Решения задач из прошлых выпусков

8.3. Условие. Можно ли круг с двумя дырками отобразить в себя без неподвижных точек? (*М. Л. Концевич*)

Решение. Круг с двумя дырками — это сфера с тремя дырками, ибо круг есть сфера с одной дыркой. Рассмотрим сферу и три дырки с центрами на экваторе, так что поворот вдоль экватора на 120 градусов переводит их друг в друга. Композиция этого поворота с симметрией относительно плоскости экватора не имеет неподвижных точек (*М. Л. Концевич*)

Комментарии 1. Конструкция проходит для любого числа дырок. Для числа дырок, отличного от двух, проходит и другая конструкция, до которой психологически проще додуматься: дырки расположены вдоль кольца и переходят друг в друга при повороте.

2. Если дырок нет, то *теорема Брауэра о неподвижной точке* (верная в любой размерности) утверждает, что *непрерывное отображение шара в себя имеет неподвижную точку.* Если число дырок больше одной и отображение переводит границу каждой дырки в себя, то существует неподвижная точка (а кольцо, т. е. круг с одной дыркой, можно проворачивать без неподвижной точки). Число неподвижных точек симплициального отображения (с учётом кратностей) выражает знаменитая *формула Лефшеца* (см. `https://ru.wikipedia.org/wiki/Число_Лефшеца`). (*А. Я. Канель-Белов*)

8.6. Условие. Внутри единичного квадрата расположено бесконечное множество точек. Всегда ли найдётся гладкая кривая, проходящая через бесконечное его подмножество? А бесконечно гладкая? (*Фольклор*)

Решение. Бесконечное множество точек квадрата имеет предельную точку O. Из данного множества выберем счётную последовательность A_i, сходящуюся к O. Можно считать, что $\forall\, n\ A_n \neq O$.

Положим $\bar{e}_i = \overline{OA}_i/|\overline{OA}_i|$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Поскольку $\bar{e}_i$ принадлежат единичной окружности, из них можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору $\bar{e}$. Векторы $\bar{e}_i$ при больших i попадают в некоторую ε-окрестность вектора $\bar{e}$, в которой можно говорить о том, что один вектор относительно другого расположен либо *по часовой стрелке*, либо *против часовой стрелки*. В какую-то сторону от $\bar{e}$ лежит бесконечное множество $\bar{e}_i$. Дальше рассматриваем только их, причём можно считать, что расстояние между $\bar{e}_i$ и $\bar{e}$ монотонно убывает с ростом i.

Можно также считать, что $|\overline{OA_i}|$ монотонно и достаточно быстро убывает с ростом i. Тогда точки A_i являются вершинами некоторой выпуклой ломаной L. Очевидно, что через вершины выпуклой ломаной можно провести гладкую кривую, причём выпуклую. При $n \to \infty$ единичный касательный вектор к этой кривой стремится к $\bar{e}$, поэтому кривая будет гладкой и в точке O.

Теперь покажем, что бесконечно гладкой (и даже дважды гладкой) кривой может и не быть. Пусть $O = (0, 0)$ — начало декартовой системы координат на плоскости. Рассмотрим множество точек $A_n = (n^{-2}, n^{-3})$, $n \in \mathbb{N}$. Гладкая кривая S, содержащая все A_n, обязана проходить через O по непрерывности. Пусть S дважды гладкая. Её касательная в O направлена по оси OX. Поэтому в некоторой окрестности точки O кривая S — это график дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$. Тогда $f(x) = \frac{1}{2}f''(x_0) \cdot x^2$ для некоторого x_0, где $0 \leqslant x_0 \leqslant x$. Отсюда $f(x) \leqslant Kx^2$ в окрестности точки O для некоторой константы K. Однако $n^{-3} = n \cdot (n^{-2})^2$, противоречие.

Комментарии. 1. Мы доказали, что *из бесконечного множества точек квадрата можно выбрать бесконечное подмножество, лежащее на выпуклой кривой*. Аналогично доказывается, что *из достаточно большого конечного множества точек можно выбрать k, образующие выпуклый k-угольник.* Эти утверждения следуют также из следующей теоремы.

Обобщённая теорема Рамсея. *Пусть дано множество M, все его m-элементные подмножества раскрашены в k цветов, и пусть $\ell \geqslant m$; тогда если k, ℓ, m фиксированы, а множество M достаточно велико, то найдётся ℓ-элементное подмножество, в котором все k-элементные подмножества раскрашены в один цвет. Если же множество M бесконечно (а k, m фиксированы), то в M найдётся и бесконечное подмножество с указанным свойством.*

При $n = 2$ отсюда получается обычная теорема Рамсея для графов: если рёбра полного графа раскрашены в несколько цветов, а число вершин достаточно велико, то найдётся полный подграф из (например) 2018 вершин, все рёбра которого одного цвета.

Покажем, как наше утверждение про точки следует из обобщённой теоремы Рамсея для $m = 4$, $\ell \geqslant 5$. Если четыре отмеченные точки образуют выпуклый четырёхугольник, то назовём эту четвёрку *красной*, а в противном случае — *синей*. При достаточно большом количестве точек в силу обобщённой теоремы Рамсея найдётся либо такой ℓ-угольник, что каждая четвёрка его вершин красная, либо такой, что каждая четвёрка его вершин синяя. Но второй случай невозможен, так как среди пяти точек общего положения на плоскости найдутся четыре, образующие выпуклый четырёхугольник.

2. Рассматривая бесконечно удаляющиеся от начала координат последовательности точек, можно обобщить задачу на произвольные (не обязательно ограниченные) множества точек.

