Знаменитый предел Арнольда

Н. Н. Осипов

Эта заметка посвящена одной учебной задаче В. И. Арнольда, опубликованной в «Математическом просвещении» [2]: найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x} \tag{1}$$

(см. также, например, [3, задача 2]). Учитывая довольно высокую популярность данной задачи в широких студенческих и преподавательских массах, этот предел вполне можно было бы назвать третьим замечательным пределом [1)].

Конечно, задачу нетрудно решить с помощью разложений в ряды, что можно проделать даже вручную (и что наверняка было проделано многими студентами по просьбе их преподавателей — см., например, [6]). Можно ли это проделать за один час (в статье [4] 1986 года В. И. Арнольд пишет: «редко кто из современных математиков справляется с вычислением этого предела за час») — вопрос чисто спортивного характера, в наше время довольно бессмысленный ввиду широкого распространения систем компьютерной алгебры.

[1)] На научном форуме `http://dxdy.ru` задача о нахождении предела (1) обсуждалась несколько раз за последний десяток лет (см., например, [8]). Напомним, что первым и вторым замечательными пределами в советских, а затем и российских учебниках по математическому анализу традиционно называются соответственно пределы

$$\lim\nolimits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim\nolimits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Столь же ясно, что автор задачи рассчитывал не на такой «компьютерный» подход, а на изящное решение из «геометрических соображений» в стиле эпохи Ньютона. Каких именно соображений? У В. И. Арнольда об этом очень скупо сказано на с. 90 его книги [1]: «Если графики несовпадающих аналитических функций f и g касаются прямой $y=x$ в нуле... (рис. 1), то отношения $|AB|/|BC|$ и $|BC|/|ED|$ стремятся к единице, когда A стремится к нулю. Поэтому искомый предел отношения $|AB|/|D'E'|$ равен единице».

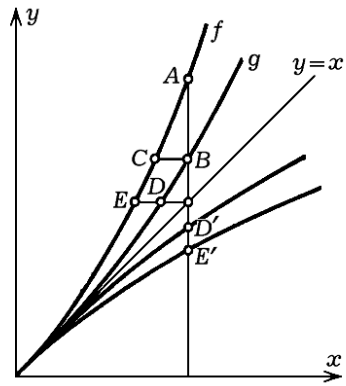

Рис. 1. Рисунок на с. 90 книги [1]

Автор этих строк был явно не первым, кому пришла в голову мысль сделать этот короткий текст более понятным для широкой публики (к которой автор причисляет прежде всего себя), т. е. снабдить приведённое выше рассуждение В. И. Арнольда необходимыми подробностями[2]. К сожалению, печатных публикаций на эту тему быстро отыскать не удалось, что, собственно, и привело к написанию настоящей заметки[3].

Итак, пусть $f(x)=x+o(x)$ и $g(x)=x+o(x)$ — две различные *аналитические* в точке $x=0$ функции. (В рассматриваемом частном случае функции $f(x)=\sin\operatorname{tg} x$ и $g(x)=\operatorname{tg}\sin x$ именно таковы.) Требуется доказать, что предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)} \tag{2}$$

равен единице.

Для доказательства запишем

$$\frac{f(x)-g(x)}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}=\frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{|BC|}{|D'E'|}=\frac{f(x)-g(x)}{x-f^{-1}(g(x))}\cdot\frac{x-f^{-1}(g(x))}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}=A(x)\cdot B(x).$$

[2] На XXIII Летней конференции международного математического «Турнира городов» в 2011 году был представлен сюжет «Дробные итерации функций», в рамках которого предлагалось вычислить предел (1). Авторы сюжета дают своё решение, схожее с тем, что предлагается ниже (подробности можно узнать по ссылке [9]). Интересное обсуждение задачи Арнольда, а также ещё один вариант её решения можно найти на форуме профессиональных математиков `https://mathoverflow.net` в теме [10].

