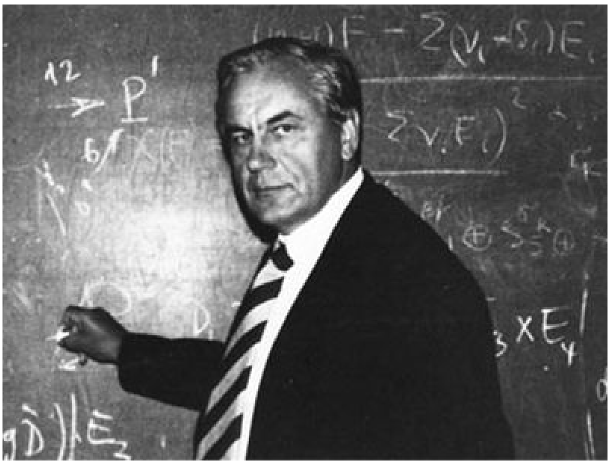
Игорь Ростиславович Шафаревич — великий математик и Учитель

Вик. С. Куликов, Г. Б. Шабат



§ 0. Введение

Авторы этой статьи — уже немолодые математики[1], которым в юности выпало счастье начать профессиональную жизнь под руководством Игоря Ростиславовича Шафаревича. Первые темы исследований, предложенные нам нашим учителем, его идеи, его общее понимание математики, его серьёзность в отношении к научной работе — всё это определило содержание и стиль наших занятий на многие десятилетия. В данной статье мы хотим поделиться с читателем частью того, что вынесли из общения с Игорем Ростиславовичем и из чтения и продумывания написанных им текстов.

Выдающийся математик силён не столько способностью решать задачи, поставленные своими предшественниками, сколько непостижимым

[1] Мы дружим с 1967 года, с тех пор как оказались одноклассниками во *Второй школе* в пору её расцвета.

умением задавать ключевые вопросы; в ходе размышлений над ними его последователи развивают науку. К этому же умению примыкает получение результатов (иногда даже не полностью обоснованных), продумывание и обобщение которых привлекает исследователей последующих поколений и определяет направления развития математики. Великие математики прошлого — Эйлер, Гаусс, Риман, Пуанкаре, Гильберт — в высочайшей степени обладали упомянутыми выше свойствами, и Игорь Ростиславович вполне может быть поставлен в их ряд.

Игорь Ростиславович прожил долгую жизнь. Родившись в 1923 году, он умер совсем недавно, в возрасте 93 лет. Ещё больше впечатляет его профессиональное долгожительство: между первой журнальной публикацией в 1943 году ([4]) и последней в 2013 году ([11]) прошло 70 лет! Статьи посвящены весьма разнообразной тематике, и среди них нет ни одной малозначительной. Сколько-нибудь полный обзор математического наследия Шафаревича невозможен в рамках статьи разумных размеров, да и компетенция авторов вряд ли достаточна для такого обзора. Частичный анализ этого наследия проведён в [24] и [2]. Во вторую часть статьи мы включили несколько математических тем, которые затрагивались при нашем личном общении с ним, о которых можно рассказать достаточно широкому кругу математиков. Мы расскажем о нескольких поставленных им проблемах с весьма ограниченных и личных позиций — с точки зрения двух (из многих) его бывших студентов, получавших от научного руководителя темы для курсовых работ и диссертаций. Это ограничение не является принципиальным — Игорь Ростиславович щедро делился с учениками идеями на любой стадии продумывания и, видимо, не проводил границы между темами «для себя» и «для учеников».

К сожалению, Шафаревич имел возможность реализовывать свои идеи через научное руководство студентами лишь в течение трёх с небольшим десятилетий. Его первым учеником был его студенческий друг, Андрей Иванович Лапин, которого Игорь Ростиславович обогнал в «карьере», закончив мехмат за один год. Последними были авторы настоящей статьи: когда мы в 1974 году заканчивали МГУ, Шафаревич был уволен из МГУ за «антиобщественную» деятельность — он входил в созданный А. Д. Сахаровым Комитет защиты прав человека.

Первая часть статьи содержит наши личные воспоминания о Шафаревиче и о некоторых событиях, связанных с ним, свидетелями или участниками которых мы были. Из-за недостатка места мы в данной статье совершенно не касаемся общественно-политических статей и книг И. Р. Шафаревича (см. [12]) и наших разговоров с ним на эти темы, но общение с ним оказало огромное влияние на наше мировоззрение.

§ 1. Воспоминания

1.1. Шафаревич на мехмате МГУ

Наша студенческая юность, конец шестидесятых — начало семидесятых годов прошлого века, пришлась на разгар *застоя*. Возможности для самореализации у советских людей были весьма ограничены, и уход в науку, в частности в занятия чистой математикой, был одной из них. Утечка мозгов ещё только начиналась[2)]. Советские математики работали на родине, в основном — в нескольких больших городах. Концентрация математиков мирового класса в Москве была уникальной и не сравнимой с другими ведущими математическими державами — например, с Францией или США, где сильные математики были распределены по многим городам. При этом мехмат МГУ был единственным местом в Москве, где студенты получали «чистое» математическое образование. На доске объявлений о спецкурсах и спецсеминарах можно было найти имена Арнольда, Гельфанда, Кириллова, Манина, Синая... — глаза разбегались!

Но и на этом блистательном фоне Игорь Ростиславович был одним из самых «модных» профессоров мехмата. Спецкурсы, читаемые им, собирали полные аудитории. Слушателями этих спецкурсов были не только студенты и аспиранты, но и уже вполне состоявшиеся математики. Лекции Шафаревича отличались прозрачностью и ясностью изложения, обилием неформальных примеров и мотивировок, постепенным переходом от простейших ситуаций к более сложным. На его семинарах разбирались работы любого уровня сложности, и их участники, несмотря на *железный занавес*, не чувствовали себя оторванными от мировой науки.

Особую роль в нашей жизни сыграл спецкурс Шафаревича по теории алгебраических чисел, прочитанный им в 1970 году. Перед нами открывалась бездна классической математики, имена Кронекера, Вебера..., полученные ими фундаментальные результаты и остающиеся открытыми проблемы. Но наибольшее впечатление производил сам лектор, прекрасно владеющий материалом и последовательно, внешне неэмоционально передающий слушателям свою любовь к числам и к структурам, помогающим проникать в их тайны. Мы учились на втором курсе, и нам надо было выбирать научного руководителя; примерно к середине спецкурса сомнения, если и были, то развеялись.

[2)] Она тогда носила гораздо более трагический характер, чем в последующие десятилетия: с уезжающими, например, с нашим замечательным школьным учителем математики И. Х. Сивашинским, прощались навсегда.

1.2. Семинар по алгебраической геометрии

Семинар Шафаревича работал с самого начала шестидесятых годов (и продолжает работу по сегодняшний день, несмотря на уход Игоря Ростиславовича). Обстановка на семинаре была очень демократичной: любой участник, студент он или академик, если что-то не понял или что-то не знал, мог остановить в любой момент докладчика и попросить его пояснить более подробно непонятное место или дать необходимые ссылки.

Семинар работал на мехмате по вторникам на четвёртой паре вплоть до осени 1974 года. Осенью того года работа семинара на мехмате стала невозможной, так как Игорь Ростиславович был уже уволен из МГУ за «антиобщественную» деятельность и каждый раз минут через 15 после начала семинара в аудиторию заглядывал один из заместителей декана (фамилия забыта), прерывал работу семинара и говорил, что Игорь Ростиславович не может находиться в аудитории, так как он уволен. В итоге было решено перенести работу семинара в Стекловку[3], где он существует и по сей день.

В течение нескольких десятилетий мы были участниками этого семинара — слушали чужие доклады, иногда делали свои. Его роль в нашей жизни невозможно переоценить; открытость, уважительное отношение к докладчику в сочетании с требованием *понятности* (Игорь Ростиславович всегда понимал всё) навсегда останутся для нас идеалом сотрудничества математиков разных поколений, интересов и уровней.

Дальше мы будем делиться воспоминаниями по отдельности.

