Геометрия: классика и современность

Планиметрия Евклида и Лобачевского от Евклида до Гильберта

В. М. Тихомиров

Цель этой статьи — построить геометрии Евклида и Лобачевского и на аксиоматической основе, и с помощью моделей этих геометрий, а также доказать непротиворечивость этих геометрий и полноту аксиоматик. Этим будет совершён переход от Евклида, жившего в третьем веке до нашей эры, к Гильберту, который на пороге двадцатого века завершил построение геометрии как дедуктивной теории, доказав полноту и непротиворечивость построенной им системы аксиом. В этой статье осуществляется то же самое на базе другой аксиоматической системы.

Попытку построить геометрию как дедуктивную науку предпринял в третьем веке до нашей эры Евклид. Он изложил это построение в одной из величайших книг в истории науки, которая известна всем под названием «Начала» [1]. Замысел дедуктивного построения какого-то раздела математики восходит к Аристотелю. Он состоит в том, что доказательство математического утверждения должно последовательно, шаг за шагом, опираясь на набор начальных понятий (которые описываются без определений), логически выводиться из некоей системы утверждений, принимаемых за истину без доказательства.

Евклид построил геометрию, основываясь на пяти таких утверждениях, которые он назвал постулатами.

При формулировке постулатов им не определялись понятия «точка», «прямая», «отрезок» (Евклид называет его «ограниченной прямой»), «радиус» и «угол». Перечислим постулаты Евклида (сейчас их обычно называют аксиомами).

1. *От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.*
2. *Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.*
3. *Из всякого центра всяким радиусом может быть циркулем описана окружность.*
4. *Все прямые углы равны между собой.*
5. *Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых углов, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых углов.*

Этот постулат, более похожий на формулировку теоремы и тем сильно отличающийся от остальных, можно заменить следующим, эквивалентным ему:

$5'$. *Через точку, не лежащую на прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающуюся с исходной прямой.*

Прямая, отличная от другой и не пересекающаяся с ней, называется *параллельной прямой*, а аксиома $5'$ называется *аксиомой о параллельных*.

Содержание «Начал» удовлетворяло почти всех (за ничтожным исключением) читателей на протяжении почти двадцати двух веков. Но всё же иногда отмечались некоторые пробелы в этой книге — не все теоремы в книге можно было логически вывести, исходя из евклидовых постулатов. Так, например, Лейбниц указал, что первая теорема евклидовых «Начал» о существовании равностороннего треугольника не может быть выведена из приведённых постулатов. В девятнадцатом веке математики стали задумываться о непротиворечивости аксиоматических систем, а также о возможности вывести пятый постулат Евклида из остальных. Гаусс, Лобачевский и Я. Бойяи почти достигли такой цели в начале XIX века, а в конце века Клейн, Кэли и Пуанкаре доказали непротиворечивость новой геометрии, получившей имя Лобачевского. Окончательно разрешил все проблемы Давид Гильберт (1862–1943) в своём замечательном труде «Основания геометрии», вышедшем в 1899 году. Там тоже были некоторые пробелы, которые были потом им устранены (см. [2]).

Книга Гильберта произвела большое впечатление на весь математический мир. Аксиоматическое построение геометрии стало входить в математическое образование. В педагогических вузах и в университетах на математических отделениях стали включаться в программу общие и/или специальные (полугодовые или годовые) курсы под названием «Основания геометрии». Появилось множество книг с изложением оснований геометрии, были сделаны попытки объяснить непротиворечивость геометрии

Лобачевского для неспециалистов. Но нельзя сказать, что такие попытки были удачными.

Однако в действительности суть дела проста, и далее строится полная непротиворечивая аксиоматика евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского (с отличием лишь в одной аксиоме), строятся их арифметические модели и доказывается тем самым непротиворечивость геометрий и Евклида и Лобачевского (при условии, что непротиворечива сама арифметика). Основные идеи построения такой аксиоматики принадлежат Андрею Николаевичу Колмогорову (1903–1987), они изложены в учебнике [3] в первом разделе главы «Приложения», озаглавленном «О логическом строении геометрии», см. с. 373–376.

Вопрос о том, стоит ли школьников этому учить, здесь не обсуждается. Наверное, учить всех не стоит, но люди, интересующиеся математикой, не обязательно только школьники, пусть проделают здесь с нами 24-вековой путь от Евклида до Гильберта.

Прежде чем переходить к формулировке нашей системы аксиом, напомним уже сказанное об идеях Аристотеля относительно построения дедуктивной теории. Строение такой теории (обозначим её $\mathcal{T}$) складывается из четырёх компонентов: списка *элементарных* (*неопределяемых*) *понятий* ($\mathrm{Elem}_{\mathcal{T}}$), набора утверждений об этих объектах, которые принимаются без доказательства, — *аксиом* ($\mathrm{Ax}_{\mathcal{T}}$), *определений новых объектов* ($\mathrm{Def}_{\mathcal{T}}$) и *теорем* ($\mathrm{Thm}_{\mathcal{T}}$).

