Простое доказательство локальной леммы Ловаса*

А. С. Ремизова, А. Б. Скопенков†

В этой заметке приводится простое доказательство локальной леммы Ловаса в симметричной форме. Оно основано на [1] и более просто, чем предложенное в [3], [2, § 6.2].

Обсуждение понятия независимости, его применения к доказательствам существования, а также обсуждение вероятностного языка в комбинаторике см. в [3], [2, § 6.2]. Здесь мы сразу приведём окончательные формулировки.

Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля $|A \cap B|/|B|$ множества $A \cap B$ в B равна доле $|A|/|M|$ множества A в M.

Локальная лемма Ловаса в симметричной форме. *Пусть даны $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества M. Пусть для некоторого натурального d и любого натурального k*

- *доля подмножества A_k в M не меньше $1 - \frac{1}{4d}$,*
- *из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычеркнуть не более d множеств, среди которых есть A_k, так, что пересечение любого набора из оставшихся множеств независимо с A_k.*

Тогда $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

---

* Эта заметка возникла из обсуждений на семинарах по дискретному анализу на факультете информатики и вычислительной техники МФТИ и из спецкурса А. Скопенкова и Л. Шабанова в Московской выездной олимпиадной школе. Благодарим Р. Карасёва, Л. Шабанова и участников семинара и спецкурса за полезные замечания.

† А. Скопенков поддержан стипендией Саймонса и грантом фонда Д. Зимина «Династия».

Приведём ряд задач, которые покажут, как можно придумать лемму Ловаса и её доказательство (см. также [3]). Указания и решения, а также само доказательство, приведены далее.

Задача 1. Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье *независимы*, т. е. доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех жителей. Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдётся богатый здоровый горожанин?

Задача 2. (а) В городе доля богатых горожан больше 2/3, доля здоровых больше 2/3 и доля умных больше 2/3. Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин?

(б) В городе доля богатых горожан больше 3/4, доля здоровых больше 3/4 и доля умных больше 3/4. Обязательно ли среди здоровых умных большинство богаты?

(в) В городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин. Богатство, здоровье и ум попарно независимы (т. е., например, доля богатых здоровых среди богатых такая же, как и доля здоровых среди всех жителей). Доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется *независимостью в совокупности*.) Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин?

(г) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

(д) В городе доля богатых горожан больше 2/3, доля здоровых больше 2/3 и доля умных больше 2/3. Богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы. Может ли доля богатых здоровых умных быть меньше 1/5?

(е) В городе доля богатых горожан больше 5/8, доля здоровых больше 5/8 и доля умных больше 5/8. Богатство и здоровье независимы. Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин?

Задача 3. (а) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 5/6. Пусть подмножество A_1 независимо с $A_3 \cap A_4$. Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \dfrac{7}{9}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(б) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 5/7. Пусть A_1 независимо с $A_3 \cap A_4$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \varnothing$.

(в) Пусть $n \geqslant 3$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 3/4. Пусть A_k независимо с $A_{k+2} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-2$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Задача 4. Пусть $n \geqslant 5$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $7/8$.

(а) Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \frac{4}{5}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(б) Если A_1 независимо с $A_4 \cap A_5$, то $|A_1 \cap \ldots \cap A_5| > \frac{5}{6}|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

(в) Пусть A_k независимо с $A_{k+3} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-4$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Указания и решения к задачам

Будем пропускать знаки пересечения и числа элементов. Черта над множеством обозначает его дополнение в исходном конечном множестве M, т. е. $\overline{A} := M - A$.

2. Обозначим через У, Б, З, Г множества умных, богатых, здоровых и всех горожан соответственно.

(б) Имеем $\text{УЗ}\overline{\text{Б}} \leqslant \overline{\text{Б}} \leqslant \text{Г}/4 < \text{УЗ}/2$.

(г) Забудьте про глупых людей!

Замечание. Для решения задачи достаточно наличия одного умного человека. Не обязательно, чтобы умных было большинство.