1.3. Воспоминания Куликова

Весной 1971 года, когда надо было выбирать кафедру и научного руководителя, я думал, что попасть в ученики к Шафаревичу будет очень просто, так как в моей «зачётке» были только одни отличные оценки и, кроме того, мой брат Валентин, студент пятого курса, был учеником Игоря Ростиславовича и к тому времени уже был рекомендован им в аспирантуру. Однако всё оказалось не так просто. При встрече Игорь Ростиславович спросил меня, что я знаю из области алгебраической геометрии. На мой ответ, что я слушаю его спецкурс и прочитал первые две главы его книги «Основы алгебраической геометрии», опубликованные в «Успехах математических наук» в 1969 году, он предложил мне сдать экзамен по этим двум главам, который через пару недель я успешно и сдал.

Как научный руководитель, Игорь Ростиславович старался вырастить из своих учеников самостоятельных математиков, способных самим нахо-

[3] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

дить конкретные темы своих исследований. Он никогда не ставил конкретную задачу для курсовых и дипломных работ своим ученикам. Обычно каждый год на протяжении моей учёбы на мехмате мы встречались в начале сентября на кафедре алгебры (ауд. 13-01), я сидел на диване, а он, стоя у небольшой доски, в течение нескольких часов рассказывал о тех теоретико-числовых и алгебро-геометрических проблемах, которые его интересовали в то время. Затем я несколько дней «переваривал» полученную информацию, пытаясь вспомнить всё, о чём рассказывал Игорь Ростиславович. Это было трудно сделать, особенно на третьем курсе, во-первых, из-за недостатка моей «образованности», а во-вторых, его рассказы было практически невозможно конспектировать, сидя на диване. После этих встреч Игорь Ростиславович как бы «забывал» обо мне, но если у меня возникали вопросы или если я хотел сообщить ему о ходе моей работы, то мы по телефону договаривались о встречах, которые затем обычно проходили у него дома. На четвёртом курсе одной из задач, предложенных Игорем Ростиславовичем, была задача исследования свойств $K3$-поверхностей[4]. Результатом моих исследований была курсовая работа, написанная от руки на четырёх листах ученической тетради «в клеточку», в которой доказывалось некоторое утверждение о $K3$-поверхностях. Однако в ночь перед подачей курсовой Игорю Ростиславовичу я заметил, что в доказательстве имеется «дыра», и из-за отсутствия времени переписать текст я только подчеркнул недоказанное место и сделал на полях соответствующую пометку. Через две недели была защита моей курсовой. Рецензентом был А. Н. Тюрин. Мы встретились втроём на кафедре алгебры и «защита» проходила следующим образом. Игорь Ростиславович и я сидели на диване, а Андрей Николаевич, стоя у доски, пытался «заклеить дыру» в моей курсовой. В течение двух часов я убеждал его, что недоказанное утверждение, скорее всего, неверно, и в итоге смог убедить. В результате моя курсовая работа была оценена на «отлично».

Когда в 1974 году встал вопрос о начале времени работы семинара в Стекловке, то было предложено начинать в то же время, что и на мехмате. Однако мне было это крайне неудобно, так как я тогда посещал и семинар В. И. Арнольда по теории особенностей, который тоже работал на мехмате по вторникам на пятой паре. Поэтому участники семинара, соблюдая демократию, решили начинать работу семинара в 11 часов, чтобы я мог успевать на семинар Арнольда. Несколько позже, так как один из активных участников семинара, Ф. А. Богомолов, обычно опаздывал на 15 минут, решили начинать работу семинара в 11:15, а уже в девяностые

[4] Определение $K3$-поверхностей см. в пункте 2.6.

годы было решено начинать в 15:15. Время окончания работы семинара не оговаривалось и зависело от количества материала, который хотел сообщить слушателям докладчик, и от физических возможностей слушателей воспринимать этот материал. Если количество материала было слишком велико, то в семидесятые — восьмидесятые годы прошлого века организовывались выездные сессии либо на даче Ф. А. Богомолова (платформа Семхоз Ярославского направления), либо на даче И. Р. Шафаревича (платформа Турист Савёловского направления).

В конце семидесятых годов в Москву на несколько дней приезжал Д. Мамфорд. Чтобы иметь больше времени для общения с ним, решили отвезти его на дачу Богомолова. Он очень боялся ехать (у него была виза, разрешавшая уезжать из Москвы не далее чем на 20 км, а Семхоз находится на расстоянии в два раза дальше), но мы всё-таки уговорили Мамфорда поехать. Для безопасности одели его в ватник, резиновые сапоги и посоветовали в электричке не разговаривать на английском (русского он не знал), чтобы не привлекать внимания других пассажиров. К сожалению, никто из нас тогда не догадался взять фотоаппарат, чтобы для истории запечатлеть Мамфорда в таком экстравагантном одеянии.

В те же годы мне также пришлось на даче Шафаревича в течение двух дней подробно рассказывать доказательство теоремы о перестройках вырождений $K3$-поверхностей, так как в некоторых работах, появившихся на Западе, утверждалось (безосновательно), что в моём доказательстве якобы имеется какая-то «дыра», и, кроме того, Игоря Ростиславовича очень интересовало, какие из полученных результатов о вырождениях $K3$-поверхностей, определённых над полем комплексных чисел, можно перенести на случай конечной характеристики.

1.4. Воспоминания Шабата

Хотя мой отец и Шафаревич хорошо друг друга знали, моё общение с Игорем Ростиславичем редко выходило за пределы довольно формальных контактов ученика и учителя; тем не менее, я не могу назвать никого другого, кто бы так сильно повлиял на меня.

В феврале 1971 года в возрасте 18 лет я отправился на первую в весеннем семестре лекцию вышеупомянутого спецкурса по алгебраической теории чисел — и вышел с неё с изменившимися взглядами на жизнь. На этой лекции я понял далеко не всё: не хватало математической культуры и базовых знаний. Но у доски я видел не только настоящего мастера, но и человека, *живущего* в мире *настоящей* математики (о внематематической деятельности Игоря Ростиславовича я тогда не знал). До того, поскольку я рос в семье математика, я воспринимал занятия математикой как очень естественный вид творческой деятельности — но лишь один из очень многих возможных; меня в те годы больше всего интересовали литературоведение и театр, и лишь благодаря советской власти я не задумывался о выборе соответствующих профессий. После лекции я уже знал, что постараюсь сделать математику главным делом своей жизни.

Научный руководитель был выбран, и оставалось получить его согласие руководить мной. Опираясь на опыт Куликова, я бегло просмотрел доступную тогда версию «Основ алгебраической геометрии». Затем была назначена встреча с Игорем Ростиславовичем. Но он был совершенно не удовлетворён моими «познаниями»! Так я узнал, что есть огромный разрыв между требованиями мехмата, позволяющими нам, выпускникам Второй школы, без особого труда получать пятёрки, научившись воспроизводить простые доказательства и решать стандартные задачи, — и требованиями Шафаревича. В то лето я впервые по-настоящему напряжённо занимался математикой, прорабатывая «Основы» параграф за параграфом и вдумываясь в многочисленные примеры. Осенью я был вознаграждён за эти труды принятием в ученики Игоря Ростиславовича.

Расскажу ещё об одном эпизоде, связанном с излечением Игорем Ростиславовичем меня от математической поверхностности. На третьем курсе я получил от него задание освоить теорию кэлеровых многообразий по доступному тогда переводу книги А. Вейля. Однажды он спросил меня об успехах, и я с юношеской искренностью пожаловался на то, что в конце книги — *очень громоздкие формулы с тета-функциями*. Игорь Ростиславович смерил меня ледяным взглядом (он вообще не был излишне разговорчив) и переспросил: **«Очень громоздкие?»** Мне стыдно за произнесённую мной глупость до сих пор, но именно со времени того полуминутного разговора я знаю, что тета-функции замечательны и что современный математик должен уметь обращаться с ними не хуже коллег XIX века.

Выбор темы курсовой происходил следующим образом. Игорь Ростиславович спросил меня, что́, помимо алгебраической геометрии, мне нравится в математике. Я ответил, что в топологии мне нравится теория накрытий и, в частности, конструкция универсальных накрывающих — и этот ответ определил тематику моей работы на десяток лет. Игорь Ростиславович предложил мне заняться универсальными накрывающими комплексных алгебраических многообразий; в случае кривых эта теория была построена в XIX веке (Б. Риманом и несколькими его последователями), а в размерностях $\geqslant 2$ были известны лишь разрозненные примеры. (Главное отличие одномерной теории от многомерной заключается в том, что односвязных комплексно-аналитических многообразий в размерности один имеется всего три, тогда как в высших размерностях их класс совершенно необозрим.)

Меня это предложение вполне устроило — возможные трудности в 18 лет не рассматривались.