Мы будем описывать две геометрические теории: более подробно — Евклида и несколько схематично — Лобачевского. Обозначим планиметрию Евклида E, планиметрию Лобачевского — L. Опишем аксиоматики обеих геометрий.

Списки элементарных (неопределяемых) понятий у обеих геометрий (Elem_E и Elem_L) одинаковы и почти совпадают с евклидовыми. В нашей аксиоматической системе (которая лишь немного отличается от колмогоровской) это *точка, прямая, расстояние* и *величина угла*. Плоскость $\mathcal{P}$ у нас — это точечное множество, являющееся *метрическим пространством.* Это значит, что для любых двух точек A и B определена величина $|AB|$, называемая *расстоянием между A и B*, — неотрицательное вещественное число, которое равно нулю, если и лишь если A и B совпадают, и которое удовлетворяет условию симметрии: $|AB| = |BA|$ и неравенству треугольника: $|AB| \leqslant |AC| + |CB|$ для любого $C \in \mathcal{P}$. Прямая — непустое подмножество плоскости, причём существует хотя бы одна прямая и точка вне неё. Подмножества плоскости называются *линиями и фигурами.* Основных линий — два типа: прямые и окружности, среди важнейших школьных фигур — угол и треугольник. Понятие прямой входит в число элементарных понятий, а окружность, угол и треугольник будут определены.

Наборы аксиом в геометриях Евклида и Лобачевского — Ax_E и Ax_L — совпадают за исключением одной, последней аксиомы. Приведём сначала все аксиомы, кроме этой последней, по ходу дела вводя некоторые определения. Читатель увидит, что приводимая система аксиом представляет собой лишь небольшое уточнение евклидовых постулатов.

Вообще говоря, аксиоматика не требует чертежей. Но мы приводим их, возвращая читателя к тем далёким временам, когда такие мыслители, как Евклид или Архимед, сидели на песке и чертили циркулем и линейкой. А мы будем чертить или мысленно, или на листе бумаги, строя «графическую модель» евклидовой плоскости.

Аксиома 1 (рис. 1). *Через две различные точки A и B плоскости $\mathcal{P}$ проходит единственная прямая*; *причём если $|AB| = |AC| + |CB|$, то точка C лежит на этой прямой.*

В этом случае будем говорить, что точка C *лежит между A и B*, а множество точек, лежащих между A и B, вместе с самими точками A и B будем называть *отрезком* с концами A и B. Такой отрезок будем обозначать $[A, B]$. Точки, лежащие между A и B, будем называть *внутренними точками отрезка* $[A, B]$ (см. рис. 1). Эту аксиому следует сравнить с первым постулатом Евклида.

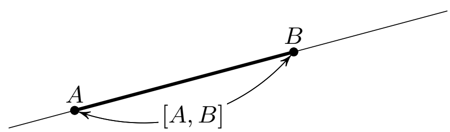

Рис. 1

Плоская фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя точками A и B, ей принадлежащими, она содержит весь отрезок $[A, B]$.

Аксиома 2 (рис. 2). *Точка O на прямой делит точки этой прямой на две выпуклые совокупности*, называемые *лучами с вершиной в O*, и при этом

а) *если A и B принадлежат разным лучам, не совпадая с O, то O — внутренняя точка отрезка $[A, B]$*;
б) *каждый из лучей изометричен совокупности неотрицательных вещественных чисел* (что это значит, будет пояснено чуть позже).

Это значит, что если выбран некоторый масштаб (в нашем наглядном представлении — фиксированный раствор циркуля), то любая точка луча выражается в виде десятичной дроби $k{,}k_1k_2\ldots$, где k — натуральное

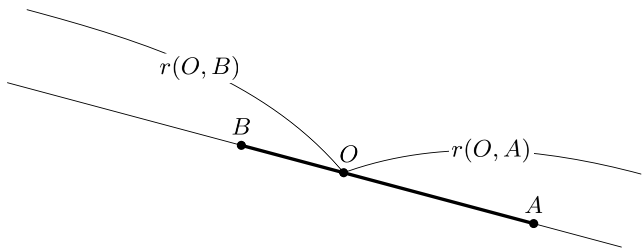

Рис. 2

число или нуль, а k_i — одно из чисел от нуля до девяти (причём эта дробь не должна оканчиваться на одни девятки, т. е. бесконечный хвост десятичной дроби не должен состоять из одних девяток). Пусть O — некоторая точка плоскости и $R > 0$. Совокупность точек C плоскости, для которых $|OC| \leqslant R$, назовём *кругом с центром* O *радиуса* R.

Поясним сказанное и изображённое на рисунке. Мы видим на рисунке два луча. Точка O выполняет роль «пропускного пункта» на прямой: если обе точки принадлежат одному из лучей, то можно «проехать из пункта A в пункт B» и вас никто не остановит (это и означает, что лучи выпуклы). А если точки принадлежат разным лучам, то придётся остановиться в пункте O и предъявить документ, обосновывающий ваше право на пересечение пункта O.