3. Задача и комментарии 1 и 2 обобщаются на пространство любой размерности. (*А. Канель-Белов*)

8.11. Условие. Ряд $\sum a_n$ *сходится в среднем*, если существует предел средних арифметических его частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n}, \quad s_k=\sum_{m=1}^{k} a_k.$$

Пусть ряд $\sum a_n$ сходится в среднем и при этом

а) $a_n = o(1/n)$ (т. е. $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$);

б) $a_n = O(1/n)$ (т. е. $\exists\, C > 0\colon \forall\, n\ |na_n| < C$).

Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится. (*А. Я. Белов*)

Решение. Положим

$$M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k, \quad \alpha=\lim_{n\to\infty} M_n.$$

(а) Поскольку последовательность $\{M_n\}$ сходится, имеем $|M_n| \leqslant M$ для некоторого M. Для любого натурального k существует такое N, что если $n > N$, то $|a_n| \leqslant 1/(k^2 n)$. Следовательно, если $n \leqslant m \leqslant kn$, то

$$|s_m - s_{kn}| \leqslant \frac{1}{k}. \qquad (*)$$

Далее,

$$M_{kn}=\frac{n}{kn}M_n+\frac{1}{kn}(s_{n+1}+\ldots+s_{kn})=\frac{1}{k}M_n+\frac{1}{kn}(s_{n+1}+\ldots+s_{kn}).$$

Отсюда

$$\left|M_{kn}-\frac{k-1}{k}\cdot s_{kn}\right|=\left|\frac{1}{k}M_n+\frac{1}{kn}(s_{n+1}+\ldots+s_{kn})-\frac{kn-n}{kn}s_{kn}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{k}+\left|\frac{1}{kn}\cdot\sum_{m=n+1}^{kn}(s_m-s_{kn})\right|\leqslant\frac{M}{k}+\left|\frac{1}{kn}\cdot\frac{1}{k}(k-1)n\right|\leqslant\frac{M+1}{k}.$$

При достаточно большом n можно сделать M_{kn} сколь угодно близким к α, поэтому при достаточно большом k можно сделать $\frac{k-1}{k} \cdot s_{kn}$ сколь угодно близким к α, а тогда и s_{kn} становится сколь угодно близким к α. В силу $(*)$ величина s_m также становится сколь угодно близкой к α при росте m, что и требовалось.

(б) Сведём п. (б) к п. (а). Для этого достаточно построить такое преобразование исходной последовательности, при котором не затрагивается сходимость s_k и M_k, но величина a_n из $O(n)$ становится $o(n)$.

Главную роль в преобразовании играет добавление нулей. Добавление нуля в позиции n будет означать замену последовательности a_n на последовательность

$$\tilde{a}_1 = a_1,\ \tilde{a}_2 = a_2,\ \tilde{a}_{n-1} = a_{n-1},\ \tilde{a}_n = 0,\ \tilde{a}_{n+1} = a_n,\ \tilde{a}_{n+2} = a_{n+1}, \ldots$$

Теперь посмотрим, меняется ли $\lim\bigl(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\bigr)$ при добавлении нулей в позициях $p, 2p, 3p, \ldots$ (для наглядности можно выбрать какое-то большое p). При большом n величина $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ является взвешенным средним прежней суммы $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} s_k$ (где $m \approx \frac{p-1}{p} n$ и вес близок к $p-1$) и новой суммы $\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} s_{kp}$ (где $\ell \approx n/p$ и вес близок к 1). Первая сумма стремится к α согласно условию задачи. Вторую сумму представим как

$$\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{L} s_{kp} + \frac{1}{\ell}\sum_{k=L+1}^{\ell} s_{kp}$$

для некоторого фиксированного L и устремим ℓ к бесконечности. Первое слагаемое стремится к нулю, а второе приближается к $\frac{1}{\ell p}\sum_{k=Lp+1}^{\ell p} s_k$, поскольку при $|kp-n| < p,\ kp > L,\ n > L$ имеем $|s_{kp} - s_n| < Cp/L$. С другой стороны, величина $\frac{1}{\ell p}\sum_{k=Lp+1}^{\ell p} s_k$ при росте ℓ приближается к α.

Добавление нулей в позициях $p, 2p, 3p, \ldots$ будем называть p-разрежением. Мы показали, что при p-разрежении величина $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ имеет прежний предел. После p-кратного p-разрежения плотность исходной последовательности в полученной равна $(1-1/p)^p$.

Положим $p_n = 10^{10n}$. Произведём p_1 раз p_1-разрежение, затем p_2 раз p_2-разрежение и т. д. Пусть $N > p_{k+1}$. Коэффициент разрежения последовательности на начальном отрезке длины N приближается к e^k при росте k. Поэтому оценка C/n превращается в $|a_n| < C/(e^k n)$, где k — наибольшее такое число, что $N > p_{k+1}$. Но $k \to \infty$ при $n \to \infty$, поэтому в итоге мы получаем $a_n = o(n)$.

С другой стороны, каждый член исходной последовательности сдвигается лишь конечное число раз, поэтому сходимость s_k не меняется. В силу п. (а) предел s_k конечен. (*А. Я. Белов, Л. Радзивиловский*)

10.8. Условие. Можно ли покрасить сферу белой и красной красками так, чтобы любые три исходящих из центра сферы взаимно перпендикулярных луча пересекали её в одной красной и двух белых точках?

(*S. Kochen, M. Specker*)

Ответ. Нет[1)].

Решение. *Реализацией* конечного графа на сфере S^2 назовём такое вложение множества его вершин в S^2, при котором расстояние между концами любого ребра равно $90°$.