Игорь Ростиславович привёл класс примеров (симметрические квадраты кривых), в которых[5] происходит явление, невозможное в одномерном случае: *комплексная алгебраическая поверхность восстанавливается по своей универсальной накрывающей*. Мне было предложено выяснить, насколько это явление типично; точнее: со своей непостижимой интуицией Игорь Ростиславович предположил, что оно очень типично, и мне удалось это предположение подтвердить. Соответствующие результаты были опубликованы в [34] и составили содержание моей кандидатской диссертации.

Хотя в этой области осталось много открытых вопросов, интересующих меня и по сей день, в 80-е годы идеи Белого и Гротендика, которые будут упомянуты ниже, увлекли меня настолько, что я сменил тематику. Игорь Ростиславович прочёл нашу с В. А. Воеводским статью [43], являющуюся первой публикацией по теории детских рисунков[6], и одобрил мой выбор. Один комментарий Игоря Ростиславовича (он подчеркнул: *здесь надо рассматривать ВСЕ вложения алгебраического замыкания* $\overline{\mathbb{Q}}$ *поля рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ *в поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$!) на моём докладе на его семинаре об этой теории был очень важен для дальнейших моих работ и работ моих учеников.

В студенческие годы я занимался альпинизмом, и мне посчастливилось однажды участвовать в особом походе альпсекции МГУ — в нём принял участие 80-летний Борис Николаевич Делоне, учитель Игоря Ростиславовича. Он был очень бодр; у костра он, разумеется, был в центре внимания, рассказывая нам разнообразные истории, в основном весёлые. Потом почти все разошлись по палаткам, а Борис Николаевич, узнав, что в походе участвует ученик его любимого ученика, задержался, и в другом, более серьёзном, тоне говорил об Игоре Ростиславовиче — и как о математике, и как о человеке (в том числе — о трудных походах Игоря Ростиславовича). Б. Н. Делоне — автор классических трудов и по геометрии, и по теории чисел, и Игорь Ростиславович продолжал традиции учителя, всю жизнь изучая скрытые связи между разными разделами математики. В ту незабываемую ночь у костра мне было очень важно почувствовать причастность к математической школе двух выдающихся математиков, родившихся в XIX и XX веках и подтверждающих в своих работах *единство мира*. Остаётся пожелать научным «внукам» Игоря Ростиславовича и в XXI веке продолжать развивать его идеи и идеи его предшественников.

[5] За исключением римановой сферы.

[6] Основоположная работа Гротендика [39] не была опубликована до 1997 года.

§ 2. О математическом наследии Шафаревича

2.1. Алгебра и её место среди других разделов математики

При всей широте математических интересов Шафаревич был прежде всего *алгебраистом*. Своё понимание и самой алгебры, и её места среди других разделов математики он с особой ясностью выразил в своей книге [8] «Основные понятия алгебры». Уникален адресат этой книги: её с интересом могут читать и младшекурсники-математики, и учителя математики (которым мы бы это настоятельно порекомендовали), и учёные-нематематики, интересующиеся математикой. Правда, читателям всех этих категорий придётся пропускать некоторые тщательно разобранные примеры, поскольку они адресованы математикам-профессионалам, причём на весьма современном и высоком уровне! Однако читатель любого уровня, прочитавший и продумавший эту книгу, углубит своё понимание алгебры и математики в целом.

Приведём несколько цитат из этой книги:

Что такое алгебра? Является ли она областью математики, методом или психологической установкой?

Алгебра играет приблизительно ту же роль, что и язык или письменность при контакте человека с внешним миром.

Алгебро-геометрический дуализм занимает существенное место в этой книге. При сопоставлении с искусством геометрию можно сравнить с живописью, алгебру — с музыкой.

Любые объекты, являющиеся предметом математического исследования, — кривые и поверхности, отображения, симметрии, кристаллы, квантово-механические величины и т. д. — могут быть «координатизованы» и «измерены». Однако для такой координатизации «обычных» чисел далеко не достаточно.

Одна из целей книги [8] — широкое обсуждение возможностей аксиоматических обобщений понятий числа. Это обсуждение начинается с *теории полей*; в согласии с приведёнными цитатами, эта теория — центральная в алгебре: в ней аксиоматизированы **четыре действия арифметики**.

2.2. Теория полей

В классических полях — таких как поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, поле $\mathbb{R}$ вещественных и поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел — наряду с алгебраическими присутствуют и другие структуры, такие как топология, норма, а в первых двух — порядок. Первая работа Шафаревича [4] была посвящена изучению соотношений между этими дополнительными структурами. Удивительно, что она, опубликованная в 1943 году, была замечена мировым сообществом. В работе [41], опубликованной в 1948 году, известный канадско-американский математик И. Капланский пишет об *элегантном* результате Шафаревича, в котором на основе подходящим образом введённого понятия *ограниченного множества* охарактеризованы топологические поля, допускающие определение топологии через нормирование. В дальнейшем, защитив по этой тематике кандидатскую диссертацию в 19 лет, Игорь Ростиславович к ней не возвращался. Однако в теорию полей он в дальнейшем внёс огромный вклад; отечественное признание и мировую известность Шафаревичу принесли его результаты по *обратной задаче теории Галуа*.

Задача классификации (здесь и далее — с точностью до *изоморфизма*) «разумных» классов полей [7] обладает двумя важными преимуществами по сравнению с задачами классификации многих других алгебраических систем.

Во-первых, все поля из рассматриваемого класса, как правило, вкладываются в некоторое «универсальное» поле (обычно алгебраически замкнутое). Так, все *поля алгебраических чисел*, т. е. *конечные* расширения поля рациональных чисел [8] $\mathbb{Q}$, изоморфны подполям алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ поля $\mathbb{Q}$, а все поля рациональных функций на всех алгебраических кривых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или, что то же самое, поля мероморфных функций на компактных римановых поверхностях) — подполям *поля формальных рядов Пюизо*, т. е. (алгебраически замкнутого) поля [9] $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{C}((z^{1/N}))$, где $\mathbb{C}((u)) := \{\sum_{n\gg-\infty} c_n u^n \mid c_n \in \mathbb{C}\}$, с естественно определяемыми операциями; под $\sum_{n\gg-\infty}$ понимается сумма по всем неотрицательным и конечному множеству отрицательных целых чисел n.

Во-вторых, в любом поле имеется *самое маленькое подполе*, которое можно определить, например, как пересечение всех подполей. Это поле изоморфно одному из полей: $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \ldots, \mathbb{Q}$, где $\mathbb{F}_p$ — поле из простого числа p элементов, т. е. знакомое всем поле вычетов по модулю p.

---

[7] Разумеется, задачи классификации полей реалистичны лишь при каких-либо ограничениях на мощность рассматриваемых полей, на мощность *порождающих* их множеств или на тип расширений.

[8] Конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ состоит из чисел, которые получены из рациональных чисел и корней конечного числа многочленов с рациональными коэффициентами посредством четырёх действий арифметики. Так, например, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

[9] В рамках обсуждаемой ниже аналогии между полем $\mathbb{Q}$ и полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$ полю алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$ соответствует не всё поле формальных рядов Пюизо, а его подполе $\overline{\mathbb{C}(z)}$, состоящее из разложений в ряды Пюизо *алгебраических* (многозначных) «функций» от z, т. е. рядов $w = \sum_{n\gg-\infty} c_n z^{n/N}$, удовлетворяющих соотношениям $F(z, w) = 0$, где $F(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ — это многочлены, степень $\deg_w F$ по w которых больше 1 и $\partial F/\partial z \not\equiv 0$.

В силу приведённых двух замечаний задача классификации полей распадается на различные задачи классификации *промежуточных* полей, т. е. описания (частично упорядоченного включением) множества

$$[\Bbbk, \mathbb{K}] := \{\mathcal{K} \mid \Bbbk \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathbb{K}\}$$

при фиксированной паре полей $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$.

Далее в случае группы автоморфизмов поля $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}\,\mathbb{K}$ будет использоваться стандартное обозначение $\mathbb{K}^\Gamma := \{x \in \mathbb{K} \mid \Gamma \cdot x = \{x\}\}$ для множества элементов поля, неподвижных относительно действия этой группы. Например, $\mathbb{C}^{\{\mathrm{id}_\mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}\}} = \mathbb{R}$.