[3] На самом деле как сама задача о вычислении предела (1), так и её решение в общем случае — для предела (2) с произвольными аналитическими функциями $f(x)$ и $g(x)$ — были опубликованы в сборнике «Математическое просвещение» (см. [2] и [5] соответственно). Кроме того, в [7] также приводится решение задачи о вычислении предела (2), но при довольно искусственных ограничениях на аналитические функции $f(x)$ и $g(x)$.

Нам нужно доказать, что каждая из дробей $A(x)$, $B(x)$ стремится к единице.

А. Имеем

$$A(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x - f^{-1}(g(x))} = \frac{f(x) - f(f^{-1}(g(x)))}{x - f^{-1}(g(x))} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \to f'(0) = 1, \quad x \to 0,$$

где $y = y(x) = f^{-1}(g(x))$. Тот факт, что дробь $(f(x) - f(y))/(x - y)$ стремится к $f'(0)$, можно обосновать, например, с помощью теоремы Лагранжа о конечном приращении.

Вот детали. Пусть $f(x) > g(x)$, как на рис. 1. Тогда $x > f^{-1}(g(x)) = y$. Имеем

$$f(x) - f(y) = f'(\theta)(x - y),$$

где $x > \theta = \theta(x) > y$. Ясно, что $\theta \to 0$ при $x \to 0$. Но тогда и $f'(\theta) \to f'(0)$ при $x \to 0$.

Важно подчеркнуть, что в этом рассуждении функции $f(x)$ и $g(x)$ совсем не обязаны быть слишком хорошими (аналитическими, как у нас) — достаточно, например, их непрерывной дифференцируемости.

В. Пусть $h(x) = g^{-1}(x) - f^{-1}(x) = ax^k + O(x^{k+1})$, где $k > 1$ и $a \neq 0$. Тогда

$$B(x) = \frac{x - f^{-1}(g(x))}{g^{-1}(x) - f^{-1}(x)} = \frac{g^{-1}(g(x)) - f^{-1}(g(x))}{g^{-1}(x) - f^{-1}(x)} = \frac{h(g(x))}{h(x)} =$$

$$= \frac{ag(x)^k + O(g(x)^{k+1})}{ax^k + O(x^{k+1})} = \frac{a(g(x)/x)^k + O(g(x)^{k+1}/x^k)}{a + O(x)} \to \frac{a \cdot g'(0)^k}{a} = 1,$$

что и требовалось.

Отметим, что в задаче Арнольда $h(x) = -\frac{1}{30}x^7 + O(x^9)$. Не слишком маленькое значение $k = 7$ говорит о том, что «компьютерный» подход, реализованный вручную, потребует значительных волевых усилий.

Важно ли, что участвующие в задаче функции $f(x)$ и $g(x)$ являются аналитическими? Мы действительно воспользовались их аналитичностью в п. **В** — она гарантировала существование числа k. Но, как пишет сам В. И. Арнольд (см. [1, с. 23–24]), «во времена Ньютона под словом функция понимали только очень хорошие вещи. Иногда это были многочлены, иногда рациональные функции, но во всяком случае все они были аналитическими в своей области определения и разлагались в ряды Тейлора». Зачем же лишний раз об этом упоминать?

Возможно, затем, что для просто хороших (например, бесконечно дифференцируемых, но не аналитических) функций $f(x)$ и $g(x)$ предел (2) может оказаться отличным от единицы.

Наш контрпример таков. Пусть $x > 0$ и функции $f(x)$, $g(x)$ таковы, что

$$g^{-1}(x) = x - \psi(x), \quad f^{-1}(x) = x - \psi(x) - \psi(\psi(x)),$$

где функция $\psi(x) = \exp(-1/x)$. Последняя функция обладает следующим свойством: каково бы ни было натуральное n, отношение $\psi(x)/x^n$ будет бесконечно малым при $x \to 0$. В частности, $\psi(x)$ нельзя аналитически продолжить ни в какую окрестность точки $x = 0$.