Лемма 1. *Пусть α, β — такие точки на S^2, что синус угла между их радиус-векторами содержится в* $[0, 1/3]$. *Тогда существует реализация графа* Γ_1 (см. рис. 1)*, при которой a_0 переходит в α, a_9 в β.*

Доказательство. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — ортогональный репер на S^2. Переведём a_5 в $\bar{x}$, a_6 в $\bar{z}$. Положим далее для некоторых $\xi, \eta \geqslant 0$

$$a_1 \mapsto \frac{\bar{y} + \xi\bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad a_2 \mapsto \frac{\bar{x} + \eta\bar{y}}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

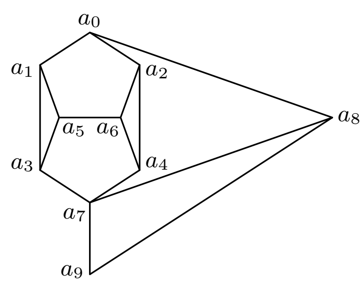

Рис. 1. Граф Γ_1

Тогда образы a_3 и a_4 определяются с точностью до знаков по ортогональности к (a_1, a_5), (a_2, a_6), и мы выберем

$$a_3 \mapsto \frac{\xi\bar{y} - \bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad a_4 \mapsto \frac{\eta\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

Затем аналогично положим

$$a_0 \mapsto \frac{\xi\eta\bar{x} - \xi\bar{y} + \bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2+\xi^2\eta^2}}, \quad a_7 \mapsto \frac{\bar{x} + \eta\bar{y} + \xi\eta\bar{z}}{\sqrt{1+\eta^2+\xi^2\eta^2}},$$

и, наконец, с точностью до знака определяются a_8 и a_9. Синус угла между a_0 и a_9 равен

$$\frac{\xi\eta}{\sqrt{(1+\xi^2+\xi^2\eta^2)(1+\eta^2+\xi^2\eta^2)}}$$

и может принимать все значения между 0 и 1/3. □

Лемма 2. *Рассмотрим граф* Γ_2 (см. рис. 2)*, который получается из картинки отождествлениями вершин $a = p_0$, $b = q_0$, $c = r_0$ (видимые пересечения рёбер внутри окружности не являются вершинами). Этот граф реализуется в S^2.*

[1)] Заметим, что рациональные точки сферы S^2 можно раскрасить таким образом, см. задачу 11.9 и её решение в выпуске 21, с. 278. Родственная задача рассмотрена в заметке Д. Х. Муштари «О правильной раскраске 16-мерной сферы», см. настоящий выпуск, с. 218–219. — *Прим. А. Я. Канель-Белова.*

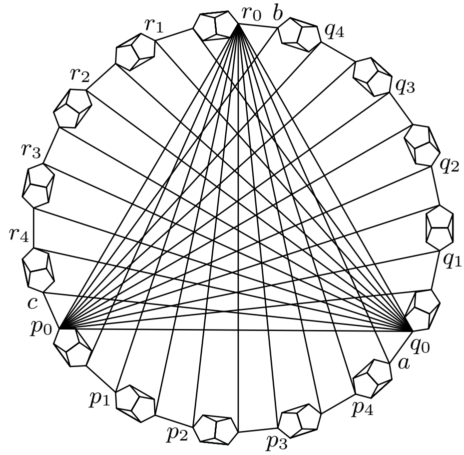

Рис. 2. *Граф* Γ_2

Доказательство. При $0 \leqslant k \leqslant 4$ положим

$$p_k \mapsto \cos\frac{\pi k}{10}\,\bar{x} + \sin\frac{\pi k}{10}\,\bar{y}, \quad q_k \mapsto \cos\frac{\pi k}{10}\,\bar{y} + \sin\frac{\pi k}{10}\,\bar{z}, \quad r_k \mapsto \cos\frac{\pi k}{10}\,\bar{z} + \sin\frac{\pi k}{10}\,\bar{x}.$$

Так как $\sin(\pi/10) < 1/3$, это отображение можно сначала продолжить до реализации подграфа между вершинами p_0, p_1 и r_0, воспользовавшись предыдущей леммой. Вращая полученную реализацию вокруг r_0 так, чтобы пара (p_0, p_1) перешла в (p_1, p_2), (p_2, p_3), $\ldots$, получаем реализацию «нижней дуги» и r_0. Аналогичные вращения вокруг образов p_0, q_0 доставляют реализацию остальных двух дуг.

Рассмотрим произвольное отображение f вершин графа Γ_2 в $\{0, 1\}$. Допустим, что ровно одна вершина каждого треугольника переходит в 1 и хотя бы одна из вершин каждого ребра переходит в 0. Пусть в треугольнике $\{p_0, q_0, r_0\}$ вершина p_0 переходит в 1. Рассмотрим копию графа Γ_1 между вершинами p_0, r_0, p_1, отождествив их с a_0, a_8, a_9 соответственно. Мы должны иметь $f(p_1) = f(a_9) = 1$. Действительно, так как $f(a_0) = 1$, получаем $f(a_8) = 0$. Поэтому если $f(a_9) = 0$, то $f(a_7) = 1$. Тогда $f(a_3) = f(a_4) = 0$. Аналогично $f(a_1) = f(a_2) = 0$. Значит, $f(a_5) = f(a_6) = 1$ — противоречие.

Теперь вернёмся к Γ_2. Используя равенство $f(r_0) = f(p_1) - 1$, аналогично находим $f(p_2) = 1$ и затем $f(p_3) = f(p_4) = f(q_0) = 1$. Но $f(q_0) = 1$ противоречит тому, что $f(p_0) = 1$. Этим завершается доказательство. $\square$

(*По книге Ю. И. Манина «Доказуемое и недоказуемое». М.: Советское радио, 1979. С. 95–97.*)

13.11. Условие. Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не представимо в виде разности $x^2 - y^3$ (x, y — целые). (*Фольклор*)

Решение. Поменяем местами x и y и будем рассматривать уравнение $y^2 = x^3 + a$ с целым параметром a (поскольку это стандартный вид уравнения эллиптической кривой).

