О правильной раскраске 16-мерной сферы

Данияр Хамидович Муштари

Не существует правильной раскраски 16-мерной [рациональной] сферы в 16 цветов[1)].

Решение. Точкам 16-мерной рациональной [единичной] сферы поставим в соответствие векторы (a_i) с целочисленными координатами или функции с целыми значениями на множестве $\{1, 2, \ldots, 16\}$. Мы считаем, что наибольший общий делитель всех a_i равен 1. Тогда точки единичной рациональной сферы получаются, если разделить все a_i на $\left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2}$, при этом $\sum_i a_i^2$ — квадрат целого числа. Положим[2)] $e_i = I_{\{i\}}$. Раскраска сферы называется *правильной*, если два любых ортогональных вектора имеют разный цвет. Пусть можно правильно раскрасить сферу в 16 цветов. Поскольку все e_i попарно ортогональны, они все покрашены в разные цвета. Будем считать, что вектор e_i имеет цвет i. Цвет произвольного вектора a обозначим через $c(a)$.

Лемма 1. *Рассмотрим элемент* $a=(1,1,\ldots,1)$. *Пусть* $|B|=4$, *и пусть* $c(a) \in B$. *Положим* $b = I_B$. *Тогда* $c(b) = c(a)$.

Доказательство. Рассмотрим четыре ортогональных вектора $b^{(1)} = b, b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)}$, где все координаты векторов $b^{(i)}$ с номерами из B равны ± 1. Пусть $B = \{1, 2, 3, 4\}$, тогда можно положить

$$b^{(1)} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots), \quad b^{(2)} = (1, 1, -1, -1, 0, \ldots),$$
$$b^{(3)} = (1, -1, 1, -1, 0, \ldots), \quad b^{(4)} = (1, -1, -1, 1, 0, \ldots).$$

Перевод неопубликованной заметки Данияра Хамидовича Муштари (1945–2013), написанной на английском языке и предоставленной А. Я. Канель-Беловым. Название дано при публикации. Заметка содержит решение задачи, которая родственна задаче 11.9 из «Математического просвещения». Перевод и примечания Б. Р. Френкина.

1) Определение правильной раскраски см. ниже.

2) Здесь и далее I_M обозначает вектор, координаты которого с номерами из множества M равны 1, а остальные координаты равны 0.

Очевидно, B совпадает[3] с множеством $\{c(b^{(1)}), c(b^{(2)}, c(b^{(3)}), c(b^{(4)})\}$. Но $b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)}$ ортогональны вектору a, поэтому $c(b^{(2)}), c(b^{(3)}), c(b^{(4)}) \neq c(a)$. Значит, $c(b^{(1)}) = c(a)$. □

Лемма 2. *Более общо: если* $a=\{\pm1, \ldots, \pm1\}$, $|B|=4$, $c(a)\in B$, $b=aI_B$[4], *то* $c(b) = c(a)$.

Лемма 3. *Пусть* $a = (a_i)$ *и* $b = (b_i)$ *таковы, что:*

i) $a_i = \pm1$ *для всех* i;

ii) $b_i = \pm1$ *для всех* i;

iii) $|\{i\colon a_i = b_i\}| \geqslant 4$, $|\{i\colon a_i \neq b_i\}| \geqslant 4$.

Тогда если $a_{c(a)}b_{c(a)} = a_{c(b)}b_{c(b)}$, *то* $c(a) = c(b)$.

Доказательство. Пусть для определённости $c(a), c(b) \in \{i\colon a_i = b_i\}$. Выберем такое $B \subset \{i\colon a_i = b_i\}$, что $|B| = 4$, $c(a), c(b) \in B$. Тогда $aI_B = bI_B$, откуда $c(a) = c(aI_B) = c(bI_B) = c(b)$. □

Отсюда вытекает

Лемма 4. *Пусть* a *и* b, *удовлетворяющие условиям* i) *и* ii), *взаимно ортогональны. Тогда их координаты с одним из номеров* $\{c(a), c(b)\}$ *имеют одинаковый знак, а с другим — противоположный.*

Теперь легко определить цвета следующей ортогональной системы $r^{(0)}$, $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, $r^{(1)}r^{(2)}$:

0) $r^{(0)}(i) = 1$ при всех i;

1) $r^{(1)}(i) = 1$ при $i \in [1, 8]$, $r^{(1)}i = -1$ при $i \in [9, 16]$;

2) $r^{(2)}(i) = 1$ для $i \in [1, 4] \cup [9, 12]$, $r^{(2)}(i) = -1$ для $i \in [5, 8] \cup [13, 16]$.

Пусть для определённости $c(r^{(0)}) \in [1, 4]$ и $c(r^{(1)}) \in [9, 12]$[5]. В этом случае $c(r^{(2)}) \in [13, 16]$ и $c(r^{1)}r^{(2)}) \in [5, 8]$. Но тогда мы не сможем раскрасить вектор b, для которого $b(i) = 1$ при $i \in [1, 4]$ и $b(i) = -1$ при $i \in [5, 16]$.

Если $c(b) \in [1, 4]$, то $c(b)$ по лемме 3 должен быть равен одновременно $c(r^{(0)}), c(r^{(1)}), c(r^{(2)}), c(r^{(1)})c(r^{(2)})$, что невозможно.

Если $c(b) \in [5, 8]$, то $c(b)$ и $c(r^{(2)})$ принадлежат множеству [номеров координат, для которых] $\{b = r^{(2)}\}$, откуда $c(b) = c(r^{(2)}) \in [13, 16]$.

Если $c(b)\in[9, 12]$, то $c(b)$ и $c(r^{(1)}r^{(2)})$ принадлежат множеству $\{b=r^{(1)}r^{(2)}\}$, откуда $c(b) = c(r^{(1)}r^{(2)}) \in [5, 8]$.

Если $c(b) \in [13, 16]$, то $c(b)$ и $c(r^{(1)})$ принадлежат множеству $\{b = r^{(1)}\}$, откуда $c(b) = c(r^{(1)}) \in [9, 12]$.

---

[3] Векторы e_j, $j \notin B$, ортогональны векторам b_i, поэтому b_i не могут иметь цвета, не принадлежащие B.

[4] Здесь и далее: если $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, то $xy = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots)$.

[5] Используется лемма 4.