Задачи с двумя известными

М. А. Горелов

Оптимизационные задачи в геометрии треугольника изучаются начиная с античных времён. Типичная формулировка выглядит следующим образом. Задано значение одной величины, связанной с треугольником. Требуется найти такой треугольник, у которого другая величина максимальна (или минимальна). Например, среди всех треугольников с данным периметром найти тот, у которого площадь максимальна. Или при заданном радиусе вписанной окружности найти минимальный периметр треугольника.

Но ведь треугольник задаётся тремя параметрами. Значит, если зафиксировать две величины, то всё ещё останется свобода для варьирования треугольника. И можно искать «экстремальные» треугольники. Задачи такого рода в литературе практически не встречаются. О некоторых из них будет рассказано далее[1].

Основные результаты получаются средствами старой доброй синтетической геометрии. Но уместиться в рамки школьной программы категорически не удаётся. Поэтому напомним формулировки некоторых теорем, которые понадобятся в дальнейшем. По непонятной пока причине все они относятся к числу наиболее красивых результатов элементарной геометрии.

§ 1. Золотые теоремы

Пусть вокруг треугольника описана окружность Ω радиусом R с центром O и в тот же треугольник вписана окружность ω радиусом r с центром I. Тогда расстояние между их центрами $d = OI$ удовлетворяет равенству $d^2 = R^2 - 2Rr$. Это равенство называют формулой Эйлера. Из него

[1] Во многих местах я оставляю «зацепки», отправляясь от которых можно провести маленькое самостоятельное исследование. Иногда это делается с явным указанием на такую возможность, а иногда — без оного. Вообще, в статье предлагается некая новая точка зрения. А смена точки зрения зачастую позволяет относительно легко получать новые результаты. Поэтому стоит для каждого полученного ниже результата поискать аналоги, обобщения и т. п.

немедленно следует неравенство

$$2r \leqslant R. \tag{1}$$

Поскольку для равностороннего треугольника выполняется равенство $2r = R$, этот результат можно сформулировать как решение двух оптимизационных задач. Среди всех треугольников с заданным радиусом описанной окружности наибольший радиус вписанной окружности имеет равносторонний треугольник. А среди всех треугольников с заданным радиусом вписанной окружности наименьший радиус описанной окружности имеет правильный треугольник.

Формула Эйлера даёт необходимые условия того, чтобы для двух заданных окружностей существовал треугольник, для которого меньшая окружность является вписанной, а большая — описанной. Это утверждение можно обратить.

А именно, если радиусы r и R двух окружностей и расстояние d между их центрами удовлетворяют условию Эйлера, то для любой точки A на окружности радиусом R найдётся такой треугольник с вершиной A, что для него одна окружность является вписанной, другая — описанной. Это утверждение является простейшим вариантом теоремы Понселе.

Отметим середины M_a, M_b и M_c сторон BC, AC и AB треугольника ABC соответственно. Окружность, проходящая через точки M_a, M_b и M_c, называется окружностью Эйлера[2)] треугольника ABC.

Карл Вильгельм Фейербах установил, что вписанная окружность треугольника касается внутренним образом его окружности Эйлера.

И ещё один, более простой результат, также принадлежащий Эйлеру.

Точка M пересечения медиан треугольника ABC лежит на отрезке, соединяющем центр описанной окружности O и ортоцентр H того же треугольника, причём $OM : MH = 1 : 2$. Прямая, на которой лежат точки O, M и H, называется прямой Эйлера.

Доказательства этих результатов можно найти, например, в [2, 3, 6, 7].

§ 2. Основные результаты

Придадим этим классическим теоремам более современную динамическую форму. Предположим, в наших руках есть математический конструктор, позволяющий проводить геометрические построения «циркулем и линейкой».

[2)] Эйлер доказал, что этой окружности принадлежат основания H_a, H_b и H_c высот AH_a, BH_b и CH_c треугольника ABC, а также середины отрезков AH, BH и CH, где H — ортоцентр треугольника. По этой причине окружность Эйлера часто называют окружностью девяти точек.

Отметим три точки A_0, B_0 и C_0, не лежащие на одной прямой. Соединим их отрезками и построим вписанную окружность ω и описанную окружность Ω треугольника $A_0B_0C_0$. Отметим на окружности Ω точку A. Проведём из этой точки касательные к окружности ω и зафиксируем точки B и C их пересечения с окружностью Ω. Соединив точки B и C, получим треугольник ABC.