Утверждение. *Если целое число t не делится на 3, то $6t^6$ не представимо в виде $y^2 - x^3$.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим рациональные решения уравнения $y^2 = x^3 + 6$. Легко видеть, что $x = r/t^2$, $y = s/t^3$, где r, s, t — целые числа, r, t взаимно просты и s, t также взаимно просты. Уравнение приводится к виду $s^2 = r^3 + 6t^6$, где r, s, $6t$ попарно взаимно просты. В этом случае r и s не делятся на 3. Приведём теперь уравнение к виду

$$r^3 = s^2 - 6t^6 = (s + t^3\sqrt{6})(s - t^3\sqrt{6}).$$

Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ является областью главных идеалов[2)], а множители правой части взаимно просты. Следовательно, существуют целые a и b, для которых $s + t^3\sqrt{6} = (a + b\sqrt{6})^3$ или $s + t^3\sqrt{6} = (5 \pm 2\sqrt{6})(a + b\sqrt{6})^3$. Мы воспользовались тем, что $5 - 2\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^{-1}$ и $5 + 2\sqrt{6}$ порождает группу всех обратимых элементов в $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$. Из второго уравнения получаем с точностью до знака при a: $t^3 = 2a^3 + 36ab^2 + 15b(a^2 + 2b^2)$. Все решения этого уравнения по модулю 9 делятся на 3, что невозможно. Из первого уравнения получаем $t^3 = 3b(a^2 + 2b^2)$, откуда следует, что t должно делиться на 3. Поэтому если t не делится на 3, то уравнение $s^2 = r^3 + 6t^6$ неразрешимо в целых числах. $\square$

Замечание 1. Отметим, что мы использовали только делимость на степени тройки; фактически мы доказали, что уравнение нельзя разрешить в 3-адических числах r, s, t, где t является 3-адической единицей.

Замечание 2. Более развитыми методами можно показать, что уравнение $y^2 = x^3 + 6$ неразрешимо в рациональных числах, поэтому ограничение на t в доказанном утверждении излишне. Известно также, что уравнение $y^2 = y^3 + a$ не имеет рациональных решений для бесконечно многих натуральных a, свободных от квадратов.

(*М. Штолль*)

17.3. Условие. а) На плоскости дано множество M, площадь которого меньше 1, и n точек. Доказать, что множество M можно сдвинуть на вектор, длина которого меньше $\sqrt{n/\pi}$, где $\pi = 3{,}14159\ldots$, так, что множество, полученное в результате сдвига, не будет покрывать ни одной из данных n точек. (*В. А. Сендеров*)

б) (Задача на исследование.) Постарайтесь получить оценки для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

[2)] В этом месте решение неэлементарно, но не исключено, что без этого можно обойтись.

Решение. а) Выберем начало координат O на плоскости. С каждой из точек A_i можно связать множество всех таких точек M_i, что при сдвиге на любой вектор $\vec{v} \in M_i$ множество $M + v$ закроет точку A_i. Легко видеть, что множество M_i получается из M при центральной симметрии относительно A_i и последующем сдвиге на вектор $-A_i$. Поэтому его площадь меньше 1, а площадь объединения всех M_i меньше n.

Теперь рассмотрим круг K с центром O радиуса, меньшего чем $\sqrt{n/\pi}$. Если радиус близок к этой величине, то площадь круга близка к n, и тогда $K \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Значит, K содержит вектор $\vec{v}$, при сдвиге на который M не закрывает ни одну из точек A_i. Длина этого вектора не превосходит радиус круга, т. е. меньше $\sqrt{n/\pi}$.

б) В k-мерном пространстве величина сдвига оценивается как радиус шара объёма n. Беря в качестве M куб, рассматривая клетки решётки, приближающие шар объёма n, и беря в качестве A_i образы узлов этой решётки при центральной симметрии относительно центра M, убеждаемся, что получившаяся оценка при $n \to \infty$ и фиксированном k асимптотически точна. (*А. Я. Канель-Белов*)

Упражнения к задаче 17.3

Упражнение 1. На клетчатой плоскости дана фигура площади меньше 1. Докажите, что эту фигуру можно параллельно перенести так, чтобы внутри неё не оказалось ни одного узла решётки.

Упражнение 2. Дана фигура площади больше натурального числа k. Докажите, что в ней найдутся k точек, разности соответствующих координат которых — целые числа. (*А. Я. Канель-Белов*)

Упражнение 3. Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются по внутренним точкам.
(*В. А. Сендеров, 57-я Московская математическая олимпиада, 1994, 11 класс, задача 4*)

20.10. Условие. Дан многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, e — основание натуральных логарифмов. Докажите, что

$$\max_{x \in [0,1]} |P(x)| > e^{-n}.$$

(*Г. Кош, Международная студенческая олимпиада, 2015*)

Первое решение. Прежде всего отметим, что в силу трансцендентности числа e равенство невозможно.

Предположим, что $\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|=e^{-c^2n}$, где $c>1$. Тогда для любого чётного k имеем

$$e^{-c^2nk}\geqslant\int\limits_0^1 P(x)^k dx\geqslant\frac{1}{L_{nk+1}},$$

где L_m есть наименьшее общее кратное чисел от 1 до n. В этом можно убедиться, раскладывая $P(x)^k$ по степеням x и интегрируя почленно: мы видим, что интеграл положителен и может быть представлен как дробь со знаменателем L_{nk+1}. Поэтому $L_{nk+1}\geqslant e^{c^2nk}$ для всех чётных k. Отсюда следует, что $L_m\geqslant e^{cm}$ для всех достаточно больших m. В самом деле: выберем такое чётное k, что $nk+1\leqslant m\leqslant nk+2n$. Тогда

$$L_m\geqslant L_{nk+1}\geqslant e^{c^2(m-2n)}\geqslant e^{cm}$$

для всех m, превосходящих m_0. Но, как известно, L_m асимптотически растёт как e^m, что следует из закона распределения простых чисел.