Приведём более сложное решение. Зато оно подводит к п. (д), (е) и лемме Ловаса. Имеем $\text{УБ} > \text{У}/2 < \text{УЗ}$. Значит,

$$\text{УБЗ} = \text{УБ} - \text{УБ}\overline{\text{З}} > \frac{\text{У}}{2} - \text{У}\overline{\text{З}} > \Big(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\Big)\text{У} = 0.$$

(д) Нет, доля больше $2/9$.

(е) Приведём более сложное решение, чем, вероятно, нашли вы. Зато оно подводит к лемме Ловаса. Имеем

$$\text{УБЗ} = \text{УБ} - \text{УБ}\overline{\text{З}} \geqslant (\text{У} + \text{Б} - \text{Г}) - \text{Б}\overline{\text{З}} = \text{У} - \text{Г} + \text{БЗ} > \Big(\frac{5}{8} - 1 + \frac{25}{64}\Big)\text{Г} = \frac{1}{64}\text{Г} > 0.$$

Обозначим $X_k := A_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n$. Тогда X_{n+1} — исходное конечное множество.

3. (а) Обозначим через M исходное конечное множество. Тогда аналогично утверждению 2(б) получаем

$$\overline{A}_2 A_3 A_4 \leqslant \overline{A}_2 < \frac{M}{6} < \frac{A_3 A_4}{4}.$$

Так как A_1 не зависит от $A_3 A_4$, то и $\overline{A}_1$ не зависит от $A_3 A_4$. Поэтому

$$A_2 A_3 A_4 = A_3 A_4 - \overline{A}_2 A_3 A_4 > \frac{3}{4} A_3 A_4 > \frac{9}{2} \overline{A}_1 A_3 A_4 \geqslant \frac{9}{2} \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4.$$

Отсюда

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = A_2 A_3 A_4 - \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4 > \frac{7}{9} A_2 A_3 A_4.$$

(в) Докажем неравенства:

$$X_1 > \frac{1}{2}X_2 > \frac{1}{4}X_3 > \ldots > \frac{1}{2^{n-2}}X_{n-1} > \frac{1}{2^{n-1}}X_n.$$

Из них следует утверждение задачи, т. е. $X_1 \neq \varnothing$. (Аналогично утверждению 2(б) в последнем неравенстве можно взять X_{n+1} вместо X_n, а в условии задачи заменить $n-2$ на $n-3$.)

Достаточно доказать лишь первое неравенство в этой цепочке, остальные получаются из него заменой набора $A_1, \ldots, A_n$ на набор $A_k, \ldots, A_n$.

Так как $X_1 = X_2 - \overline{A}_1X_2$, неравенство $X_1 > \frac{1}{2}X_2$ равносильно неравенству $\overline{A}_1X_2 < \frac{1}{2}X_2$. Докажем последнее неравенство индукцией по n.

База индукции $n = 1$ вытекает из соотношения

$$\overline{A}_1 = X_2 - A_1 < \frac{1}{4}X_2 < \frac{1}{2}X_2.$$

Докажем шаг индукции. По предположению индукции для набора $A_2, \ldots, A_n$ имеем $\overline{A}_2X_3 < \frac{1}{2}X_3$. Условие задачи говорит, что A_k независимо с X_{k+2} для любого $k = 1, 2, \ldots, n-3$. Так как A_1 не зависит от X_3, получаем, что и $\overline{A}_1$ не зависит от X_3. Значит, $\overline{A}_1X_3 < \frac{1}{4}X_3$. Поэтому

$$X_2 = X_3 - \overline{A}_2X_3 > \frac{1}{2}X_3 > 2\overline{A}_1X_3 \geqslant 2\overline{A}_1X_2.$$

4. Пункты (а), (б), (в) аналогичны утверждениям 2(б), 3(а) и 3(б) соответственно.