Вопрос об изометрии много сложнее. Греческую цивилизацию во времена Пифагора постиг страшный удар: было доказано, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. На нашем арифметико-алгебраическом языке это означает, что $\sqrt{2}$ не является дробью m/n, где m и n — целые числа. И древние греки не стали развивать понятие числа. В частности, у Евклида в его «Началах» нет понятия числа, хотя фактически число $\sqrt{2}$ у самого Евклида представлено (когда он доказывает несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной) как бесконечная непрерывная дробь.

Непрерывная дробь (или цепная дробь) — это конечное или бесконечное выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

где a_0 есть целое число, а все остальные a_n — натуральные числа (положительные целые).

Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. А если бы Евклид захотел записать длину диагонали квадрата со стороной единица, то получил бы дробь $[1; 2, 2, 2, 2, \ldots]$, равную $\sqrt{2}$.

Древние не стали возиться с непрерывными дробями. Но! Как мы видели, у Евклида есть понятие радиуса (см. третий постулат). Но радиус — это ведь вещественное число, и более того, оба постулата дают возможность задать таким числом «всякий радиус». А заодно и для себя уточним то, что было выше сказано: «на плоскости можно измерить расстояние между точками».

Евклид пользовался линейкой и циркулем. И мы мысленно будем пользоваться теми же приборами с одним (как уже было сказано) отличием: у нас в мыслях будет не «простая» линейка, а *масштабная*.

И теперь выберем наш обычный, действующий с XIX века (когда измерили диаметр Земли) масштаб в 1 метр (1 м) и будем откладывать его (по второму постулату Евклида) от точки O по одному из лучей. Далее (опять-таки по Евклиду) поставим ножку циркуля в точку O и проведём окружность какого-то радиуса. Эта окружность пересечёт луч в некоторой точке, которую обозначим буквой A. Если она совпадёт со, скажем, k-й точкой, отмеченной на луче, то тогда расстояние $|OA|$ от O до A будет k метров. Как поступать, если расстояние не исчисляется целым числом метров, продемонстрируем на том же примере диагонали квадрата со стороной, равной одному метру. Обнаружится, что точка, удалённая от O на длину диагонали этого квадрата, находится между 1 м и 2 м, а переходя к дециметрам (десятым долям метра), получим, что искомая длина лежит между 1,4 м и 1,5 м.

Дальше обнаружится, что выполнены неравенства $1{,}41\text{ м}<\sqrt{2}\text{ м}<1{,}42\text{ м}$. Мы вычислили наше число с точностью до одной сотой. Вот вычисление нашего числа с точностью до одной миллиардной:

$$1{,}414213562\text{ м} < \sqrt{2}\text{ м} < 1{,}414213563\text{ м}.$$

Этот процесс никогда не кончится. Корень из двух будет представлен бесконечной непериодической десятичной дробью. (Недавно корень из двух был вычислен с точностью до 200 миллиардов десятичных знаков после запятой.)

А вещественные числа — это *все* бесконечные десятичные дроби (для определённости, не оканчивающиеся на одни девятки). Их совокупность обозначают ныне символом $\mathbb{R}$. А проведённый нами процесс сопоставления «радиусу окружности с центром в точке O» вещественного числа и означает изометрию геометрического объекта, описываемого аксиомами 2 и 3 из «Начал» Евклида, с числами из $\mathbb{R}$: каждой точке прямой при выборе единичного отрезка соответствует вещественное число, и расстояние между точками равно расстоянию между числами. Поэтому $\mathbb{R}$ называют ещё *вещественной прямой*.

Следующей аксиомы у Евклида не было, но он ею многократно пользуется в своей книге. Она сходна с нашей аксиомой 2а.

Аксиома 3. *Прямая на плоскости* (*обозначим её* l) *делит точки плоскости на две выпуклые совокупности*, называемые *полуплоскостями с границей* l, и при этом *если* A *и* B *принадлежат разным полуплоскостям и не лежат на* l*, то существует точка* C*, принадлежащая* l *и внутренняя для отрезка* $[A, B]$ (рис. 3). (Полуплоскость, ограниченная прямой l и содержащая точку A, обозначена $h(l, A)$.)

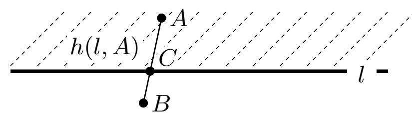

Рис. 3

Теперь нам надо определить одно важное понятие.

Общую часть двух полуплоскостей, границы которых пересекаются (т. е. не совпадают и не параллельны), назовём *углом*.

Общая точка O границ называется *вершиной угла*. Угол ограничен двумя лучами, имеющими общую вершину O.

Если $r(O, A)$ и $r(O, B)$ — два разных луча, с вершиной O, то угол, состоящий из общих точек полуплоскостей $h(l(O, A), B)$ и $h(l(O, B), A)$ (т. е. полуплоскости, содержащей B, граница которой порождена лучом $r(O, A)$, и полуплоскости, содержащей A, граница которой порождена лучом $r(O, B)$), обозначим AOB. Каждый угол определяется своим пересечением с кругом с центром O радиуса для определённости равного единице (точки A и B удалены от O на расстояние единица в каком-то масштабе).