Задача решена, но мы хотим теперь обойтись без использования оценки на число простых чисел, меньших n.

Покажем, что для всех достаточно больших N имеет место неравенство

$$N!\geqslant\prod_{k\leqslant N}L_k^{N/(k(k+1))}.$$

В самом деле,

$$\prod_{k\leqslant N}L_k^{N/(k(k+1))}=\prod_{k=1}^{N}L_k^{N/k-N/(k+1)}=$$
$$=L_N^{-N/(N+1)}\prod_{k=2}^{N}\Big(\frac{L_k}{L_{k-1}}\Big)^{N/k}=L_N^{-N/(N+1)}\prod_{p^s\leqslant N<p^{s+1}}p^{N/p^s},$$

где последнее произведение берётся по всем простым $p\leqslant N$. Для каждого простого $p\leqslant N$ рассмотрим такое максимальное s, что $p^s\leqslant N$. Тогда p входит в наше произведение в степени

$$\frac{-sN}{N+1}+\sum_{i=1}^{s}\frac{N}{p^i}=\sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{N}{p^i}-\frac{N}{N+1}\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{s}\frac{N-p^i+1}{p^i}\leqslant\sum_{i=1}^{s}\Big[\frac{N}{p^i}\Big],$$

последнее выражение есть степень, в которой p входит в $N!$. Итак,

$$N^N\geqslant N!\geqslant\prod_{k=1}^{N}L_k^{N/(k(k+1))}\geqslant\prod_{k=m_0}^{N}e^{cN/(k+1)},$$

откуда

$$\ln N \geqslant c \sum_{k=m_0}^{N} \frac{1}{k+1},$$

что при достаточно больших N неверно. (*Ф. В. Петров*)

Второе решение. Достаточно доказать неравенство

$$\int_0^1 \ln|P(x)|\,dx \geqslant -n.$$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни многочлена $P(x)$, а m — его старший коэффициент. Тогда

$$\int_0^1 \ln|P(x)|\,dx = \ln m + \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 \ln|x-\alpha_i|\,dx.$$

Для любого $\alpha \in [0;1]$ имеем

$$\int_0^1 \ln|x-\alpha|\,dx = \int_0^{\alpha} \ln|x-\alpha|\,dx + \int_{\alpha}^1 \ln|x-\alpha|\,dx = \int_0^{\alpha} \ln x\,dx + \int_0^{1-\alpha} \ln x\,dx =$$
$$= \alpha\ln\alpha - \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - (1-\alpha) = \alpha\ln\alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - 1.$$

В частности, при $\alpha = 0, 1$ интеграл равен -1. Значит, если 0 или 1 — корень, то можно разделить $P(x)$ соответственно на x или $x-1$, и обе части неравенства увеличатся на 1. Поэтому дальше можно считать $\alpha \neq 0, 1$.

Лемма. *Для всякого комплексного* $\alpha \neq 0, 1$ *верно неравенство*

$$\int_0^1 \ln|x-\alpha|\,dx \geqslant \frac{\ln|1-\alpha| + \ln|\alpha|}{2} - 1.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in (0;1)$. Положим

$$f(\alpha) := \int_0^1 \ln|x-\alpha|\,dx - \frac{\ln|1-\alpha| + \ln|\alpha|}{2} + 1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\ln\alpha + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ln(1-\alpha).$$

В этой сумме больший из двух логарифмов всегда имеет положительный коэффициент, а меньший — отрицательный, причём эти коэффициенты равны по абсолютной величине. Поэтому $f(\alpha) \geqslant 0$ при $\alpha \in (0;1)$.

Пусть теперь $|\alpha| = R$ — большое положительное число. Тогда

$$f(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln|x-\alpha|\,dx - \frac{\ln|1-\alpha| + \ln|\alpha|}{2} + 1 =$$

$$= \int\limits_0^1 \ln|\alpha|\,dx + O\Big(\frac{1}{R}\Big) - \frac{\ln|\alpha| + \ln|\alpha|}{2} + O\Big(\frac{1}{R}\Big) + 1 \sim O\Big(\frac{1}{R}\Big).$$

Заметим, что $f(\alpha)\to\infty$ при $\alpha\to 0, 1$, а значит, $f(\alpha)>1$ в некоторой ε-окрестности нуля или единицы.

Рассмотрим теперь область $B(0,R)\setminus([0;1]\cup B(0,\varepsilon)\cup B(1,\varepsilon))$, где $B(x,r)$ обозначает круг радиусом r с центром x. Функция $f(\alpha)$ — гармоническая в этой области, включая её границу, поскольку $\ln|\alpha|$ — гармоническая функция на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. По известной теореме $f(\alpha)$достигает минимума на границе указанной области. Но там функция неотрицательна по доказанному выше, поэтому $f(\alpha)\geqslant 0$ во всей области. Объединение таких областей при различных $R>0$ и $\varepsilon>0$ даёт $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Значит, $f(\alpha)\geqslant 0$ для любого комплексного $\alpha\neq 0, 1$. $\square$

Теперь докажем нужное нам неравенство:

$$\ln m + \sum_{i=0}^{n}\int\limits_0^1 \ln|x-\alpha_i|\,dx \geqslant \ln m + \sum_{i=1}^{n}\frac{\ln|1-\alpha_i| + \ln|\alpha_i|}{2} - n =$$

$$= \ln\Big|m\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\Big| + \ln\Big|m\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)\Big| - n = \ln|P(0)| + \ln|P(1)| - n \geqslant -n,$$

что и требовалось (последнее неравенство следует из того, что $P(x)$ имеет целые коэффициенты). (*О. Солан*)