Если для пары $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$ существует такая группа $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}\,\mathbb{K}$, что $\Bbbk = \mathbb{K}^\Gamma$ (такие расширения называются *нормальными*), то при некоторых дополнительных предположениях описание множества $[\Bbbk, \mathbb{K}]$ почти сводится к описанию подгрупп группы Γ. Точнее, на группе Γ обычно вводится топология (дискретная в случае конечных групп), и речь идёт о *замкнутых* подгруппах.

В любом случае, введя (частично упорядоченное включением) множество подгрупп

$$[\{1\}, \Gamma] := \{\text{замкнутые подгруппы } G \subseteq \Gamma],$$

можно определить (обращающее порядок) *соответствие Галуа*

$$\mathsf{gal}\colon [\{1\}, \Gamma] \longrightarrow [\Bbbk, \mathbb{K}]\colon G \mapsto \mathbb{K}^G,$$

и при упомянутых выше дополнительных предположениях это соответствие является биекцией.

Предположения заведомо выполняются в центральном для теории чисел случае, когда $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}$, и $\Gamma = \mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$. Таким образом, классификация полей алгебраических чисел (и, тем самым, корней многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами) сводится к изучению замкнутых подгрупп конечного индекса одной-единственной группы $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$.

Изучение *всех* расширений данного поля в значительной степени сводится к изучению его *нормальных* расширений. В случае $\Bbbk = \mathbb{Q}$ мы приходим к задаче описания нормальных подгрупп конечного индекса в $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$.

Эта задача называется *обратной задачей теории Галуа*. Она не решена полностью и по сегодняшний день, и именно в неё Шафаревич довольно молодым человеком внёс вклад, поставивший его в ряд ведущих мировых специалистов по алгебраической теории чисел.

Задача имеет две традиционные переформулировки.

- Каковы конечные факторгруппы группы $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$?
- Какие конечные группы реализуются как группы Галуа расширений поля $\mathbb{Q}$?

Предположительный ответ на оба вопроса — *все*. Доказательство этой гипотезы современной математике недоступно, и удаётся продвигаться в ней, лишь постепенно расширяя класс конечных групп, для которых обратная задача теории Галуа разрешима.

В случае *коммутативных групп* положительный ответ был известен уже в девятнадцатом веке. Требуемые поля получаются присоединением к $\mathbb{Q}$ подходящих корней из единицы.

Для *p-групп*, т. е. групп порядка p^k при простом p и натуральном k, положительный ответ был получен Шафаревичем в работе [5]. Работа была удостоена премии Московского математического общества, но это достижение оказалось лишь промежуточным.

Для *разрешимых групп* положительный ответ был получен Шафаревичем в работе [9], удостоенной Ленинской премии [10)].

В связи с теорией Галуа в школе Шафаревича произошло ещё одно весьма важное событие, сыгравшее важную роль в математической жизни одного из авторов (ГШ). А именно, ученик Шафаревича Г. В. Белый в работе [22], посвящённой реализации некоторых серий групп Шевалле как групп Галуа расширений некоторых круговых полей, в качестве вспомогательной леммы привёл замечательный критерий определяемости алгебраической кривой над полем алгебраических чисел: *определённая над $\mathbb{C}$ алгебраическая кривая имеет модель* [11)] *над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде накрытия проективной прямой, разветвлённого всего в трёх точках*. Этот результат произвёл сильнейшее впечатление на А. Гротендика, который использовал его для наглядного описания всех кривых над числовыми полями с помощью вложенных графов, разбивающих компактные ориентированные поверхности на клетки. В «самиздатской» [12)] работе [39] Гротендик назвал такие графы *детскими рисунками*; разумеется, такие объекты под несколькими другими названиями изучались и до него, но Гротендик обнаружил совершенно неожи-

---

10) Существует миф об «ошибке» в статье [9]. Действительно, она содержала не вполне корректную ссылку на работу [33], хотя цитированных результатов из [33] было по существу достаточно для рассуждений в [9]. Однако в работе [6] (написанной Шафаревичем в контакте с Ж.-П. Серром, одним из самых «строгих» математиков своего поколения) все необходимые уточнения были произведены. Удивительно, что и после публикации статьи [6] некоторые авторитетные математики продолжают распространять мнение о том, что в доказательстве теоремы Шафаревича о разрешимых группах что-то не так.

11) Говорят, что алгебраическая кривая *имеет модель над полем* $\Bbbk$ (т. е. *определена над полем* $\Bbbk$), если поле рациональных функций на ней изоморфно полю рациональных функций на неприводимой плоской кривой, заданной уравнением с коэффициентами в $\Bbbk$.

12) Работа [39] была опубликована в 1997 году, через 13 лет после её появления, а до этого циркулировала в виде ксерокопий препринта, в том числе в Москве.

данную *связь* между арифметико-геометрическими и комбинаторно-топологическими объектами — точнее, эквивалентность подходящим образом определённых *категорий* [13].

Эта эквивалентность определяет действие абсолютной группы Галуа $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}})$ на детских рисунках и, таким образом, даёт уникальную возможность *визуализации* абсолютной группы Галуа. Некоторое время после появления теории детских рисунков многие математики надеялись, что с её помощью будет решена обратная задача теории Галуа; однако за прошедшие десятилетия этого не произошло, несмотря на довольно интенсивную работу. По мнению авторов, результаты этой работы показывают, что на данный момент мы научились понимать в комбинаторно-топологических терминах действие лишь весьма специальных и, как правило, небольших групп; для общих же конечных групп требуется дальнейшее развитие теории. С её современным состоянием можно познакомиться по нескольким обзорам, например по [42].

2.3. Числа и функции

Аналогия между числовыми и функциональными кольцами известна с XIX века; Шафаревича эта аналогия вдохновила на первый из результатов, принёсших ему мировое признание и поставивших его в ряд классиков нашей науки.

Хотя речь идёт о весьма продвинутой математике, Игорь Ростиславович умел объяснять фундаментальное сходство между числами и функциями для широкой публики. В книге [8] он пишет: *...Коммутативное кольцо очень часто может быть интерпретировано как кольцо функций на множестве, «точки» которого соответствуют гомоморфизмам исходного кольца в поля. Исходным примером является кольцо $\Bbbk[V]$, где V — аффинное многообразие* [14] *над полем $\Bbbk$, а с него геометрическая интуиция распространяется на более общие кольца. Таким образом, концепция, согласно которой «всякий геометрический объект координатизируем некоторым кольцом функций на нём», дополняется другой, согласно которой «любое кольцо координатизирует какой-то геометрический объект».*

Для Шафаревича приведённая пара концепций играла исключительно важную роль, позволяя как применять интуицию выдающегося алгебраического геометра к трудным теоретико-числовым задачам, так и ставить

[13] Читатели, незнакомые с понятием категории, могут ограничиться представлением о том, что обсуждаемые объекты восстанавливаются друг по другу.

[14] То есть множество решений системы полиномиальных уравнений с коэффициентами из поля $\Bbbk$.

алгебро-геометрические вопросы, отталкиваясь от теоретико-числовых аналогий. Мы здесь ограничимся иллюстрацией лишь одного применения Шафаревичем геометрической интуиции к теории чисел, кратко рассказав об упомянутом выше результате, принёсшем ему мировую известность — обнаружение *общего закона взаимности* в работе [7]; об алгебро-геометрических проблемах теоретико-числового происхождения мы поговорим ниже.

Законы взаимности имеют многовековую историю; они начинались с элементарных, чуть ли не развлекательных (см. название книги [35], первой в европейской теории чисел) арифметических наблюдений, в которых очень трудно было бы увидеть алгебро-геометрическое содержание.

В XVII веке Пьер Ферма интересовался представлением натуральных чисел в виде сумм двух квадратов. Простые делители таких чисел обладают некоторыми бросающимися в глаза свойствами, которые особенно ярко проявляются в важном частном случае (к которому с помощью *гауссовых чисел*, появившихся в XIX веке, сводится общая теория) простых делителей чисел вида n^2+1. Действительно, $1^2+1=2$, $2^2+1=5$, $3^2+1=2\cdot 5$, $4^2+1=17$, $5^2+1=2\cdot 13$ и т. д. — в ряду простых делителей этих чисел встречается только 2 и простые числа, дающие остаток 1 при делении на 4; это было замечено Ферма и век спустя доказано Эйлером. Введя конечные поля $\mathbb{F}_p$, этот факт можно переформулировать так: *уравнение* $x^2=-1$ *разрешимо в поле* $\mathbb{F}_p$ *для простого* p *тогда и только тогда, когда* $p=2$ *или* $p\equiv 1 \mod 4$. С помощью *символа Лежандра*

$$\left(\frac{c}{p}\right) := \begin{cases} 1, & \text{если } x^2=c \text{ разрешимо в } \mathbb{F}_p,\\ -1, & \text{если } x^2=c \text{ неразрешимо в } \mathbb{F}_p,\end{cases}$$

наблюдение Ферма можно сформулировать для нечётного простого p в виде

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2};$$

в последующие столетия эта формула неуклонно обобщалась.