Для любого угла AOB определена *величина угла* $\widehat{AOB}$. Величина угла измеряется числом градусов, изменяющимся в пределах от $0°$ до $180°$. Величина нулевого угла по определению равна нулю, а развёрнутого — ста восьмидесяти градусам. Будем говорить, что луч $r(O, C)$ *лежит между лучами* $r(O, A)$ *и* $r(O, B)$*, если*

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}.$$

Через некоторое время будет рассказано, как найти величину угла (подобно тому как мы научились вычислять величину расстояния от одной точки до другой).

Для формулировки следующей аксиомы надо определить понятие изометрии геометрических фигур. Скажем, что *две фигуры* $\mathcal{C}_1$ *и* $\mathcal{C}_2$ *изометричны*, если существует взаимно однозначное отображение $\mathcal{F}$ точек фигуры $\mathcal{C}_1$ на точки фигуры $\mathcal{C}_2$, при котором для любых двух точек A и B из $\mathcal{C}_1$ выполнено равенство $|AB| = |\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)|$. Если фигуры $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ изометричны, будем обозначать это так: $\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2$.

Аксиома 4 (об изометрии; рис. 4). *Если величины двух углов равны, то сами углы изометричны* (точнее: если $\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}$, то существует изометрическое отображение одного угла на другой, при котором луч $r(OA)$ совместится с лучом $r(O_1A_1)$, а луч $r(OB)$ совместится с лучом $r(O_1B_1)$).

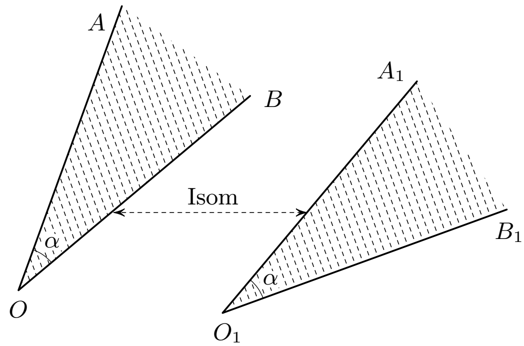

Рис. 4

Основное отличие приводимой здесь аксиоматики от колмогоровской, построенной в учебнике [3], заключено именно в этой аксиоме. Колмогоровская аксиома, которую он называет *аксиомой подвижности*, звучит так:

Если расстояние $|AB|$ положительно и равно расстоянию $|A_1B_1|$, то существует ровно два перемещения, каждое из которых отображает точку A в точку A_1, а точку B в точку B_1.

Если α — полуплоскость, ограниченная прямой AB, то она этими двумя перемещениями отображается на две различные полуплоскости α_1 и β_1, ограниченные прямой A_1B_1. Колмогоровское перемещение — изометрия *всей плоскости*. Приведённая аксиома имеет генетическую связь с Эрлангенской программой Ф. Клейна, о которой речь пойдёт дальше. Но у неё есть недостаток, о котором говорится в учебнике [3] на с. 388. Там сказано, что «точного определения величины угла [в учебнике] не дано. Полное изложение теории измерения углов, опирающееся только на принятые нами основные понятия и перечисляемые далее аксиомы, является довольно трудным делом, но оно может быть проведено с полной строгостью. Поэтому мы и не считаем величину угла ещё одним основным понятием».

Автор этой статьи решил сблизить аксиому 4 с четвёртым евклидовым постулатом: у Евклида «прямые углы равны» (что можно толковать как их изометрию), у нас изометричны углы, величины которых равны. Для этого пришлось ввести понятие величины угла в основные понятия.

Аксиома 5 (рис. 5). *Через точку, не лежащую на прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающуюся с исходной прямой.*

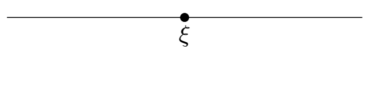

Рис. 5

Геометрию, основанную на аксиомах 1–5, мы, собственно, и обозначили буквой E. Она и есть планиметрия Евклида: все теоремы из «Начал» можно строго обосновать в нашей аксиоматической системе, ибо все постулаты Евклида входят в нашу аксиоматическую систему (хотя многие теоремы, сформулированные Евклидом, нельзя доказать, пользуясь лишь его постулатами, а пользуясь нашими аксиомами — можно).

В геометрии Лобачевского пятая аксиома звучит так: *через точку, не лежащую на прямой, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с исходной.*

На протяжении двух тысячелетий делались попытки вывести пятый постулат Евклида из остальных. Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) убедил самого себя, что вывести пятый постулат из остальных невозможно (в одном из писем Гаусс указал дату, когда это произошло — 1792 год). Но он не стал публиковать свои мысли об этом. Два гения трагической судьбы — профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) и Янош Бойяи (1802–1860) — математик-любитель, живший в Австрийской империи, очень далеко развили геометрию, в которой евклидов пятый постулат заменён на противоположный. Первая публикация Лобачевского на эту тему «О началах геометрии» вышла в «Казанском вестнике» за 1829–30 гг., Бойяи опубликовал свой текст как приложение к книге по геометрии своего отца, которая вышла в 1832 году. Впоследствии Лобачевский вывел аналог теоремы косинусов в новой геометрии, где тригонометрические функции заменялись гиперболическими. Это ли не доказательство непротиворечивости новой геометрии? Ведь противоречие в геометрии привело бы к противоречию в арифметике. Аналог теоремы синусов получил Бойяи. Они верили в то, что создали новую геометрию, новый математический мир, однако не дожили до момента, когда их усилия были признаны. Но когда это произошло, новая геометрия получила имя Лобачевского (иногда Бойяи — Лобачевского).