Третье решение (близкое по идеям ко второму). Достаточно показать, что

$$\int\limits_0^1 \ln|P(x)|\,dx \geqslant -n.$$

Пусть 0 и 1 — корни многочлена $P(x)$ кратностей соответственно $k\geqslant 0$ и $m\geqslant 0$. Тогда $P(x) = x^k(1-x)^m q(x)$, где $q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $|q(0)|\geqslant 1$, $|q(1)|\geqslant 1$. Нам нужно доказать, что

$$\int\limits_0^1 \ln|q(x)|\,dx \geqslant k+m-n = -\deg q(x).$$

Более общее неравенство (для всех многочленов q с комплексными коэффициентами) таково:

$$\int\limits_0^1 \ln|q(x)|\,dx \geqslant \frac{\ln|q(0)\cdot q(1)|}{2} - \deg q(x).$$

Разлагая многочлен q на множители $q(x) = C\prod(x-\alpha_i)$, мы сводим задачу к многочлену $q(x) = x - \alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = u + iv$ для $u \leqslant 1/2$, $v \geqslant 0$ (в противном случае достаточно применить преобразования $\alpha \to \overline{\alpha}$, $\alpha \to 1-\alpha$). На отрезке $[0;1]$ при любом α имеем:

$$\int \ln|x-\alpha|\,dx = \int \operatorname{Re}\ln|x-\alpha|\,dx = \operatorname{Re}[(x-\alpha)\ln(x-\alpha)] - x.$$

Поэтому неравенство, которое нам нужно доказать:

$$\int\limits_0^1 \ln|x-\alpha|\,dx \geqslant \frac{\ln|1-\alpha| + \ln|\alpha|}{2} - 1,$$

можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}((1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha\ln(-\alpha)) \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\ln(1-\alpha) + \ln\alpha)$$

или в виде

$$\operatorname{Re}(1-2\alpha)(\ln(1-\alpha) - \ln(-\alpha)) \geqslant 0.$$

Но последнее неравенство вытекает из формул $1-2\alpha=(1-2u)-2iv$, $1-2u\geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и

$$\ln(1-\alpha) - \ln(-\alpha) = \ln\left|\frac{1-\alpha}{\alpha}\right| + i\varphi,$$

где $\varphi \in [0;\pi]$ есть угол между векторами $-\alpha$ и $1-\alpha$ (таким образом, вещественная и мнимая части величины $\ln(1-\alpha) - \ln(-\alpha)$ обе неотрицательны).

(*О. Солан, Ф. Петров*)

Хотя оценка e не точна, удивительно, что совершенно разные подходы приводят к одной и той же константе e! Известно, что наилучшая оценка находится между 0,4213 и 0,4232. (См. *Pritsker I. E.* The Gelfond — Schnirelman method in prime number theory // Canad. J. Math. 2005. Vol. 57. P. 1080–1101.)

21.1. Условие. Какая из двух кривых длиннее:

$$\text{эллипс } \left\{(x,y)\colon \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\right\} \text{ или синусоида } \{(x,\sin(x))\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}?$$

(*Л. Радзивиловский*)

Первое решение. Начертим график синуса на листе бумаги и свернём его в цилиндр радиуса 1, склеивая каждую точку $(0, y)$ с точкой $(2\pi, y)$. Синусоида превратится в эллипс в плоскости, пересекающей цилиндр под углом $45°$. Полуоси этого эллипса равны $\sqrt{2}$ и 1, как в условии задачи. Длина при таком преобразовании сохраняется, поэтому рассматриваемые длины равны.

Второе решение. Можно вычислить длину обеих кривых. Эллипс удобно задать параметрически: $(\sqrt{2}\cos t, \sin t)$. Тогда длина его бесконечно малого участка равна по теореме Пифагора

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2\sin^2 t \cdot dt^2 + \cos^2 t \cdot dt^2} = \sqrt{\sin^2 t + 1} \cdot dt.$$

Следовательно, длина всего эллипса равна $\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 1} \cdot dt$.

Теперь рассмотрим синусоиду. Снова применим теорему Пифагора и выразим длину бесконечно малого участка в виде

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (\cos\ x \cdot dx)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 x} \cdot dx.$$

Длина одной волны синусоиды оказывается равной $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t} \cdot dt$, что очевидно равно предыдущему интегралу (положим $t = x + \pi/2$). Любители анализа могут также записать его в виде эллиптического интеграла второго рода. (*Л. Радзивиловский*)

21.2. Условие. Докажите равенство

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n &- \sum_{j=1}^{n} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_j + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \sum_{j_1 < j_2} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_2} + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \ldots + (-1)^{|J|} \sum_{j_1 < \ldots < j_{|J|}} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \ldots + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n\right) = n! \prod_{i=1}^{n} x_i,\end{aligned}$$

где $\widehat{x}_j$ означает, что соответствующее слагаемое опускается.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Решение 1. Покажем, что получившийся многочлен делится на x_i для произвольного i, тогда он делится на моном $\prod_{i=1}^{n} x_i$, степень которого n. В первом слагаемом оно присутствует с коэффициентом $n!$, а в остальных отсутствует. Поэтому правая часть окажется равной $n! \prod_{i=1}^{n} x_i$.

Для доказательства подставим $x_i = 0$. Тогда каждому слагаемому вида

$$(-1)^{|J|} \sum_{j_\alpha \in J} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \ldots + x_n)^n$$

при $J \not\ni i$ отвечает слагаемое

$$(-1)^{|J'|} \sum_{j_\alpha \in J'} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J'|}} + \ldots + x_n)^n,$$

где $J' = J \cup \{i\}$. При этом $|J'| = |J| + 1$, так что $(-1)^{|J'|} = -(-1)^{|J|}$ и соответствующие члены сократятся, так как $x_i = 0$.