По-прежнему первая дробь $A(x)$ будет стремиться к единице при $x \to 0$ (доказательство п. **A** остаётся в силе). Однако вторая дробь $B(x)$ будет уже бесконечно большой при $x \to 0$, как будет показано ниже.

В нашем случае $h(x) = \psi(\psi(x))$. Кроме того, $g(x) > x + \psi(x)$. В самом деле, это неравенство равносильно неравенству

$$x > g^{-1}(x + \psi(x)) = x + \psi(x) - \psi(x + \psi(x)),$$

которое сводится к неравенству $\psi(x+\psi(x)) > \psi(x)$, что верно, ибо функция $\psi(x)$ возрастает и положительна. Теперь имеем

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{h(g(x))}{h(x)} > \frac{h(x + \psi(x))}{h(x)} = \\ &= \exp\left(\frac{\psi(x + \psi(x)) - \psi(x)}{\psi(x)\psi(x + \psi(x))}\right) = \exp\left(\frac{\psi'(\theta)}{\psi(x + \psi(x))}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $x < \theta = \theta(x) < x + \psi(x)$. Далее оценим аргумент экспоненты:

$$\frac{\psi'(\theta)}{\psi(x + \psi(x))} = \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{\psi(\theta)}{\psi(x + \psi(x))} > \frac{1}{(x + \psi(x))^2} \cdot \frac{\psi(x)}{\psi(x + \psi(x))}.$$

Поскольку

$$\frac{\psi(x)}{\psi(x + \psi(x))} = \exp\left(-\frac{\psi(x)}{x(x + \psi(x))}\right) \to 1,$$

величина в правой части (3) будет бесконечно большой при $x \to 0$.

Можно также привести контрпример, в котором предел (2) конечен, но не равен единице. Читателю в качестве упражнения предлагается проверить, что предел (2) будет равен числу $e = \exp(1)$ в случае

$$g^{-1}(x) = x - x^2, \quad f^{-1}(x) = x - x^2 - \psi(x).$$

Таким образом, на основе только лишь рис. 1 значение предела (2) в общем случае найти нельзя — требуется дополнительная информация о поведении функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестности точки $x = 0$. Приходится признать, что геометрическое объяснение В. И. Арнольда без сопутствующих аналитических вычислений мало что объясняет. Примерно к такому же выводу постепенно пришли[4] и участники обсуждения задачи о вычислении предела (2) на форуме `https://mathoverflow.net`

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: МЦНМО, 2013.

[2] *Арнольд В. И.* Задача 2 // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 272.

[3] *Арнольд В. И.* Математический тривиум // УМН. 1991. Т. 46, вып. 1(277). С. 225–232.

[4] *Арнольд В. И.* Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения // Квант. 1986. № 2. С. 13–20.

[5] *Кудык Н.* Решение задачи // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 16. М.: МЦНМО, 2012. С. 235–236.

[6] *Пислярук А. В.* Предел-монстр Арнольда // Избранные доклады 60-й университетской научно-технической конференции студентов и молодых учёных. Томск: Изд-во ТГАСУ, 2015. С. 405–408.

[7] *Bényi A., Martin M.* Problem 1672 // Mathematics Magazine. 2004. Vol. 77, № 3. P. 234–235.

[8] `http://dxdy.ru/topic101522.html`

[9] `http://www.turgor.ru/lktg/2011/3/index.php`

[10] `https://mathoverflow.net/questions/20696`

[4] Подробности дискуссии (в ней поучаствовал и такой известный математик, как Теренс Тао) читатель может узнать по ссылке [10]. Вот реплика одного из участников: «На первый взгляд, это прекрасное геометрическое объяснение. К сожалению, я его не понимаю».

Николай Николаевич Осипов,
Сибирский федеральный университет, Красноярск
`nnosipov@rambler.ru`