В 1838–40 гг. профессор Дерптского университета Фердинанд Готлибович Миндинг (1806–1885) получил формулы для выражения стороны треугольника на поверхности постоянной отрицательной кривизны через длины двух других сторон и угол между ними, а в 1868 г. Эудженио Бельтрами (1835–1900) заметил, что эти формулы совпадают с формулами Лобачевского. Всё это стало толчком для Клейна (1849–1925) создать в 1871 г. (на базе проективной метрики Артура Кэли (1821–1895)) проективную модель плоскости Лобачевского (и тем установить невозможность вывода пятого постулата Евклида из остальных). Более доступную модель предложил Пуанкаре (1854–1912). Историю обоснования геометрий, как уже было сказано, завершил в 1899 году Давид Гильберт[1)].

Рассуждать о геометрии Лобачевского мы будем в конце статьи, а сейчас закончим разговор о геометрии Евклида. Сначала докажем несколько теорем из евклидовых «Начал», используя нашу аксиоматику. Но прежде всего нужно сказать кое-что о доказательствах.

Первая из теорем будет сформулирована и доказана дважды. В первый раз будет дословно приведён текст из учебника [4] Андрея Петровича Киселёва (1852–1940) — учебника, который сыграл несравненную роль

[1)] С долгой историей признания неевклидовой геометрии, которая не закончилась с публикацией книги Гильберта, читатель может познакомиться по статье А. Пападопулоса [5].

в геометрическом образовании в нашей стране и по которому автора учили геометрии.

Теорема. *Если две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны*[2].

Это формулировка теоремы из учебника Киселёва, а вот

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (приводится рисунок), у которых $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$. Требуется доказать, что треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1. Здесь даётся сноска: «Для выполнения указанных в этом параграфе наложений иногда приходится накладываемый треугольник перевернуть другой стороной». Тогда, вследствие равенства этих сторон, точка C совместится с точкой C_1, вследствие равенства $\angle A = \angle A_1$ сторона AB пойдёт по стороне A_1B_1, а вследствие равенства этих сторон точка B совпадёт с B_1, поэтому сторона CB совместится с C_1B_1 (так как две точки можно соединить только одной прямой) и треугольники совпадут, значит, они равны. □

Приведём другую формулировку и доказательство того же результата, используя построенную систему аксиом.

Но прежде всего надо дать определение понятия «треугольник» в нашей системе аксиом. *Треугольником* назовём[3] совокупность точек, общих для некоторого угла и полуплоскости, граница которой пересекает обе стороны угла и содержит его вершину (см. рис. 6).

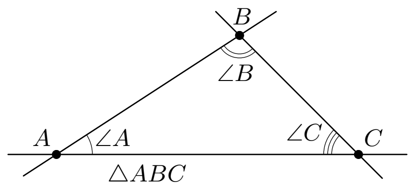

Рис. 6

Если вершину исходного угла обозначить буквой A, а буквами B и C обозначить точки пересечения полуплоскости и сторон угла, то сам треугольник будем обозначать $\triangle ABC$, точки A, B и C будем называть *вершинами*, а отрезки $[A, B]$, $[A, C]$ и $[B, C]$ — *сторонами* треугольника ABC; углы BAC, CBA и BCA (их называют *внутренними* углами треугольника) будем иногда обозначать $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$. Нетрудно понять, что треугольник определяется своими вершинами.

[2] Под равенством фигур подразумевается их совпадение при наложении.

[3] Определить понятие «треугольник» можно по-разному. Данное определение удобно для наших целей.

Теорема (признак изометрии треугольников по сторонам и углу между ними). *Если длины двух сторон и величины углов, заключённых между ними, у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны, то сами треугольники совпадают при наложении (или, что то же, — эти треугольники изометричны).*

Доказательство. По условию $\widehat{A} = \widehat{A}_1$. Следовательно (из аксиомы 4), $\angle A \simeq \angle A_1$. Это значит, что при наложении угла $\angle A_1$ на угол $\angle A$ луч $r(A_1, B_1)$ наложится на луч $r(A, B)$, а луч $r(A, C)$ наложится на луч $r(A_1, C_1)$. Ввиду равенства длин сторон $|AB| = |A_1B_1|$, точки B и B_1 (в силу аксиомы 2) при наложении совпадут; аналогично доказывается, что точки C и C_1 также совпадут. То есть при наложении совпали вершины, а значит (вспомним, что треугольник определяется вершинами), и сами треугольники наложились один на другой. □

Надо подчеркнуть разницу между двумя доказательствами признака равенства треугольников. Во втором доказательстве все логические ходы мотивированы отсылкой либо на условие теоремы, либо на аксиому, либо на определение, либо на уже объяснённый факт. В первом доказательстве этого не было (там вообще только одна ссылка на аксиому 1). Хорошо это или нет, как надо преподавать геометрию, чему надо учить школьников на уроках геометрии и как следует писать школьные учебники по этому предмету, — каждому нужно находить ответы на эти вопросы самостоятельно, а обсуждаться они должны в другом месте.