Решение 2. Достаточно показать, что в случае не обязательно коммутирующих переменных имеет место *поляризационное равенство*

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i\Bigr)^n &- \sum_{j=1}^{n} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_j + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \sum_{j_1 < j_2} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_2} + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \ldots + (-1)^{|J|} \sum_{j_1 < \ldots < j_{|J|}} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \ldots + (-1)^{n-1} \Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i^n\Bigr) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},\end{aligned}$$

где S_n — группа всех перестановок на множестве из n элементов. Действительно, можно с каждым слагаемым вида

$$\sum_{j_1 < \ldots < j_{|J|}} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \ldots + x_n)^n$$

связать множество мономов, которые там встречаются, и для подсчёта их общего количества применить формулу включения-исключения. В результате останутся только мономы вида $\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$. В самом деле, в первом члене встречаются все мономы по разу; в членах с $|J| = 1$ встречаются мономы, в которых участвуют не более $n - 1$ переменной; после вычитания по формуле включения-исключения окажется, что мономы, в которых участвуют не более $n - 2$ переменных, вычтены дважды и это нужно скомпенсировать, и т. д.

Замечание. Из поляризационного равенства вытекает следующий факт. Пусть $f(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0$ — тождество в алгебре (вообще говоря, некоммутативной) над ассоциативно-коммутативным кольцом, однородное по совокупности переменных. Тогда в ней выполняется и его полная *линеаризация*: в каждом мономе, содержащем k_i вхождений переменной x_i, каждое вхождение x_i заменяется на вхождение новой переменной $x_{i,j}$, $j = 1, \ldots, k_i$, причём j для разных вхождений выбирается различным, а затем берётся симметрическая сумма по всем перестановкам $\sigma(j)$.

(*А. Я. Канель-Белов*)

21.6(a). Условие (по мотивам задачи М. Патерсон и Д. Стинсона). По кругу стоят n мудрецов, у каждого на голове шапка одного из k цветов. Каждый мудрец видит всех оставшихся. Мудрецы по порядку (по часовой стрелке) говорят либо «пас», либо предполагаемое название своего цвета (в зависимости от того, что они видят и сколько кругов прошло). Все распределения цветов равновероятны. Мудрецы могут заранее согласовать свои ответы. Их цель — чтобы первый, назвавший свой цвет, не ошибся. Какую максимальную вероятность этого они могут обеспечить?

(*И. В. Митрофанов*)

Решение.

Вспомогательная задача. На доску выписываются n-буквенные слова над k-буквенным алфавитом. Очередное слово можно выписать, если существуют $(n-1)$ позиция, в которой это слово не совпадает ни с одним предыдущим. Каково может быть наибольшее число выписанных слов?

Доказательство эквивалентности задачи 21.6(a) и вспомогательной задачи. Всевозможные k^n наборов цветов шапок будем записывать как слова, а все ходы занумеруем натуральными числами. На первом ходу говорит первый мудрец, на втором — второй, на $(n+1)$-м снова первый, и так далее.

Сначала выпишем на доску в произвольном порядке те наборы, на которых мудрецы приходят к успеху на первом ходу, потом — те наборы, на которых мудрецы приходят к успеху на втором ходу, и так далее. Допустим, мудрецов всего 4, и на шестом ходу один из выписанных наборов — это 1123. Это значит, что если второй мудрец видит 1?23, где знак вопроса заменяет цвет его шапки, то он на шестом ходу говорит «1». Очевидно, никакой набор, выписанный после шестого хода, не совпадает с набором 1123 в позициях 1, 3 и 4 сразу. Также понятно, что все наборы, выписанные на шестом ходу (если их несколько), отличаются хотя бы в одной из позиций 1, 3 или 4.

Выписывая числа в обратном порядке, получим последовательность слов, удовлетворяющую условию задачи 2.

Обратно: по последовательности слов понятным образом строится стратегия для мудрецов.

Ответ к вспомогательной задаче: $k^n - (k-1)^n$.

Ответ к задаче 21.6(а): $1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$. □

Решение вспомогательной задачи. Пусть алфавит — это множество $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Пример для $k^n - (k-1)^n$: первым выпишем слово, состоящее из одних единиц. Затем в произвольном порядке — все слова, в которых $n-1$ единиц, потом — все слова, в которых $n-2$ единиц, и так далее. Закончим словами, в которых по одной единице, и невыписанными останутся $(k-1)^n$ слов совсем без единиц. Эта процедура соответствует условию задачи 2. В самом деле, вычеркнем в произвольном выписанном слове некоторую позицию, в которой стоит 1, и вычеркнем эту же позицию в любом из предыдущих слов. Тогда первое из двух полученных слов содержит меньше единиц, чем второе. Обозначим полученное множество слов M.

Оценка. Рассмотрим линейное пространство над $\mathbb{Z}_2$ размерности nk^{n-1}. Каждая координата в этом пространстве обозначается последовательностью длины n, состоящей из одного знака вопроса в произвольной позиции, и символов нашего алфавита на остальных местах.

Каждому из k^n слов длины n из букв алфавита соответствует в этом пространстве вектор, имеющий n единичных координат, а остальные координаты у него нулевые. Например, при $n = 4$ слову 1231 соответствует вектор, у которого четыре ненулевые координаты обозначаются как ?231, 1?31, 12?1, 123?. Вектор, соответствующий слову u, обозначим $V(u)$.

Очевидно, размерность пространства, порождённого $V(M)$, не превосходит $k^n - (k-1)^n$ (на самом деле — равна). Покажем, что для любого слова u вектор $V(u)$ лежит в этом пространстве. В самом деле, если в u есть единица, то это очевидно. Если же нет, то рассмотрим $2^n - 1$ слов, полученных из u заменой части символов на единицы. Вместе с u получается 2^n слов, и на любых $n-1$ позициях все слова повторяются по два раза, поэтому сумма всех соответствующих векторов равна нулю и вектор $V(u)$ является линейной комбинацией остальных.