Квадратичный *закон взаимности* устанавливает далеко не очевидную связь между $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$: как заметил Эйлер и доказал Гаусс [15)], для нечётных простых p и q

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Этот результат можно интерпретировать как связь между разложимостью многочлена x^2-p в поле $\mathbb{F}_q$ и разложимостью x^2-q в поле $\mathbb{F}_p$ (разумеется,

---

[15)] Точнее, Гаусс, называвший квадратичный закон взаимности *золотой теоремой*, в течение своей долгой жизни привёл 8 существенно разных доказательств.

в обоих случаях имеются в виду редукции многочленов по соответствующим модулям). В такой форме закон взаимности был распространён на некоторые многочлены 3-й и 4-й степени самим Гауссом и Эйзенштейном, а на циклотомические многочлены — Куммером. Сравнительно современный обзор соответствующих результатов можно найти в [47].

В дальнейшем выяснилось, что для получения обобщённых законов взаимности важны не столько многочлены, сколько расширения поля $\mathbb{Q}$, получаемые присоединением их корней; существенным ограничением, не преодолённым и на сегодняшний день, оказалось условие *абелевости* этих расширений, т. е. коммутативности соответствующих групп Галуа. Именно в этом контексте работа И. Р. Шафаревича [7] завершила трёхвековой цикл исследований выдающихся математиков.

Квадратичный закон взаимности оказался частным случаем общего, при $n=2$, а поле $\mathbb{Q}$ оказалось возможным заменить на поле алгебраических чисел Ω, содержащее все корни n-й степени из единицы. Символ Лежандра $\left(\dfrac{p}{q}\right)$, принимающий значения ± 1, стал интерпретироваться (при переходе от уравнений вида $x^2=c$ к уравнениям вида $ax^2+by^2=1$) как частный случай *символа норменного вычета* $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$, определённого для $\alpha,\beta\in\Omega$ и для простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца целых поля Ω и принимающего значения в группе корней n-й степени из 1. Центральным результатом теории[16] является *формула произведения*

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)=1,$$

и именно в её осознании сходство между числами и функциями играет решающую роль[17]. Как пишет сам Шафаревич в [7], *идея о глубокой аналогии между полями алгебраических чисел и полями алгебраических функций была подготовлена работами Гаусса и Куммера и впервые вы-*

[16] Даже понимание точных *формулировок* упомянутых результатов требует довольно глубоких знаний алгебраической теории чисел; обзор для неспециалистов можно найти в [45]. Современное изложение теории см. в [31].

[17] При $\Omega=\mathbb{Q}$ и $n=2$ символ норменного вычета превращается в *символ Гильберта*, который определяется формулой

$$(a,b)_p:=\begin{cases}\ \ 1, & \text{если уравнение } ax^2+by^2=1 \text{ разрешимо в } \mathbb{Q}_p,\\ -1 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Для $a,b\in\mathbb{Q}^\times$ формула произведения принимает вид $\prod_p(a,b)_p=1$, где произведение берётся по множеству простых чисел p, к которому добавлен символ ∞ (подразумевается $\mathbb{Q}_\infty:=\mathbb{R}$); произведение имеет смысл, поскольку в нём лишь конечное число сомножителей отлично от 1.

сказана, видимо, Кронекером. Было замечено, что простые идеалы в теории алгебраических чисел играют такую же роль, как точки римановых поверхностей в полях алгебраических функций, простым делителям дискриминанта соответствуют точки ветвления римановой поверхности и т. д. Далее Шафаревич пишет о желательности перенесения в теорию алгебраических чисел результатов теории абелевых интегралов и чуть-чуть «поправляет» Гильберта, указав, что формула произведения *является аналогом не интегральной формулы Коши, а теоремы... о сумме вычетов абелева дифференциала*. Это простое замечание приводит Шафаревича к одной из ключевых идей работы:

символ норменного вычета $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ *аналогичен вычету абелева дифференциала* $\alpha \cdot \mathrm{d}\beta$ *в точке* $\mathfrak{p}$.

Работа [7] обладает характерным для наиболее известных работ Шафаревича свойством: завершая некоторый этап классических исследований, она содержит понятия и идеи, которые будут развиваться многими математиками в работах будущего.

2.4. Теоремы конечности

В рамках аналогии, которой был посвящён предыдущий раздел, Игорь Ростиславич в [10] сформулировал алгебро-геометрический аналог теоремы Эрмита [40], утверждающей конечность числа полей алгебраических чисел с заданным дискриминантом (современное доказательство см. в [23]). Формулировка Шафаревича в [10] такова: *Конечно ли число расслоений*[18] *на кривые рода* $g > 1$, *если фиксирована базисная кривая и множество критических точек расслоения?* (В дальнейшем эти точки будут называться точками *плохой редукции*). Шафаревич получил утвердительный ответ на свой вопрос в некоторых частных случаях и отметил, что *доказательство в общем случае должно быть значительно труднее... аналогично тому как конечность числа расширений с заданными точками ветвления поля алгебраических чисел доказывается гораздо труднее, чем теорема Эрмита в теории алгебраических чисел* — мы видим аналогию между числами и функциями в действии! Предположение оказалось правильным: гипотеза была доказана лишь два десятилетия спустя в результате напряжённой работы ряда выдающихся математиков, многие из которых принадлежали к школе Шафаревича.

Гипотеза Шафаревича сыграла решающую роль в доказательстве *гипотезы Морделла* — одном из центральных результатов математики два-

[18] Здесь исключаются из рассмотрения *изотривиальные семейства*, т. е. становящиеся тривиальными после подъёма на конечное накрытие базы.

дцатого века, сформулированной Л. Морделлом в 1922 году и доказанной Г. Фальтингсом в 1983 году. Гипотеза формулируется просто: *пусть дана произвольная алгебраическая кривая над числовым полем*; *если её род равен* 1, *то группа рациональных точек на ней конечно порождена*, *а если её род больше* 1, *то множество рациональных точек на ней конечно*. Однако доказательство гипотезы Шафаревича растянулось на два десятилетия и потребовало огромных усилий, а также развития многих понятий, которые оказались важны и полезны сами по себе.

Почти одновременно с [10] появилась работа [30] одного из первых учеников Шафаревича Ю. И. Манина, в ней был установлен *функциональный аналог* гипотезы Морделла; хотя напрямую в доказательстве гипотезы Морделла этот результат не использовался, психологически он был очень важен: после довольно продолжительного затишья стали появляться недоступные ранее теоремы конечности; кроме того, это был один из первых результатов несомненно мирового класса, полученных в Москве учениками Шафаревича.

Далее ученик Шафаревича А. Н. Паршин в [32] доказал, что гипотеза Морделла вытекает из гипотезы Шафаревича; для этого он изобрёл так называемый трюк Паршина, состоящий в построении (с помощью остроумной геометрической конструкции) по каждой рациональной точке кривой рода $\geqslant 2$ над полем алгебраических чисел другой кривой над расширением этого поля[19]. Род этой новой кривой существенно больше исходного, а множество *простых чисел плохой редукции* (это и есть числовой аналог *критических точек* в формулировке Шафаревича) контролируется. Некоторые геометрические соображения вместе с *теоремой де Франкиса* о конечности множества непостоянных отображений любой кривой в кривую рода $\geqslant 2$ позволяют свести одну гипотезу к другой.

Существенный вклад в доказательство гипотезы Морделла внесли ученик Шафаревича С. Ю. Аракелов ([21]) и ученик Манина Ю. Г. Зархин ([25]); их идеи и конструкции слишком специальны, чтобы обсуждать их здесь; отметим лишь, что заложенная в работе [21] *геометрия Аракелова* — огромный раздел современной математики, вышедший далеко за пределы решённых в этой работе задач.