(а) Обозначим через M исходное конечное множество. Тогда

$$\overline{A}_1A_2A_3A_4 \leqslant \overline{A}_1 < \frac{M}{8} < \frac{A_2A_3A_4}{5}.$$

(б) Используем для $n = 5$ обозначения X_k, введённые перед решением задачи 3. По п. (а) $\overline{A}_2X_3 < X_3/5$. Так как A_1 не зависит от X_3, получаем, что и $\overline{A}_1$ не зависит от X_3. Поэтому

$$X_2 = X_3 - \overline{A}_2X_3 > \frac{4}{5}X_3 > \frac{32}{5}\overline{A}_1X_3 > 6\overline{A}_1X_3 \geqslant 6\overline{A}_1X_2.$$

Отсюда

$$X_1 = X_2 - \overline{A}_1X_2 > \frac{5}{6}X_2.$$

(в) Достаточно доказать, что $X_1 > \frac{3}{4}X_2$. Так как $X_1 = X_2 - \overline{A}_1X_2$, неравенство $X_1 > \frac{3}{4}X_2$ равносильно неравенству $\overline{A}_1X_2 < \frac{1}{4}X_2$. Докажем последнее неравенство при помощи индукции по n.

База индукции $n = 1$ вытекает из

$$\overline{A}_1 = X_2 - A_1 < \frac{1}{8}X_2 < \frac{1}{4}X_2.$$

Докажем шаг индукции. По предположению индукции для усечённых наборов

$$\overline{A}_2X_3 < \frac{1}{4}X_3, \quad \overline{A}_3X_4 < \frac{1}{4}X_4.$$

Так как A_1 не зависит от X_4, то и $\overline{A}_1$ не зависит от X_4. Поэтому

$$X_2 = X_4 - (\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3)X_4 \geqslant X_4 - \overline{A}_2X_4 - \overline{A}_3X_4 > \frac{1}{2}X_4 > 4\overline{A}_1X_4 \geqslant 4\overline{A}_1X_2.$$

Доказательство локальной леммы Ловаса. Положим

$$X_k := A_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n.$$

Достаточно доказать, что

$$|X_1| \geqslant \Big(1 - \frac{1}{2d}\Big)|X_2| \quad \text{для любого } n. \tag{I}$$

Из этого будет вытекать, что

$$|X_1| \geqslant \Big(1 - \frac{1}{2d}\Big)^{n-1}|X_n| > 0.$$

Так как $|X_1| = |X_2| - |\overline{A}_1 \cap X_2|$, утверждение (I) равносильно утверждению

$$|\overline{A}_1 \cap X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2| \quad \text{для любого } n.$$

Докажем последнее утверждение при помощи индукции по n. База индукции $n = 1$ вытекает из[1)]

$$|\overline{A}_1| = |X_2| - |A_1| \leqslant \frac{1}{4d}|X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2|.$$

Докажем шаг индукции. Без ограничения общности, будем считать, что A_1 не зависит от X_{d+1}. Тогда и $\overline{A}_1$ не зависит от X_{d+1}. Для каждого $j \in \{2, 3, \ldots, d\}$ применим предположение индукции к системе подмножеств $A_j, A_{d+1}, A_{d+2}, \ldots, A_n$. Получим

$$|\overline{A}_j \cap X_{d+1}| \leqslant \frac{1}{2d}|X_{d+1}|.$$

[1)] Здесь X_2 — пересечение пустого семейства множеств и, значит, совпадает с M.

Значит,

$$|X_2| = |X_{d+1}| - |(\overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_d) \cap X_{d+1}| \geqslant$$
$$\geqslant |X_{d+1}| - \sum_{j=2}^{d} |\overline{A}_j \cap X_{d+1}| \geqslant \Big(1 - \frac{d-1}{2d}\Big)|X_{d+1}| > \frac{1}{2}|X_{d+1}|.$$

Так как A_1 и X_{d+1} независимы и доля подмножества A_1 в M не меньше $1 - \frac{1}{4d}$, получаем:

$$\frac{1}{2}|X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A}_1 \cap X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A}_1 \cap X_2|,$$

что и требовалось. □

Список литературы

[1] *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II. Amsterdam: North-Holland, 1975. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; Vol. 10). P. 609–627. http://www.cs.elte.hu/~lovasz/scans/LocalLem.pdf

[2] *Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г. и др.* Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016. http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf

[3] *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 164–177. http://arxiv.org/abs/1411.3171

Анастасия Сергеевна Ремизова, МФТИ
remizova.as@phystech.edu

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ
http://www.mccme.ru/~skopenko