Вернёмся к нашей задаче. Если на доску выписано больше чем $k^n-(k-1)^n$ слов, то эти векторы линейно зависимы. Значит, есть несколько таких слов, что все подпоследовательности длины $(n-1)$ встречаются в них чётное число раз. А значит, если на доску уже выписаны все эти слова, кроме одного, то ещё одно написать не удастся. (*И. В. Митрофанов*)

21.9. Условие. В выпуклом многограннике M степень каждой вершины равна 5, а у всех граней, кроме, может быть, грани A, число сторон делится на 3. Докажите, что число сторон грани A тоже делится на 3.

(*И. В. Митрофанов*)

Первое решение. Пусть в многограннике M вершина M_1 смежна с вершиной M_2, а M_2 смежна с M_3. Из M_2 выходят 5 рёбер, пронумеруем их по часовой стрелке остатками по модулю 5. Тогда разность номера M_3 и M_1 назовём *числом поворота* ребра M_2M_3 относительно ребра M_1M_2 в точке M_2.

Пусть многогранник N — икосаэдр. В нём степень каждой вершины тоже равна пяти, и можно аналогично определить для любых двух смежных рёбер число поворота. Пусть $M_0, \ldots, M_k$ и $N_0, \ldots, N_k$ — ориентированные пути по рёбрам многогранников M и N соответственно. Будем говорить, что эти пути *локально изоморфны*, если при $i = 1, \ldots, k-1$ число поворота ребра $M_{i+1}M_i$ относительно M_iM_{i-1} в точке M_i совпадает с соответствующим числом для пути по рёбрам N. Легко видеть, что для любого пути по M существует единственный путь по N с фиксированным первым ребром, локально изоморфный ему.

Рассмотрим обход контура грани A против часовой стрелки. Это ориентированный путь, в котором все числа поворота следующего ребра относительно предыдущего равны 1. Любой локально изоморфный ему путь по рёбрам икосаэдра N будет идти по периметру одной из треугольных граней, возможно, обходя её несколько раз. Если число сторон грани A не делится на 3, то путь по икосаэдру будет незамкнутым. Покажем, что это невозможно, доказав следующее утверждение.

Пусть $M_0, \ldots, M_k$ — замкнутый (т. е. $M_0 = M_k$) путь по рёбрам M, не проходящий ни по какой вершине два раза (кроме $M_0 = M_k$). Тогда локально изоморфный ему путь по рёбрам N также замкнут, а его первое и последнее ребро дают такое же число поворота относительно общей вершины, как в первом пути.

Доказательство. Замкнутый путь разбивает поверхность M на две части — содержащую грань A (назовём её внешней) и не содержащую (назовём её внутренней). *Размером* пути будем называть число граней во внутренней части. Проведём индукцию по размеру пути.

База. Пусть размер равен 1, тогда путь — это обход грани в M, отличной от A, число рёбер в нём делится на 3, а все числа поворота — это единицы. Тогда локально изоморфный путь в N — обход какого-то треугольника несколько раз с возвращением в исходную точку.

Переход. Пусть размер пути $M_0, \ldots, M_k$ больше 1. Тогда существует простой путь, лежащий во внутренней части и соединяющий какие-то две его вершины M_i и M_j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Обозначим этот путь P, а пути $M_0 \ldots M_i$, $M_iM_{i+1} \ldots M_j$, $M_j \ldots M_k$ — соответственно P_1, P_2 и P_3. Тогда исходный путь имеет вид $P_1P_2P_3$, и есть два замкнутых пути P_1PP_3 и $P^{-1}P_2$, к которым применимо предположение индукции (минус первая степень обозначает проход в обратном направлении).

Рассмотрим путь $P_1PP^{-1}P_2P_3$ в M и локально изоморфный ему путь $Q_1QQ^{-1}Q_2Q_3$ в N (части Q_i содержат столько же рёбер, сколько пути $P_1, P, \ldots$ соответственно.) Путь $Q^{-1}Q_2$ локально изоморфен пути $P^{-1}P_2$ и по предположению индукции замкнут, значит, можно рассмотреть путь Q_1QQ_3.

Из одной вершины икосаэдра выходят три ребра: конец пути Q_2, конец пути Q и начало пути Q_3. Первое из этих рёбер повёрнуто относительно второго и относительно третьего так же, как соответствующие рёбра в M. Значит, начало Q_3 повёрнуто относительно конца Q так же, как начало P_3 повёрнуто относительно конца P. Следовательно, пути P_1PP_3 и Q_1QQ_3 локально изоморфны. По предположению индукции, путь Q_1QQ_3 замкнут и конец Q_3 повёрнут относительно начала Q_1 так же, как конец пути P_3 относительно начала P_1.

Аналогично доказывается, что начало Q_2 повёрнуто относительно конца Q_1 так же, как начало P_2 повёрнуто относительно конца P_1. Отсюда следует, что замкнутый путь $Q_1Q_2Q_3$ локально изоморфен замкнутому пути $P_1P_2P_3$, ч. т. д. $\square$

(*И. В. Митрофанов*)

Второе решение (набросок). Перейдём к двойственному многограннику. В нём все грани — пятиугольники и степени всех вершин, кроме одной, делятся на три. Нужно доказать, что её степень тоже делится на три.

Приложим наш многогранник к додекаэдру одной гранью, содержащей исключительную вершину, и будем катать додекаэдр по нему. При прокатывании вокруг любой вершины, кроме исключительной, додекаэдр возвращается в исходное положение. Но тогда то же верно при прокатывании вокруг исключительной, так как путь вокруг неё гомотопен композиции путей вокруг остальных. Значит, её степень тоже делится на 3. (Это решение идейно совпадает с предыдущим.) (*И. В. Изместьев*)