Наконец, сильнейшее средство изучения арифметики и геометрии алгебраических кривых ввёл американский математик Дж. Тейт[20]. *Модуль*

[19] Если дана кривая $\mathbf{X}$ над числовым полем $\mathbb{K}$ и точка $P \in \mathbf{X}(\mathbb{K})$, то сначала строится накрытие $\alpha\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ по подгруппе $\ker\bigl(\pi_1(\mathbf{X} \setminus \{P\}) \to \mathrm{H}_1(\mathbf{X} \setminus \{P\}, \mathbb{F}_2)\bigr)$, а затем накрытие $\mathbf{X}' \to \mathbf{Y}$ по подгруппе $\ker\bigl(\pi_1(\mathbf{Y} \setminus \alpha^{-1}(P)) \to \mathrm{H}_1(\mathbf{Y} \setminus \alpha^{-1}(P), \mathbb{F}_2)\bigr)$.

[20] Соавтор Шафаревича — они опубликовали в 1967 работу [19] в «Докладах Академии Наук СССР». Группа *Тейта — Шафаревича* эллиптической кривой $\mathbf{E}$ на всех языках обозначается Ш$(\mathbf{E})$.

Тейта абстрактной кривой [44] извлекается из якобиана этой кривой и представляет собой конечнопорожденный модуль над кольцом ℓ-адических чисел. Он отчасти играет роль первых гомологий римановой поверхности, но несёт в себе гораздо больше информации о кривой — на нём определено действие группы Галуа поля определения кривой.

Г. Фальтингс в статье [38] завершил работу своих предшественников. Он доказал теорему о полупростоте действия группы Галуа на модуле Тейта, ещё одну (несколько более техническую) теорему и — главное для нас — гипотезу конечности Шафаревича. Для вывода гипотезы Морделла из этих результатов всё уже было подготовлено.

Так завершился примерно двадцатилетний период математики прошлого века, начавшийся с работ И. Р. Шафаревича и Ю. И. Манина. Исследования продолжаются: изучаются количественные и алгоритмические проблемы диофантовой геометрии, ищутся многомерные обобщения и т. д.

2.5. Классическая алгебраическая геометрия

Классификация гладких проективных алгебраических[21)] кривых была получена к середине XIX века благодаря работам Римана, Клебша, М. Нётера, Бриля и др. Проективные кривые распадаются на три класса в зависимости от числа g линейно независимых регулярных дифференциальных 1-форм на них (*рода* кривой): $g = 0$, $g = 1$ и $g > 1$. С точностью до изоморфизма имеется единственная кривая рода $g=0$ — это проективная прямая $\mathbb{P}^1$ (*рациональная* кривая). Кривые рода $g = 1$ — это *эллиптические кривые*, т. е. кривые, на которых существует единственная с точностью до умножения на константу регулярная нигде не обращающаяся в нуль дифференциальная 1-форма. С точностью до изоморфизма эллиптические кривые образуют одномерное семейство и могут быть заданы однородным уравнением третьей степени в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Для каждого $g>1$ кривые рода g зависят от $3g - 3$ параметров (так называемых *модулей*). Кривые рода $g = 2$ могут быть представлены в виде двулистного накрытия проективной прямой $\mathbb{P}^1$, разветвлённого в шести точках (другими словами, эти кривые бирационально изоморфны кривым в $\mathbb{C}^2$, заданным уравнениями вида $w^2 = f(z)$, где $f(z)$ — это многочлены степени шесть без кратных корней), а при $g > 2$ это либо также двулистные накрытия проективной прямой $\mathbb{P}^1$, разветвлённые в $2g + 2$ точках, либо с точностью до проективного преобразования это кривые степени $2g - 2$, вложенные в проективное

21) Алгебраическое многообразие называется *проективным,* если при некотором $n > 1$ оно может быть задано как множество в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ решений системы однородных полиномиальных уравнений от n переменных.

пространство $\mathbb{P}^{g-1}$ с помощью дифференциальных 1-форм на этих кривых. Для каждой кривой рода $g > 1$ регулярные сечения кратного канонического класса mK (т. е. дифференциальные формы вида $f(\mathrm{d}z)^m$) при $m \geqslant 2$ (если $g = 2$, то $m \geqslant 3$) задают вложение кривой в $\mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)}$.

В конце девятнадцатого — начале двадцатого веков благодаря работам Клебша, Нётера, Пуанкаре, а также блестящей плеяды итальянских алгебраических геометров: Кремоны, Сегре, Бертини, Кастельнуово, Энриквеса, Севери и др. — была получена классификация алгебраических поверхностей, основные положения которой были изложены в книге [36] Энриквеса. Основным инвариантом в этой классификации является $\varkappa$ — максимум размерности образов поверхности X при её отображениях в проективные пространства, задаваемых регулярными сечениями кратных канонических классов mK_X (т. е. дифференциальными формами вида $f \cdot (\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2)^m$). Инвариант $\varkappa$ может принимать следующие значения: $-1, 0, 1, 2$ ($\varkappa = -1$, если для любого $m > 0$ кратный канонический класс mK_X не имеет регулярных нетривиальных сечений). После этого в классификации для каждого значения $\varkappa$ даётся характеристика поверхностей с данным значением $\varkappa$ в терминах так называемых численных инвариантов (индекса самопересечения канонического класса K_X, кратных родов P_m, равных размерностям пространств регулярных сечений кратных канонических классов mK, и иррегулярности q, равной размерности пространства регулярных дифференциальных 1-форм на X), и даётся конструктивное описание таких поверхностей. Так, например, поверхности с $\varkappa = -1$ — это рациональные поверхности (т. е. поверхности, бирационально изоморфные проективной плоскости) и иррегулярные линейчатые поверхности (т. е. поверхности, расслоённые на рациональные кривые над кривой положительного рода).

Следует отметить, что доказательства многих утверждений, содержащихся в [36] неполны, по обычаям того времени Энриквес часто ограничивается рассмотрением «общего» случая, не разбирая наиболее неприятные случаи, которые могут представиться.

В 1961–1963 годах на семинаре по алгебраической геометрии, работавшем на мехмате в МГУ, И. Р. Шафаревич совместно со своими учениками Б. Г. Авербухом, Ю. Р. Вайнбергом, А. Б. Жижченко, Ю. И. Маниным, Б. Г. Мойшезоном, Г. Н. Тюриной и А. Н. Тюриным разбирали результаты по теории алгебраических поверхностей, полученные итальянской школой. Итогом этой работы стало написание книги [20], в которой даны строгие (основанные на появившейся в то время теории когерентных пучков и теории Ходжа) доказательства основных положений классификации алгебраических поверхностей, а также доказательство теоремы М. Нётера о структуре группы всех бирациональных преобразований проективной плоскости, изложены теория бирациональных преобразований поверхностей и теория минимальных моделей. Кроме этого, в [20] был изложен и ряд оригинальных результатов, относящихся к теории поверхностей с пучком эллиптических кривых и теории $K3$-поверхностей. Книга [20] стала настольной книгой для целого поколения алгебраических геометров. Она оказала большое влияние на дальнейшие исследования алгебраических поверхностей во всём мире и долгое время служила единственным систематическим изложением теории поверхностей, соединив красоту классических геометрических методов итальянской школы с мощью новейших аналитических и топологических методов.

2.6. Теорема Торелли для $K3$-поверхностей

Один из важнейших и интереснейших классов алгебраических поверхностей, исследованию свойств которого, начиная с Куммера, уделяли огромное внимание (и уделяют до сих пор) многие выдающиеся алгебраические геометры, в том числе и И. Р. Шафаревич, — это поверхности типа $K3$ (названные так в честь Куммера, Кэлера и Кодаиры). По определению, гладкая комплексная компактная односвязная поверхность X, на которой существует нигде не обращающаяся в нуль голоморфная 2-форма ω, называется поверхностью типа $K3$ (или просто $K3$-поверхностью). Примерами $K3$-поверхностей являются гладкие квартики в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, гладкие пересечения квадрики и кубики в $\mathbb{P}^4$ и гладкие пересечения трёх квадрик в $\mathbb{P}^5$. Ещё одним важным примером $K3$-поверхностей являются *куммеровы поверхности* — комплексные поверхности, которые получаются в результате разрешения шестнадцати особых точек фактора двумерной абелевой поверхности (двумерного комплексного тора) по действию инволюции $x \mapsto -x$.

