Дополнение к результатам Ф. А. Шарова

П. П. Рябов*

В данной работе рассматривается вопрос о замощении прямоугольника меньшими прямоугольниками, отношения сторон которых принадлежат заданному набору квадратных иррациональностей. Эта проблема ранее была изучена Ф. А. Шаровым в работе [1]. Сформулируем её основной результат.

Теорема 1 (Ф. Шаров, 2016). *Пусть*

$$x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n + b_n\sqrt{p}$$

— такие числа, что $x_i > 0$, $a_i, b_i, p \in \mathbb{Q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *и* $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. *Тогда*:

1) *если существуют такие числа* i *и* j, *что* $1 \leqslant i, j \leqslant n$ *и*

$$(a_i - b_i\sqrt{p})(a_j - b_j\sqrt{p}) < 0,$$

то прямоугольник с отношением сторон z *можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $x_1, \ldots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q}\};$$

2) *если для всех* i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *выполнено неравенство* $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* z *можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $x_1, \ldots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q},\ e > 0,\ \frac{|f|}{e} \leqslant \max_i \frac{|b_i|}{a_i}\right\};$$

3) *если для всех* i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *выполнено неравенство* $a_i - b_i\sqrt{p} < 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* z *можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $x_1, \ldots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q},\ f > 0,\ \frac{|e|}{f} \leqslant \max_i \frac{|a_i|}{b_i}\right\}.$$

* Автор частично поддержан грантом Президента РФ МК-6137.2016.1.

В статье [1] доказано существование требуемых замощений, однако нет их явного построения. Здесь мы приведём такую конструкцию и получим близкий новый результат.

§ 1. Простое доказательство части «тогда» пункта 3 теоремы 1

Без ограничения общности можно положить

$$\max_i \frac{|a_i|}{b_i} = \frac{|a_1|}{b_1}$$

и $a_1, b_1, e, f \geqslant 0$. Действительно, из неравенств $a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$, $a_1 + b_1\sqrt{p} > 0$ следует, что $b_1 > 0$. Если, например, $a_1 < 0$, то

$$\frac{1}{a_1 + b_1\sqrt{p}} = \frac{-a_1}{b_1^2 p - a_1^2} + \frac{b_1}{b_1^2 p - a_1^2}\sqrt{p} = a_1' + b_1'\sqrt{p}$$

— отношение сторон того же прямоугольника, и уже $a_1', b_1' \geqslant 0$.

Теперь рисунок 1 даёт явную конструкцию замощения прямоугольника $1 \times (e + f\sqrt{p})$ прямоугольниками с отношением сторон $a_1 + b_1\sqrt{p}$.

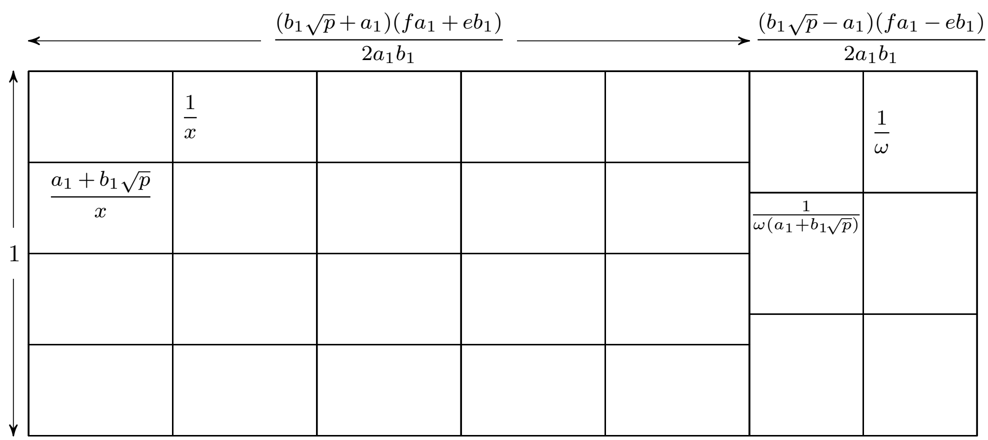

Рис. 1. Замощение в теореме 1 для $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $e = \frac{7}{24}$, $f = \frac{23}{24}$, $p = 5$

Замощаемый прямоугольник разрезается на два прямоугольника R_1 и R_2 размерами

$$1 \times \frac{(b_1\sqrt{p} + a_1)(fa_1 + eb_1)}{2a_1b_1} \quad \text{и} \quad 1 \times \frac{(b_1\sqrt{p} - a_1)(fa_1 - eb_1)}{2a_1b_1}.$$

