Интересная сумма Гольдбаха

А. В. Крупецков

В этой заметке мы представляем короткое доказательство следующей формулы Гольдбаха, см. [1], а также [2, Formula].

Теорема. *Пусть* $A := \{x^m : x, m \geqslant 2$ *— натуральные числа*$\}$. *Тогда*

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a-1} = 1.$$

Следующая лемма очевидна.

Лемма. *Для любого* $a \in A$ *существует такая единственная пара чисел* $b, k \in \mathbb{N}$, *что* $b \notin A$, $b, k \geqslant 2$ *и* $b^k = a$.

Эта лемма имеется в [3, Comments].

Доказательство теоремы.

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a-1} \overset{(1)}{=} \sum_{b,k \geqslant 2,\, b \notin A} \frac{1}{b^k - 1} \overset{(2)}{=} \sum_{k \geqslant 2} \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^k} \overset{(3)}{=} \sum_{n \geqslant 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Здесь

- (1) следует из леммы.
- (2) верно, потому что для каждого $b, k \geqslant 2$, $b \notin A$

$$\frac{1}{b^k - 1} = \sum_{r \geqslant 1} \frac{1}{b^{rk}} = \frac{1}{b^k} + \sum_{r \geqslant 2} \frac{1}{b^{rk}}.$$

И по лемме при $k = r$ для каждого k

$$\sum_{b \geqslant 2,\, b \notin A} \left(\frac{1}{b^k} + \sum_{r \geqslant 2} \frac{1}{b^{rk}} \right) = \sum_{b \geqslant 2,\, b \notin A} \frac{1}{b^k} + \sum_{a \in A} \frac{1}{a^k} = \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^k}.$$

- (3) верно, потому что для каждого n

$$\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{n^k} = \left(\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{n^k} \right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}. \qquad \square$$

Благодарности

Я хотел бы поблагодарить А. Храброва за подсказку поиска последовательности в [2], А. Скопенкова за помощь в оформлении заметки, а также моего учителя математики Д. Трущина.

Список литературы

[1] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. Задача 9.7. М.: МЦНМО, 2005. С. 224.

[2] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, https://oeis.org/A001597

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, https://oeis.org/A007916

Александр Всеволодович Крупецков, школа № 444 г. Москвы
vfn67@yandex.ru