Прежде чем сформулировать теорему Торелли для $K3$-поверхностей, напомним классическую теорему Торелли для алгебраических кривых. Как хорошо известно, с топологической точки зрения неособая проективная кривая C рода g, определённая над полем $\mathbb{C}$, — это двумерная сфера с g «ручками». Поэтому первая группа гомологий $H_1(C,\mathbb{Z})$ — это свободная абелева группа ранга $2g$. На $H_1(C,\mathbb{Z})$ определена унимодулярная кососимметрическая билинейная целочисленная форма

$$(\cdot,\cdot)\colon H_1(C,\mathbb{Z})\times H_1(C,\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$$

(индекс пересечения одномерных циклов), относительно которой можно выбрать базис в $H_1(C,\mathbb{Z})$, состоящий из «меридианов» $\gamma_1,\dots,\gamma_g$ и «параллелей» $\gamma_{g+1},\dots,\gamma_{2g}$, т. е. из таких элементов, что $(\gamma_i,\gamma_{g+i})=1$ для

$i = 1, \ldots, g$ и $(\gamma_i, \gamma_j) = 0$, если $|i - j| \neq g$. Если также выбран базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$ пространства одномерных голоморфных форм на кривой C, то $(2g \times g)$-матрица

$$\Omega(C) = \Bigl(\int\limits_{\gamma_i} \omega_j\Bigr)$$

называется *матрицей периодов* кривой C. Классическая теорема Торелли ([46]) гласит, что две кривые C_1 и C_2 изоморфны тогда и только тогда, когда на C_1 и C_2 можно выбрать такие базисы пространств одномерных голоморфных форм, что $\Omega(C_1) = \Omega(C_2)$.

Классическая теорема Торелли даёт ключ к исследованию пространств модулей кривых рода g. Аналоги этой теоремы, в которых утверждается, что многообразия, принадлежащие к некоторому классу алгебраических многообразий, однозначно определяются матрицами периодов базиса пространства дифференциальных (p, q)-форм на этих многообразиях (рассматриваемыми с точностью до некоторой эквивалентности), играют ту же роль в многомерной геометрии, что и классическая теорема Торелли, и также называются *теоремами Торелли.*

Вернёмся к $K3$-поверхностям. Как известно, все $K3$-поверхности, как вещественные четырёхмерные многообразия, диффеоморфны друг другу (Кодаира). Индекс пересечения во второй группе гомологий $H_X = H_2(X, \mathbb{Z})$ $K3$-поверхности X определяет на H_X такое целочисленное скалярное произведение, что скалярный квадрат любого элемента $\gamma \in H_X$ чётен, его определитель Грама равен -1 и сигнатура псевдоевклидова пространства $H_X \otimes \mathbb{R}$ равна $(3, 19)$. Как известно, решётка, т. е. свободная абелева группа H, на которой определено целочисленное скалярное произведение, обладающее перечисленными свойствами, определяется однозначно с точностью до изоморфизма этими свойствами.

В [14] Шафаревичем было введено понятие отмеченной $K3$-поверхности типа l. Зафиксируем в H элемент l, $l^2 > 0$. По определению, *отмеченной $K3$-поверхностью* называется тройка (X, φ, ξ), где $\varphi\colon H_X \to H$ — изоморфизм евклидовых решёток и $\xi \in H_X$ — такой класс гиперплоского сечения $K3$-поверхности X (т.е. поверхность X рассматривается вместе с некоторым её вложением в проективное пространство), что $\varphi(\xi) = l$.

Пусть $E = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C})$ — множество линейных функций на H со значениями в $\mathbb{C}$. Скалярному произведению в H соответствует скалярное произведение в E, $\omega_1 \cdot \omega_2 \in \mathbb{C}$ для $\omega_1, \omega_2 \in E$. Пусть $\mathbb{P}^{21} = \mathbb{P}(E)$ — проективизация векторного пространства E над полем $\mathbb{C}$, и пусть

$$K_{20} = \{\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}^{21}\colon \omega^2 = 0\} \quad \text{и} \quad K_{20}^0 = \{\mathbb{C}\omega \in K_{20}\colon \omega \cdot \bar{\omega} > 0\}.$$

Элемент $l \in H$ определяет гиперповерхность (обозначим её той же буквой) $l = \{\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}^{21} : \omega(l) = 0\}$. Комплексное многообразие $D_l = K_{20}^0 \cap l$ называется *пространством периодов отмеченных* $K3$*-поверхностей типа* l. Каждая отмеченная $K3$-поверхность X типа l определяет точку $\tau(X) \in D_l$ следующим образом. На $K3$-поверхности X существует единственная с точностью до умножения на константу голоморфная форма

$$\omega \in H^{2,0}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C}).$$

Композиция

$$H \xrightarrow{\varphi^{-1}} H_X \xrightarrow{\omega} \mathbb{C}$$

определяет точку в $K_{20} \subset \mathbb{P}^{21} = \mathbb{P}(E)$, где

$$\omega(\lambda) = \int_{\lambda} \omega \quad \text{для } \lambda \in H_2(X, \mathbb{Z}).$$

Так как ξ — алгебраический класс, имеем $\omega(\xi) = 0$ и, следовательно, эта точка лежит в D_l. Получаем *отображение периодов* τ из множества отмеченных $K3$-поверхностей типа l в D_l.

В [14] И. Р. Шафаревич и И. И. Пятецкий-Шапиро доказали теорему Торелли для отмеченных $K3$-поверхностей. А именно, ими было доказано, что существует семейство $\mathcal{X} \to S$ отмеченных $K3$-поверхностей[22)], содержащее (с точностью до изоморфизма) все отмеченные $K3$-поверхности типа l, $\dim S = 19$, отображение периодов $\tau\colon S \to D_l$ инъективно и $\tau(S)$ является открытым всюду плотным множеством в D_l. Доказательство этой теоремы основано на доказанной ранее участницей семинара Шафаревича по алгебраической геометрии Г. Н. Тюриной локальной теореме Торелли для $K3$-поверхностей, утверждающей, что дифференциал отображения периодов τ невырожден (см. [20]), а также на детальном исследовании периодов отмеченных куммеровых поверхностей. В кандидатской диссертации одного из авторов этой статьи (см. [26] и [29]), написанной под руководством Шафаревича, была получена классификация полустабильных вырождений комплексных $K3$-поверхностей, из которой следовала эпиморфность отображения периодов τ для отмеченных $K3$-поверхностей. Впоследствии Шафаревич уделил большое внимание исследованию вырождений $K3$-поверхностей, определённых над полями конечной характеристики (см. [17, 18]).

[22)] То есть слои X_s голоморфного отображения $\mathcal{X} \to S$ над точками $s \in S$ — это отмеченные $K3$-поверхности типа l.

2.7. Бесконечномерные алгебраические многообразия

Конечно, Игорю Ростиславовичу на протяжении его долгой жизни удалось решить не все математические проблемы, которые вызывали у него интерес. Тем не менее, его идеи и подходы к решению этих проблем имеют большую самостоятельную ценность и могут быть применены к решению многих других задач. Одной из таких проблем является так называемая *проблема якобиана*, которая состоит в следующем. Пусть якобиан

$$J(F) = \det\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)$$

полиномиального отображения

$$F = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$$

аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в себя, определённого над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль, нигде не обращается в нуль. Легко видеть, что тогда $J(F) \in \Bbbk^*$, т. е. является ненулевой константой. *Верно ли, что в этом случае отображение F обратимо, т. е. является изоморфизмом аффинных пространств?*

Очевидно, что проблема якобиана имеет положительное решение при $n = 1$. Также легко видеть, что её аналоги имеют отрицательное решение в случае, когда $\Bbbk$ является полем положительной характеристики p (пример: $F = (x + x^p)\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$) и в случае, когда F задано целыми аналитическими функциями (пример: $F = (xe^y, e^{-y})\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$).

Впервые проблема якобиана была сформулирована в 1939 году Келлером (O.-H. Keller). Ввиду простоты формулировки эта проблема привлекала (и привлекает до сих пор) внимание огромного числа математиков, однако она остаётся открытой для $n \geqslant 2$.

