его значение даёт количество наборов целых чисел с условием $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant n-1$, т. е. количество k-элементных подмножеств *с повторениями* в n-элементном множестве. А в силу взаимности Эрхарта

$$\begin{aligned} N((n-1)P) = (-1)^k I((1-n)P) = \\ = (-1)^k \binom{-n}{k} = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k}. \end{aligned}$$

Разумеется, количество подмножеств с повторениями можно найти и при помощи несложных комбинаторных соображений, но теория Эрхарта даёт общий взгляд на разные утверждения такого рода.

Тем, кого эта теория заинтересовала, рекомендуем книгу [5] (в частности, в ней можно найти доказательство теоремы 2).

§ 5. Коммутирующие операторы

Вернёмся на шаг назад. Мы выяснили, что если продифференцировать старший член многочлена $S_k(x)$, то получится функция, которую мы суммируем, т. е. x^k. А что будет, если продифференцировать остальные члены?

Посмотрим на два следующих члена:

$$\left(\frac{1}{2}x^k\right)' = k\frac{1}{2}x^{k-1}, \quad \left(k\frac{1}{12}x^{k-1}\right)' = k(k-1)\frac{1}{12}x^{k-2}.$$

В обоих случаях получается соответствующий член для многочлена $S_{k-1}(x)$, только умноженный на k. То же, кстати, можно сказать и про старший член.

Гипотеза 3. *Производная многочлена S_k равна многочлену kS_{k-1}.*

Внимательный читатель заметил уже, вероятно, что буквально такая гипотеза верна быть не может: $S_k(0)=0$, но ненулевой свободный член регулярно возникает при дифференцировании многочленов S_k (при $k=2, 4, \ldots$). Однако *с точностью до свободного члена* гипотеза, как нетрудно проверить, для всех найденных многочленов выполняется.

Гипотеза 3′. $S_k' = kS_{k-1} + \mathrm{const}$.

На самом деле, это утверждение становится почти очевидным, если говорить не об отдельных многочленах, а об операторах, действующих на множестве многочленов.

Обозначим символом Σ «оператор суммирования», переводящий многочлен P в такой многочлен $\Sigma[P]$, что

$$(\Sigma[P])(n) = P(1) + P(2) + \ldots + P(n).$$

Напомним (см. § 1), что он определяется двумя условиями[1]:

$$(\Sigma[P])(0) = 0; \tag{$*$}$$

$$\Delta\Sigma[P] = P. \tag{$**$}$$

Таким образом, оператор суммирования Σ соотносится с оператором разностной производной Δ примерно так же, как (определённый) интеграл соотносится с дифференцированием.

Наша гипотеза состояла в том, что $D\Sigma[x^k] = \Sigma D[x^k] + \mathrm{const}$, где D — оператор дифференцирования.

Лемма 1. *Операторы D и Σ «коммутируют с точностью до констант»: $D\Sigma[P] - \Sigma D[P] = \mathrm{const}$ (где константа своя для каждого многочлена P).*

---

[1] Напомним также, что $(\Delta[P])(n) = P(n) - P(n-1)$.

Доказательство. Как отмечено выше, Σ — это почти обратная к Δ операция. Но уже ясно, что оператор Δ коммутирует с D. Действительно,

$$D\Delta[f] = [f(x) - f(x-1)]' = f'(x) - f'(x-1) = \Delta D[f].$$

Отсюда $\Delta D\Sigma = D\Delta\Sigma = D$, и из уравнения $(**)$ для P' получаем $\Delta D\Sigma = \Delta\Sigma D$, откуда следует утверждение леммы. $\square$

В частности, взяв $P(x) = x^k$, мы получаем, что гипотеза $3'$ верна.

Предложение 1. *$S_k(x)' = kS_{k-1}(x) + B_k^*$ для некоторой константы B_k^*.*

С помощью этого предложения можно, зная многочлен S_{k-1}, найти многочлен S_k: взять первообразную многочлена S_{k-1} с нулевым свободным членом, умножить на k, а потом прибавить $B_k^* x$, где константу B_k^* нужно выбрать из условия $S_k(1) = 1$.

Отсюда немедленно следует доказательство возникавшей в упражнении 2 гипотезы о том, как меняются коэффициенты многочленов S_k при изменении k.