Следствие (теорема о равнобедренном треугольнике). *Величины углов при основании равнобедренного треугольника равны.*

Доказательство. Действительно, пусть у треугольника ABC сторона $[B, C]$ — основание, а $[A, B]$ и $[A, C]$ — равные по длине боковые стороны. По теореме 2 треугольники ABC и ACB совпадают при наложении, и значит, $\angle A = \angle B$. □

Именно такое доказательство (вырежем, перевернём и наложим обратно) приводил преподаватель математики Чарльз Лютвидж Доджсон, известный всем как Льюис Кэрролл. Но его смущало то, что он не понимал, на что надо сослаться. А мы сослались на аксиому об изометрии.

Пусть точка D стороны $[B, C]$ треугольника ABC делит эту сторону пополам. Тогда отрезок $[A, D]$ называется *медианой* треугольника ABC; точка H прямой $l(B, C)$ называется основанием высоты треугольника ABC, если величины углов AHB и AHC равны; в этом случае отрезок $[A, H]$ называется *высотой* треугольника ABC.

Теорема (о медиане равнобедренного треугольника). *Медиана равнобедренного треугольника совпадает с его высотой.*

Доказательство. Действительно, пусть треугольник ABC равнобедренный ($|AB| = |AC|$) и D — середина $[B, C]$, т. е. $[A, D]$ — медиана. Тогда по признаку изометрии по сторонам и углу между ними треугольники ADB и ADC изометричны (так как $|AB| = |AC|$ по условию, $|BD| = |DC|$ по определению медианы, $\widehat{B} = \widehat{C}$ по теореме о равнобедренном треугольнике), а значит, $\widehat{BDA} = \widehat{CDA}$. □

Можно последовательно доказывать все теоремы «Начал» одну за другой, и тогда будет построена без пробелов вся геометрия из «Начал» Евклида.

А теперь нам надлежит построить «модель» евклидовой геометрии — объект, в котором имеются и точки, и прямые, и расстояния, и углы, и величины углов, но при этом все аксиомы становятся арифметическими теоремами. Эту модель изучают на первых лекциях в институтах и университетах. Её называют аналитической геометрией. С элементами аналитической геометрии учеников знакомят и в школе.

Аналитический подход к геометрии Декарта — Ферма

Основная мысль этого подхода состоит в том, что *геометрию можно строить на языке арифметики и анализа.* Геометрия Евклида, изложенная на «арифметико-аналитическом языке», получила название *аналитической геометрии*. Её создателями были два выдающихся учёных XVII века — Рене Декарт (1596–1650), Пьер Ферма (1607–1665). Аналитическую планиметрию Декарта — Ферма обозначим DF.

Чтобы разобраться с этой геометрией, вернёмся к истокам, чуть ли не к нашим дошкольным годам. Возьмём лист бумаги, отточенный карандаш, масштабную линейку, угольник и начнём чертить. Пусть начерченная прямая будет параллельна длинной верхней стороне листа, и далее мы будем называть её горизонтальной прямой. Выберем на горизонтальной прямой точку, которую обозначим буквой O. С помощью угольника или теоремы о медиане проведём через эту точку перпендикулярную прямую. Горизонтальную прямую назовём осью Ox_1, вторую прямую — вертикальной осью или осью Ox_2. В школе эти оси называют осями Ox и Oy, но нам удобнее, чтобы были Ox_1 и Ox_2. Ткнём мысленно или карандашом в любое место бумаги и обозначим эту точку буквой X. С помощью угольника и линейки (или в воображении с помощью пятой аксиомы) проведём через X прямую, параллельную оси Ox_2, и точку пересечения с осью Ox_1 обозначим X_1. Аналогично на оси Ox_2 получим точку X_2. С помощью масштабной линейки (или в силу наличия расстояния) вычислим расстояния $|OX_1|$ и $|OX_2|$. Эти расстояния будут состоять из числа дециметров, сантиметров, миллиметров и т. д. На этом придётся расстаться с дошкольниками, но чуть постарше человек может вообразить, что линейка имеет деления любых долей метра. Тогда числа $|OX_i|$, $i = 1, 2$, которые обозначим x_i, будут представлены в долях метра бесконечными десятичными дробями, т. е., как было сказано, вещественными числами.

Теперь нам надлежит разобраться с углами. Проведём полуокружность в «верхней полуплоскости» радиуса единица с центром в точке O. Пусть она пересекает ось Ox_1 в точках B с координатами $(-1, 0)$ и A с координатами $(1, 0)$, а ось Ox_2 — в точке C с координатами $(0, 1)$. Величину $\widehat{AOB}$ развёрнутого угла AOB по определению объявляют обычно либо числом π, либо $180°$. Мы остановимся на π. Углы AOC и COB по построению изометричны, и, значит, их величины равны $\pi/2$. Угол AOC разделим с помощью теоремы о равнобедренном треугольнике AOC пополам. Луч, идущий из точки O и содержащий высоту треугольника AOC, делит угол AOC пополам. Каждый из получившихся углов имеет величину, равную $\pi/4$. Аналогично получим четыре угла величины $\pi/8$ и т. д. Это позволяет вычислить величину любого угла, образованного лучом $r(O, A)$ и лучом с вершиной в O, пересекающим нашу полуокружность в точке D.