Положим
$$\frac{fa_1+eb_1}{2a_1b_1}=\frac{y}{x},\qquad \frac{(pb_1{}^2-a_1{}^2)(fa_1-eb_1)}{2a_1b_1}=\frac{u}{w},$$
где $x,y,u,w\in\mathbb{Z}_+$. Прямоугольник R_1 замостим xy равными прямоугольниками
$$\frac{1}{x}\times\frac{a_1+b_1\sqrt{p}}{x},$$
разделив его на x равных частей по вертикали и на y равных частей по горизонтали. Прямоугольник R_2 аналогично замостим uw прямоугольниками
$$\frac{1}{w}\times\frac{1}{w(a_1+b_1\sqrt{p})}.$$

Замощение в пунктах 1 и 2 теоремы 1 строится похожим образом.

§ 2. Новый результат

Хотя в рассматриваемой задаче речь идёт о *наборе* квадратичных иррациональностей, фактически в замощении используется только одна из них (см. § 1). А что если потребовать, чтобы для каждого числа из набора в замощении нашёлся хотя бы один прямоугольник с таким отношением сторон?

Назовём разрезание прямоугольника на прямоугольники с отношениями сторон $x_1,\ldots,x_n$ *разнообразным*, если для каждого $i=1,\ldots,n$ в замощении *найдётся хотя бы один прямоугольник с отношением сторон* x_i. Мы покажем, что тогда выполняется следующая теорема (по сравнению с теоремой 1 добавлено слово *разнообразно*, усилены условия на набор отношений сторон, а в конце пунктов 2 и 3 неравенство заменено на строгое).

Теорема 2. *Пусть $x_1=a_1+b_1\sqrt{p}$, …, $x_n=a_n+b_n\sqrt{p}$ — такие числа, что $x_i/x_j;\ x_ix_j\notin\mathbb{Q}$ при $i\neq j$; $x_i>0$, $a_i,b_i,p\in\mathbb{Q}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $p\geqslant 0$, $n\geqslant 2$. Тогда:*

1) *если существуют такие числа i и j, что $1\leqslant i,j\leqslant n$ и*
$$(a_i-b_i\sqrt{p})(a_j-b_j\sqrt{p})<0,$$
то прямоугольник с отношением сторон z можно разнообразно *разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1,\ldots,x_n$ тогда и только тогда, когда*
$$z\in\{e+f\sqrt{p}>0\mid e,f\in\mathbb{Q}\};$$

2) *если для всех i $(1\leqslant i\leqslant n)$ выполнено неравенство $a_i-b_i\sqrt{p}>0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно* разнообразно *разрезать*

на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q},\ e > 0,\ \frac{|f|}{e} < \max_i \frac{|b_i|}{a_i} \right\};$$

3) *если для всех* i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *выполнено неравенство* $a_i - b_i\sqrt{p} < 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* z *можно* разнообразно *разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $x_1, \ldots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q},\ f > 0,\ \frac{|e|}{f} < \max_i \frac{|a_i|}{b_i} \right\}.$$

§ 3. Доказательство теоремы 2

Доказательство пункта 1 теоремы 2. Необходимость следует из теоремы 1, п. 1. Докажем достаточность. Разделим прямоугольник $1 \times z$ на n прямоугольников $A_1, \ldots, A_n$ размера $1/n \times z$. К меньшей стороне прямоугольника A_k изнутри приставим большей стороной прямоугольник с отношением сторон x_k так, чтобы эти стороны совпали. Оставшуюся часть прямоугольника A_k замостим прямоугольниками с отношениями сторон x_i $(i \neq k)$, по теореме 1, п. 1 это возможно. Теперь для каждого k в замощении найдётся прямоугольник с отношением сторон x_k. $\square$

В теореме 2 доказательства пунктов 2 и 3 аналогичны. Поэтому приведём только доказательство пункта 2.

Доказательство части «тогда» в пункте 2 теоремы 2. Пусть $z = e + f\sqrt{p}$, где $e, f \in \mathbb{Q}$. Без ограничения общности будем считать, что $|f|/e < |b_1|/a_1$. Если $k \in \mathbb{N}$ достаточно велико, то

$$\frac{|f|}{e} < \frac{|kb_1 + b_2 + \ldots + b_n|}{ka_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

так как

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|kb_1 + b_2 + \ldots + b_n|}{ka_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{|b_1|}{a_1} > \frac{|f|}{e}.$$