Предложение 2. *Коэффициент при n^{k+1-i} в многочлене $S_k(n)$ имеет вид*

$$B_i^* \cdot \frac{k(k-1)\dots(k+2-i)}{i!}.$$

Осталось объяснить, почему примерно половина этих коэффициентов обращается в нуль, другими словами, почему функция $S_k(x) = \Sigma x^k$ является почти чётной/нечётной (в зависимости от чётности k). Конечно, это связано просто с чётностью/нечётностью функции x^k.

Обозначим символом T оператор, переводящий функцию $f(x)$ в функцию $f(-x)$. Функция f чётна, если $Tf = f$, и нечётна, если $Tf = -f$. Поэтому, чтобы выяснить, что происходит с чётной/нечётной функцией при применении оператора Σ, нужно выяснить, как связаны операторы ΣT и $T\Sigma$.

Как показывает доказательство леммы 1, для этого полезно выяснить, как связаны операторы $T\Delta$ и ΔT, т. е. сравнить выражения

$$T\Delta[P] = P(-x) - P(-x-1);$$
$$\Delta T[P] = P(-x) - P(-(x-1)) = -(P(-x+1) - P(-x)).$$

Предложение 3. *Если $T[P] = \pm P$, то соответственно*

$$(\Sigma[P])(-x) = \mp(\Sigma[P])(x-1).$$

Доказательство (в духе доказательства леммы 1) оставляется читателю. Одно следствие полученного утверждения мы видели в упражнении 7: $B^*_{2k+1} = 0$ при $k \neq 0$. Ещё одним следствием является следующая *теорема Фаульхабера.*

Упражнение 8. Выведите из предложения 3, что

- $S_{2k-1}(n)$ является многочленом степени k от $u := n(n+1)/2$;
- $S_{2k}(n)$ имеет вид $(2n+1) \cdot$ (многочлен степени k от u).

(Например, $S_3(n) = u^2$, $S_2(n) = (2n+1)u/6$.)

§ 6. Числа Бернулли и символические манипуляции

Итак, мы получили формулу для сумм степеней:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \ldots + B^*_i \cdot \frac{k(k-1)\ldots(k+2-i)}{i!} \cdot n^{k+1-i} + \ldots + B^*_k n,$$

а коэффициенты B^*_k можно вычислять последовательно из соотношения $S_k(1) = 1$.

Эти коэффициенты — почти числа Бернулли B_k, а конкретнее $B_1 = -B^*_1$, $B_k = B^*_k$ при $k > 1$. Другими словами, числа Бернулли B_k играют роль, аналогичную числам B^*_k при суммировании степеней не до n^k, а до $(n-1)^k$:

$$S_k(n-1) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} - \frac{1}{2}n^k + \ldots + B_i \cdot \frac{k(k-1)\ldots(k+2-i)}{i!} \cdot n^{k+1-i} + \ldots + B_k n.$$

В таблице приведены несколько первых чисел Бернулли. Отметим, что дальше числа $|B_{2n}|$ быстро растут (примерно как факториалы).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

Компактно записать (и запомнить) получающиеся формулы можно следующим образом. Заметим, во-первых, что

$$\frac{k(k-1)\ldots(k+2-i)}{i!} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i},$$

поэтому

$$S_k(n-1) = \frac{1}{k+1}\Big(n^{k+1} + (k+1)B_1 n^k + \ldots + \\ + \binom{n+1-i}{i} B_i n^{k+1-i} + \ldots + (k+1)B_k n\Big)$$

и получается выражение, напоминающее бином Ньютона. Чтобы сделать сходство более явным, будем писать у чисел Бернулли индекс не снизу, а сверху:

$$S_k(n-1) = \frac{1}{k+1}\Big(n^{k+1} + (k+1)B^1 n^k + \ldots + \\ + \binom{n+1-i}{i} B^i n^{k+1-i} + \ldots + (k+1)B^k n\Big).$$

Наконец, проигнорируем то, что в записи B^i число i является индексом, а не показателем степени, и запишем полученный нами ответ в следующем виде.

Теорема 3. $S_k(n-1) = \dfrac{(B+n)^{k+1} - B^{k+1}}{k+1}$.

Можно считать эту запись в духе *теневого исчисления*[2)] просто способом запомнить правильную формулу — получающуюся, если раскрыть скобки, а затем заменить i-ю степень формального символа B на i-е число Бернулли.

При $n=1$ получается компактная форма записи рекурренты для чисел Бернулли.