Размышляя над проблемой якобиана, Шафаревич предложил рассматривать не отдельные отображения $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ с якобианом $J(F) \in \Bbbk^*$, а сразу всю полугруппу эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ пространства $\mathbb{A}^n$ с якобианами $J(F) = c \in \Bbbk^*$ и естественное вложение группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ пространства $\mathbb{A}^n$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$. Для этого он в [13] ввёл понятия бесконечномерных алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$ как индуктивных пределов X направленных систем $\{X_i, f_{i,j}\}$ алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$, причём морфизмы $f_{i,j}\colon X_i \to X_j$, $i < j$, являются замкнутыми вложениями, рассмотрел морфизмы между ними и в [3] исследовал основные свойства этих многообразий. Для аффинных бесконечномерных многообразий X (т. е. когда все X_i в $\{X_i, f_{i,j}\}$ являются аффинными многообразиями) он определил понятие кольца регулярных функций $\Bbbk[X]$ на X, понятие касательного пространства $T_{X,x}$ в точках $x \in X$ и понятие гладкости многообразия X в точке, а также доказал следующие утверждения. Во-первых, если $f\colon Y \to X$ — замкнутое вложение бесконечномерных аффинных многообразий, X неприводимо, Y гладко в точке $y \in Y$ и дифференциал $(df)_y\colon T_{Y,y} \to T_{X,x}$ вложения f в точке y является изоморфизмом, то f тоже является изоморфизмом. Во-вторых, бесконечномерная алгебраическая группа, определённая над полем характеристики 0, является гладким многообразием, и, в-третьих, дифференциал $(df)_{\mathrm{id}}$ естественного вложения группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ в точке, соответствующей тождественному отображению $\mathrm{id}\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, является изоморфизмом. Поэтому для положительного решения проблемы якобиана осталось доказать, что естественное отображение из $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ является замкнутым вложением. В своём докладе [1] на семинаре в Стекловке 17 июня 2008 года Шафаревич наметил пути проверки замкнутости вложения в двумерном случае[23)].

Список литературы

[1] *Шафаревич И. Р.* Бесконечномерные группы и проблема якобиана для аффинной плоскости A(2). http://www.mi.ras.ru/~shafarev/doklad_17_06_2008.pdf

[2] Шафаревич Игорь Ростиславович. Математическая биография. http://www.mi.ras.ru/~shafarev/biogr.html

[3] *Шафаревич И. Р.* О некоторых бесконечномерных группах. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1. С. 214–226.

[4] *Шафаревич И. Р.* О нормируемости топологических полей // ДАН СССР. 1943. Т. 40, № 1. С. 133–135.

[5] *Шафаревич И. Р.* О построении полей с заданной группой Галуа порядка ℓ^α // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18, № 3. С. 261–296.

[6] *Шафаревич И. Р.* О факторах одного убывающего центрального ряда // Матем. заметки. 1989. Т. 45, вып. 3. С. 114–117.

[7] *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности // Матем. сб. 1950. Т. 26, № 1. С. 113–146.

[8] *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. Алгебра-1 // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направ. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 11. С. 5–279.

[9] *Шафаревич И. Р.* Построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18, № 6. С. 525–578.

[23)] О некоторых других подходах к решению проблемы якобиана см. в [27] и [28]; общий обзор результатов по этой проблеме можно найти в [37].

[10] *Шафаревич И. Р.* Поля алгебраических чисел // Proc. Internat. Congr. Math. (Stockholm, 1962). Djursholm: Inst. Mittag-Leffler, 1963. P. 163–176.

[11] *Шафаревич И. Р.* Проблема десятого дискриминанта // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, вып. 4. С. 260–277.

[12] *Шафаревич И. Р.* Собрание сочинений. Т. 1, 2. М.: Феникс, 1994.

[13] *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups // Rend. Mat. Appl. (5). 1966. Vol. 25, № 1–2. P. 208–212.

[14] *Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р.* Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35, № 3. С. 530–572.

[15] *Рудаков А. Н., Цинк Т., Шафаревич И. Р.* Влияние высоты на вырождения алгебраических поверхностей типа $K3$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46, № 1. С. 117–134.

[16] *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа K3 // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1050–1052.

[17] *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа K3 // Совр. пробл. мат. Дифф. уравнения, матем. анализ и их прил. Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 166. С. 222–234.

[18] *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа K3 над полями конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 3. С. 646–661.

[19] *Тэйт Дж. Т., Шафаревич И. Р.* О ранге эллиптических кривых // ДАН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 770–773.

[20] *Авербух Б. Г., Вайнберг Ю. Р., Жижченко А. Б., Манин Ю. И., Мойшезон Б. Г., Тюрина Г. Н., Тюрин А. Н.* Алгебраические поверхности / Ред. И. Р. Шафаревич, И. Г. Петровский // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 75.

[21] *Аракелов С. Ю.* Семейства алгебраических кривых с фиксированными вырождениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35, № 6. С. 1269–1293.

[22] *Белый Г. В.* О расширениях Галуа максимального кругового поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, № 2. С. 267–276.

[23] *Вейль А.* Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.

[24] *Демушкин С. П., Кострикин А. И., Новиков С. П., Паршин А. Н., Понтрягин Л. С., Тюрин А. Н., Фаддеев Д. К.* Игорь Ростиславович Шафаревич (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1984. Т. 39, вып. 1(235). С. 167–174.

[25] *Зархин Ю. Г.* Эндоморфизмы абелевых многообразий над полями конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 2. С. 272–277.

[26] *Куликов Вик. С.* Вырождения $K3$ поверхностей и поверхностей Энриквеса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 5. С. 1008–1042.

[27] *Куликов Вик. С.* Гипотеза о якобиане и нильпотентные отображения. Алгебраическая геометрия — 11 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ, 2001, Т. 70. С. 120–133.

[28] *Куликов Вик. С.* Обобщённая и локальная проблемы якобиана // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56, № 5. С. 1086–1103.

[29] *Куликов Вик. С.* Эпиморфность отображения периодов для поверхностей типа К3 // УМН. 1977. Т. 32, вып. 4(196). С. 257–258.

[30] *Манин Ю. И.* Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27, № 6. С. 1395–1440.

[31] *Манин Ю. И., Панчишкин А. А.* Введение в современную теорию чисел. М.: МЦНМО, 2013.

[32] *Паршин А. Н.* Алгебраические кривые над функциональными полями, I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 5. С. 1191–1219.

[33] *Скопин А. И.* Факторгруппы одного верхнего центрального ряда // ДАН СССР. 1950. Т. 74. С. 425–428.

[34] *Шабат Г. Б.* О комплексной структуре областей, накрывающих алгебраические поверхности // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 2. С. 67–75.

[35] *Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres*, par Claude Gaspar Bachet, Sr. de Méziriac. (1612). Переиздание: A. Blanchard, Paris, 1993. Рус. перев.: *Баше де Мезирьяк К.-Г.* Игры и задачи, основанные на математике. М., 1877.

[36] *Enriques F.* Le superficie algebriche. Bologna: N. Zanichelli Ed., 1949.

[37] *Van den Essen A.* Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Birkhauser, 2000.

[38] *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. Vol. 73, № 3. P. 349–366.

[39] Geometric Galois actions. 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 242).

[40] *Hermite Ch.* Extrait d'une lettre de M. C. Hermite à M. Borchardt sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés // J. Reine Angew. Math. 1857. Vol. 53. P. 182–192.

[41] *Kaplansky I.* Topological rings // Bull. AMS. 1948. Vol. 54, № 9. P. 809–826.

[42] *Shabat G.* Calculating and drawing Belyi pairs // Зап. науч. сем. ПОМИ. СПб.: ПОМИ, 2016. Т. 446. С. 182–220.

[43] *Shabat G. B., Voevodsky V. A.* Drawing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. III. Boston, MA: Birkhäuser, 1990. (Progr. Math.; Vol. 88). P. 197–227.

[44] *Tate J.* Endomorphisms of abelian varieties over finite fields // Invent. Math. 1966. Vol. 2. P. 134–144.

[45] *Taylor R.* Reciprocity laws and density theorems // Shaw Prize Book 2007. Cambridge, USA: Harvard University, 2007.

[46] *Torelli R.* Sulle varietà di Jacobi // Rendiconti della Reale accademia nazionale dei Lincei. 1913. Vol. 22, № 5. P. 98–103.

[47] *Wyman B. F.* What is a reciprocity law? // Amer. Math. Monthly. 1972. Vol. 79, № 6. P. 571–586. Correction, ibid. Vol. 80. P. 281.

Виктор Степанович Куликов,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
kulikov@mi.ras.ru

Георгий Борисович Шабат,
Российский государственный гуманитарный университет, Москва
george.shabat@gmail.com