Линейное уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ задаёт прямую (причём числа, определяющие прямую, определены с точностью до множителя, отличного от нуля). Эту прямую можно изобразить на бумаге, и наоборот: если нарисована прямая на бумаге, то её можно задать в виде линейного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. (Этому тоже учат в школе.) Мы получили копию евклидовой геометрии на бумаге, причём расстояния между точками и величины углов получают арифметико-аналитические выражения. А именно: если произвольным «бумажным» точкам A, B и C соответствуют «числовые» точки $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ и $c = (c_1, c_2)$, то $\cos\widehat{ABC} = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$, где $(\xi_1, \xi_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$, $(\eta_1, \eta_2) = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$.

И теперь — важнейший факт, о котором уже было сказано: *все аксиомы от первой до пятой — это теоремы построенной аналитической геометрии*! (Отсюда следует непротиворечивость E.)

Убедимся в этом (автор обращается здесь к интересующимся школьникам старших классов).

1) Выбрав две точки $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, проведём через них прямую. Она задаётся параметрической формулой

$$x_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \quad x_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2).$$

А что других прямых, проходящих через точки a и b, нет, докажите сами.

2) Выберем любую прямую и на ней точку O, а её «арифметический» образ обозначим o. Уравнение прямой в параметрической форме имеет вид $x = o + \lambda a$, где $a = (a_1, a_2)$, $a_1^2 + a_2^2 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда один луч описывается этой формулой с $\lambda \geqslant 0$, а другой с $\lambda \leqslant 0$.

3) Запишем уравнение выбранной прямой в виде $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Она делит плоскость на две полуплоскости $a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant b$ и $a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b$ со свойствами, нужными в евклидовой геометрии.

4) Выбрав два угла, величины которых одинаковы, переведём сдвигом вершины каждого из углов в начало координат, а затем поворотом совместим перенесённые углы.

5) Наконец, если задана прямая $a_1x_1+a_2x_2=b$ и точка $\xi=(\xi_1, \xi_2)$, на ней не лежащая ($a_1\xi_1 + a_2\xi_2 \neq b$), то прямая $a_1x_1 + a_2x_2 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ не будет пересекаться с исходной. Единственность докажите самостоятельно.

Остался последний вопрос, связанный с построенными двумя геометриями: каково взаимоотношение между этими двумя геометриями E и DF? Мы доказали, что всё, что мог бы доказать Евклид, можно доказать и в аналитической геометрии. Но может быть, в аналитической геометрии можно доказать больше? Оказывается, что нет: обе геометрии изоморфны (т. е. равносильны). Для доказательства изоморфизма надо совершить переход от E к DF. Сделаем это.

При описании аксиоматики было сказано, что в E существует хотя бы одна прямая l, и эта прямая — непустое множество точек. Возьмём на l одну из них и обозначим буквой A. Снова: из описания аксиоматики следует, что существует точка B вне l. Найдём (по аксиоме 2) на l такую точку C, что $|AB|=|AC|$. Получили равнобедренный треугольник ABC. Из теоремы о равнобедренном треугольнике получаем, что $\widehat{B} = \widehat{C}$. Пусть O — середина стороны $[B, C]$. По теореме о медиане равнобедренного треугольника $[A, O]$ — высота треугольника ABC. Прямые l_1 и l_2 (по аксиоме 1 проходящие через точки B и C и через точки A и O), таким образом, перпендикулярны. Сопоставим прямым l_1, l_2 оси Ox_1, Ox_2 в DF. Внутри угла AOB возьмём произвольную точку X, не лежащую ни на l_1, ни на l_2. Точки пересечения прямых l_1 и l_2 с прямыми, по аксиоме 5 проходящими через X параллельно l_2 и l_1, обозначим X_1 и X_2. Сопоставление $F\colon X \to (|OX_1|, |OX_2|)$ приводит к взаимно однозначному соответствию точек угла AOB и первого квадранта на координатной плоскости. Аналогично строится соответствие точек других углов между l_1 и l_2 с точками других квадрантов в DF. С помощью теоремы Пифагора из E читатель сможет доказать равенство $|AB| = |F(A), F(B)|$ и возможность отобразить изометрично любой угол BAC из E в угол из DF, образованный лучами $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 = 0\}$ и лучом в верхней полуплоскости, наклонённым к оси Ox_1 под углом величины $\widehat{BAC}$.

Итак, обе геометрии E и DF — одна определённая аксиоматически, а другая — арифметическая модель этой аксиоматической теории, — одинаковы, как математики говорят, изоморфны. Поэтому, в частности, теоремы можно доказывать и синтетически (по Аристотелю и Евклиду), и аналитически.