Предложение 4. $(B+1)^{k+1} - B^{k+1} = 0$ (*при* $k > 0$).

Если в этой формуле раскрыть скобки, то B_{k+1} сократится и останется равенство, выражающее B_k через числа Бернулли с меньшими номерами:

$$B_k = -\sum_{i<k} \binom{k+1}{i} \frac{B_i}{k+1}.$$

Упражнение 9. Докажите *формулу Эйлера — Маклорена* для многочленов: если многочлен F — первообразная многочлена f, то

$$f(0) + \ldots + f(n-1) = F(B+n) - F(B) =: \int\limits_0^n f(x+B)\,dx.$$

В заключение приведём ещё одну совсем уж загадочную манипуляцию с символом B. Подставим формально в последнее равенство $f(n) = q^n$ (игнорируя тот факт, что это не многочлен). Получим ещё одно выражение для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{q^n-1}{q-1} = 1 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^{B+n} - q^B}{\ln q} = \frac{q^n-1}{\ln q} q^B,$$

откуда $q^B = \dfrac{\ln q}{q-1}$. Чтобы избавиться от логарифма, сделаем замену $q = e^s$. Получим следующее равенство.

[2)] Кое-что о теневом исчислении можно узнать из гл. 5 книги [4].

Предложение 5. $e^{sB} = \dfrac{s}{e^s - 1}$.

Понимать это следует как равенство формальных степенных рядов. А именно, экспонента e^t — это ряд

$$1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots,$$

в правой части стоит результат деления (если угодно, «в столбик») двух рядов,

$$\frac{s}{s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4 + \ldots} = 1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{12}s^2 + 0 \cdot s^3 + \ldots,$$

а в левой части — ряд

$$1 + B_1 s + \frac{B_2}{2!}s^2 + \frac{B_3}{3!}s^3 + \ldots,$$

и утверждается, что коэффициенты при всех степенях s в обеих частях равны.

Упражнение 10. Докажите предложение 5: выведите из рекурренты для чисел Бернулли равенство формальных рядов

$$\left(\sum \frac{B_i}{i!} s^i\right)(e^s - 1) = s.$$

Обычно равенство из предложения 5, наоборот, считается *определением* чисел Бернулли, и в более стандартном (и, в определённом смысле, концептуально более правильном) способе получения формулы для $S_k(n)$ и формулы Эйлера — Маклорена числа Бернулли сразу возникают именно как коэффициенты такого ряда (см., например, книгу [2]).

§ 7. Значения дзета-функции

Числа Бернулли возникают в разных задачах теории чисел, комбинаторики, алгебраической топологии... Здесь мы приведём (без доказательства) ещё только один пример — тоже связанный с вычислением некоторой суммы k-х степеней.

Напомним, что для $s > 1$ *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$ определяется как сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$$

Например, хорошо известно, что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

На самом деле, это частный случай следующего утверждения (элементарное доказательство можно найти в гл. 7 книги [1]).

Теорема 4. *$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\dfrac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}$ для целых положительных k.*

Кроме того, хотя бесконечные суммы $1^k + 2^k + \ldots$ очевидным образом расходятся, существует некоторый канонический способ аналитически продолжить функцию $\zeta(s)$ на $s < 1$, и для $s = -k$ получается совсем простая формула (ср. с формулой $\dfrac{(B+n)^{k+1} - B_{k+1}}{k+1}$ для конечной суммы k-х степеней).

Теорема 5. *$\zeta(-k) = -\dfrac{B^*_{k+1}}{k+1}$ для целых неотрицательных k.*

Благодарности

Автор благодарит А. И. Сгибнева за обсуждение различных тем, близких к задаче о сумме степеней, и за многочисленные замечания к предыдущим версиям текста, а также Г. Б. Шабата — и за полезные обсуждения, и за возможность поучаствовать в работе Клуба экспериментальной математики (всё это, несомненно, повлияло на данный текст).

Список литературы

[1] *Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времён Евклида до наших дней. М.: Бином, 2015.

[2] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.

[3] *Кушниренко А.* Целые точки в многоугольниках и многогранниках // Квант. 1977. № 4. С. 13–20.

[4] *Ландо С. К.* Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2014.

[5] *Beck M., Robins S.* Computing the Continuous Discretely: Integer-point Enumeration in Polyhedra. New York: Springer, 2007.

Григорий Александрович Мерзон, МЦНМО

merzon@mccme.ru