Нам пишут

Неравенства для средних Джини

М. А. Горелов

В статье [4] приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть среди положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть различные. Если выполнены условия $p_1 > q_1$, $p_2 > q_2$, $p_2 \geqslant p_1$, $q_2 \geqslant q_1$ и хотя бы одно из двух последних неравенств строгое, то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{a_1^{p_1} + a_2^{p_1} + \ldots + a_n^{p_1}}{a_1^{q_1} + a_2^{q_1} + \ldots + a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1 - q_1}} < \left(\frac{a_1^{p_2} + a_2^{p_2} + \ldots + a_n^{p_2}}{a_1^{q_2} + a_2^{q_2} + \ldots + a_n^{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2 - q_2}}.$$

Можно предложить более простое и более концептуальное доказательство этого результата. Оно основано на следующем простом утверждении.

Лемма. *Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, A$ положительны, B — вещественное число, то квазимногочлен*

$$f(t) = b_1 a_1^t + b_2 a_2^t + \ldots + b_n a_n^t - BA^t$$

имеет не более двух нулей. Если при этом действительно имеется два нуля t_1 и t_2 (где $t_1 < t_2$), то $f(t) < 0$ при $t_1 < t < t_2$.

Для доказательства этой леммы заметим, что ни число нулей, ни знак функции $f(t)$ в любой точке не изменятся, если эту функцию разделить на A^t. А функция

$$\frac{f(t)}{A^t} = \left(\frac{a_1}{A}\right)^t + \left(\frac{a_2}{A}\right)^t + \ldots + \left(\frac{a_n}{A}\right)^t - B$$

строго выпукла, поэтому для неё всё очевидно.

Теперь можно приступать к доказательству теоремы. Достаточно доказать два «однопараметрических» неравенства

$$\left(\frac{a_1^{p_1}+a_2^{p_1}+\ldots+a_n^{p_1}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1-q_1}} < \left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_2-q_1}} < \\ < \left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_2}+a_2^{q_2}+\ldots+a_n^{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2-q_2}}.$$

Для доказательства первого рассмотрим функцию

$$f(t)=\frac{a_1^{t}+a_2^{t}+\ldots+a_n^{t}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}} - \\ - \left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{-q_1}{p_2-q_1}} \left(\left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_2-q_1}}\right)^{t}.$$

Она имеет нули $t{=}p_2$ и $t{=}q_1$, поэтому $f(p_1){<}0$, за исключением случая $p_1{=}p_2$.

Второе неравенство может быть доказано аналогично, с использованием функции

$$f(t)=\frac{a_1^{t}+a_2^{t}+\ldots+a_n^{t}}{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}} - \\ - \left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{-p_2}{p_2-q_1}} \left(\left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_2-q_1}}\right)^{t}.$$

У неё два нуля $t = p_2$ и $t = q_1$. Поэтому $f(q_2) < 0$, за исключением случая $q_2 = q_1$. Так как равенства $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$ по условию не выполняются одновременно, теорема доказана.

Таким методом может быть доказано много других неравенств (см. [1–3]).

Список литературы

[1] *Горелов М. А.* Правило Декарта // Квант. 2005. № 3. С. 40–43, 61–62.

[2] *Горелов М. А.* Простые задачи оптимизации. Правило Декарта. М.: ВЦ РАН, 2010. `http://www.mccme.ru/nir/seminar/files/gor1.pdf`

[3] *Горелов М. А.* Простые задачи оптимизации. Правило Декарта и мажоризация. М.: ВЦ РАН, 2011. `http://www.mccme.ru/nir/seminar/files/gor2.pdf`

[4] *Певный А. Б., Ситник С. М.* Средние Джини // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2015. С. 135–142.

Михаил Александрович Горелов, ВЦ ФИЦ ИУ РАН

griefer@ccas.ru