При этом

$$ka_1 + a_2 + \ldots + a_n - (kb_1 + b_2 + \ldots + b_n)\sqrt{p} > 0.$$

Прямоугольник с отношением сторон

$$r = ka_1 + a_2 + \ldots + a_n + (kb_1 + b_2 + \ldots + b_n)\sqrt{p}$$

состоит из k прямоугольников с отношением сторон x_1 и из прямоугольников с отношением сторон $x_2, \ldots, x_n$. Прямоугольник $1 \times z$ замостим прямоугольниками с отношением сторон r, это возможно по теореме 1, п. 2 (а параграф 1 даёт явную конструкцию замощения). $\square$

Доказательство части «только тогда» в пункте 2 теоремы 2. По теореме 1, п. 2, если прямоугольник $1 \times z$ можно замостить прямоугольниками с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$, то $z = e + f\sqrt{p}$ для некоторых таких $e, f \in \mathbb{Q}$, что

$$\max_i \frac{|b_i|}{a_i} \geqslant \frac{|f|}{e}.$$

Остаётся доказать, что если

$$\max_i \frac{|b_i|}{a_i} = \frac{|f|}{e},$$

то прямоугольник $1 \times z$ невозможно *разнообразно* разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$.

Без ограничения общности будем считать a_1, b_1, e, f неотрицательными, и для $i = 2, \ldots, n$ пусть $|b_i|/a_i \leqslant b_1/a_1 = f/e$ (аналогично § 1). На самом деле неравенство здесь строгое. Пусть, например, $|b_2|/a_2 = b_1/a_1$. Тогда при $b_2 \geqslant 0$ отношение x_1/x_2 будет рационально, а при $b_2 < 0$ рациональным будет $(a_1 - b_1\sqrt{p})/(a_2 + b_2\sqrt{p})$, но в этом случае рационально $x_1 x_2$ — противоречие с условием теоремы.

Предположим, что нужное *разнообразное* разрезание существует. Измельчим его следующим образом. Для каждого $i = 2, \ldots, n$ замостим каждый прямоугольник разбиения с отношением сторон x_i прямоугольниками с отношением сторон x_1. Это возможно по теореме 1, п. 2, причём в явной конструкции такого замощения в § 1, см. рис. 1, найдутся прямоугольники с обоими возможными направлениями сторон.

Дальнейшее доказательство существенно использует понятия и факты, приведённые в [1, с. 209–210].

Стороны всех прямоугольников измельчения представляются в виде $\alpha + \beta\sqrt{p}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ (см. [1, с. 210]).

Рассмотрим «площади» [1, определение 5 на с. 209] прямоугольников измельчения, положив

$$A = f, \quad B = -e, \quad C = \frac{2fa_1^2}{b_1^2} - pf.$$

«Площадь» прямоугольника $(\alpha + \beta\sqrt{p}) \times x_1(\alpha + \beta\sqrt{p})$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, в данном случае равна

$$\beta^2\Big(\frac{2fa_1^3}{b_1^2} - pfa_1 - peb_1\Big) = \beta^2 \cdot \frac{2fa_1(a_1^2 - pb_1^2)}{b_1^2} \geqslant 0$$

([1, с. 210, формула для S_M]).

Если хотя бы у одного прямоугольника $\beta \neq 0$, то общая сумма «площадей» прямоугольников измельчения строго больше 0. Однако «площадь» замощаемого прямоугольника равна 0 ([1, с. 210, формула для $S_{\text{Б}}$]), противоречие.

Остаётся рассмотреть случай, когда все прямоугольники измельчения имеют вид $\alpha \times x_1\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$. Будем считать, что у измельчаемого прямоугольника сторона 1 вертикальна. Рассмотрим прямоугольник A_1, у которого сторона αx_1 вертикальна (такой найдётся, так как в измельчении есть прямоугольники с обоими возможными направлениями сторон). Выберем прямоугольник A_2 над A_1, имеющий с A_1 общий отрезок (если над A_1 есть прямоугольник), затем выберем прямоугольник A_3 над A_2, имеющий с A_2 общий отрезок, и т. д. Аналогично выберем прямоугольники под A_1. Сумма всех их вертикальных сторон будет равна вертикальной стороне измельчаемого прямоугольника, т. е. 1. Эта же сумма будет равна $x_1w + u$ для некоторых $w, u \in \mathbb{Q}$, $u \geqslant 0$, $w > 0$. Получим равенство $1 = w(a_1 + b_1\sqrt{p}) + u$. Противоречие, так как $b_1 > 0$ по доказанному выше строгому неравенству $|b_2|/a_2 < b_1/a_1$. $\square$

Благодарности

Этой работы не было бы без наставлений М. Б. Скопенкова. Автор благодарен Ф. А. Шарову за ценные замечания.

Список литературы

[1] *Шаров Ф. А.* Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 200–214.

Павел Павлович Рябов, НИУ ВШЭ

pavel_ryabov_98@mail.ru