Осталось последнее — построить модель плоскости Лобачевского. Опишем модель Пуанкаре, которая задаётся четвёркой $(\mathbb{C}_+, \mathcal{P}_{\mathbb{C}_+}, d_{\mathbb{C}_+}, \angle_{\mathbb{C}_+})$, где $\mathbb{C}_+$ — «точки» модели — это совокупность комплексных чисел $z = x + iy$, у которых мнимая часть положительна (т. е. $y > 0$). Совокупность прямых $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_+}$ модели состоит из вертикальных лучей полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и из полуокружностей, центры которых расположены на вещественной оси, т. е. это либо множества точек с фиксированной вещественной частью, либо совокупность таких z из $\mathbb{C}_+$, для которых $|z-\alpha| = R$ при заданных $\alpha \in \mathbb{R}$ и $R > 0$. Легко видеть, что через любую пару различных точек z и z' из $\mathbb{C}_+$ проходит ровно одна такая полуокружность. Для определения расстояния на полуплоскости $\mathbb{C}_+$ необходимо дать сначала определение *двойного отношения* $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ комплексных чисел $z_i \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, равного $\dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$. Так вот, расстояние между точками $A = z$ и $B = \zeta$ из $(z, \zeta \in \mathbb{C}_+)$, не лежащих на одном вертикальном луче, определяется модулем логарифма двойного отношения $[z, \zeta, a, b]$, где a и b — точки пересечения вещественной оси с окружностью, содержащей прямую AB модели, т. е. $d(A, B) = |\ln[z, \zeta, a, b]|$. Расстояние на вертикальных лучах определяется так: если $A = x + i\alpha$, $b = x + i\beta$, то $d(A, B) = |\ln(\alpha/\beta)|$. Наконец, $\angle_{\mathbb{C}_+}$ — это угол между прямыми в $\mathbb{C}_+$, величина которого понимается в обычном евклидовом смысле.

Давайте в заключение немного пофилософствуем. Сначала назовём имена тех, кто повстречался на нашем пути. Это Аристотель, Евклид, Рене Декарт, Пьер Ферма, Карл Фридрих Гаусс, Николай Иванович Лобачевский, Янош Бойяи, Фердинанд Готлибович Миндинг, Эудженио Бельтрами, Артур Кэли, Феликс Христиан Клейн, Анри Пуанкаре, Давид Гильберт, Андрей Петрович Киселёв и Андрей Николаевич Колмогоров.

А время, отделяющее Аристотеля и Евклида от Гильберта и Колмогорова, огромно: в него фактически уложилось время всей науки, созданной человечеством. А как в сущности близки начала и концы: едва изменив начальные постулаты Евклида, мы достигли конечной точки.

Но напомним, в чём состояли изменения. Во-первых, сразу была введена *метрика* в геометрию (а понятие метрического пространства было введено Морисом Фреше в 1906 году), во-вторых, использовалось понятие *вещественной прямой* (это понятие формировалось — усилиями Больцано, Вейерштрасса, Дедекинда, Кантора, Коши и некоторых других математиков — весь XIX век), наконец, в-третьих, было использовано понятие *изометрии*, в котором нашёл отражение общий взгляд Клейна на все геометрии (аффинную, проективную, Евклида, Лобачевского, Римана и другие, выраженный в его Эрлангенской программе), согласно которому геометрия характеризуется многообразием с действующей на нём группой отображений).

Все эти идеи внёс в аксиоматику Колмогоров, но они в зародыше были и у Евклида.

Гильберт писал свою книгу в пору, когда все эти понятия не устоялись. К тому же он старался избежать понятия числа, которого не было у Евклида. Это и привело к громоздкости его аксиоматики и в некотором смысле удалённости её от евклидовской.

А замечательный учебник Киселёва [4] при очень незначительной корректировке (где давалось бы понятие о вещественном числе, делались различия между геометрической фигурой, такой как отрезок и угол, и её величиной — длиной отрезка и величиной угла, где вводилось бы понятие наложимости или изометрии, а аксиомы 1–5, представленные в чуть упрощённой форме, объявлялись свойствами линий и углов — чтобы не пугать детей словами «постулат» и «аксиома»), — такой учебник был бы доступен школьникам. При этом доказательства приобрели бы ту форму, которую задумал Аристотель и к которой не смог бы прицепляться придирчивый математик нашего времени (конечно, мы всерьёз не касались проблем «логического вывода», считая это простительным). А после курса аналитической геометрии можно было бы сказать, что эта геометрия изоморфна той, что учили в школе. Читателю предоставляем судить о том, выполнен замысел, объявленный в аннотации, или нет.

Список литературы

[1] «Начала» Евклида. Книги I–VI. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

[2] *Hilbert D.* Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin: Verlag und Druck von B. G. Teubner, 1930. (Русс. пер.: *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.)

[3] *Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Черкасов Р. С.* Геометрия. М.: МЦНМО, 2011.

[4] *Киселёв А. П., Рыбкин Н. А.* Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. М.: Дрофа, 1995.

[5] *Пападопулос А.* О гиперболической геометрии и истории её признания // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 10–29.

Владимир Михайлович Тихомиров, мехмат МГУ

`vmtikh@googlemail.com`