Теперь можно «зацепить» мышкой точку A и протащить её по окружности Ω (см. рис. 1). Треугольник ABC будет скользить между окружностями ω и Ω, оставаясь всё время описанным вокруг меньшей окружности и вписанным в большую[3)].

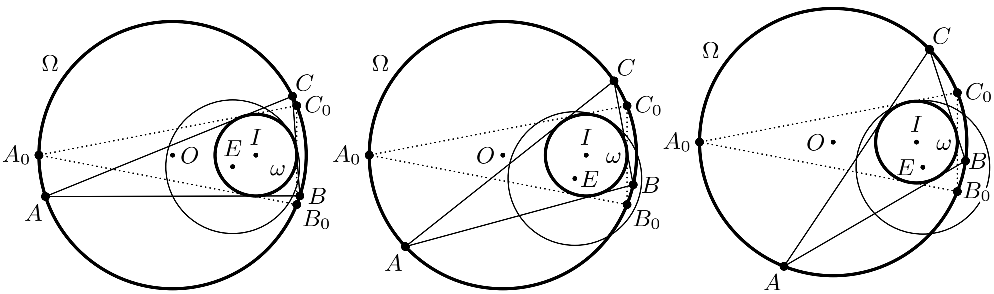

Рис. 1

Добавим теперь на эту картинку окружность Эйлера. При движении точки A по окружности Ω окружность Эйлера будет катиться по вписанной окружности ω, как обруч по талии гимнастки.

Треугольник $M_aM_bM_c$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии $-1/2$ и центром M. Следовательно, радиус окружности Эйлера равен $R/2$. А значит, при движении точки A по окружности Ω центр E окружности Эйлера будет двигаться по окружности ϖ с центром I и радиусом $R/2 - r$.

Чуть позже мы подробнее изучим характер движения окружности Эйлера. Пока же нам понадобятся два следующих утверждения.

- При любом положении точки A центр окружности Эйлера принадлежит окружности ϖ.
- Когда точка A попадает на прямую OI, центр окружности Эйлера тоже лежит на этой прямой, причём обе точки пересечения окружности ϖ с прямой OI оказываются «задействованными».

[3)] Меняя точки A_0, B_0 и C_0, можно убедиться, что всё сказанное выполняется при любых соотношениях радиусов окружностей.

Первое из этих утверждений было только что доказано. Второе почти очевидно, поскольку в данной ситуации получается равнобедренный треугольник.

А теперь взглянем на точку пересечения медиан M. В силу упомянутой выше гомотетичности, она всегда находится на отрезке OE и делит его в отношении $OM : ME = 2 : 1$. При движении точки A по окружности Ω точка O остаётся на месте, а центр окружности Эйлера движется по окружности ϖ. Поэтому точка M движется по окружности, центр которой расположен на отрезке OI на расстоянии $\frac{2}{3}d$ от точки O, а радиус равен $\frac{1}{3}(R-2r)$ (см. рис. 2).

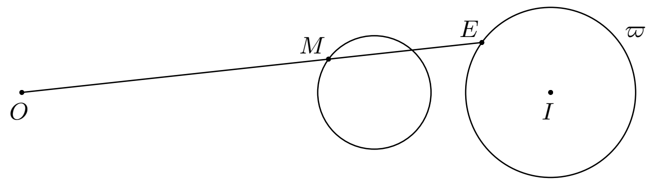

Рис. 2

Этот красивый результат пока не вошёл в учебники, но не является новым (см., например, [1, 2]).

Из доказанного результата получим четыре неравенства, представляющих определённый интерес:

$$\frac{2d-R+2r}{3} \leqslant OM \leqslant \frac{2d+R-2r}{3}$$

и

$$\frac{d-R+2r}{3} \leqslant IM \leqslant \frac{d+R-2r}{3}.$$

А теперь можно вспомнить теорему о прямой Эйлера. Пусть точка A движется по окружности Ω. Точка O при этом остаётся на месте. Точка M, как только что установлено, движется по окружности. Значит, и ортоцентр H треугольника ABC движется по окружности. Центр этой окружности лежит на прямой OI. Расстояние от точки O до центра этой окружности равно $2d$, а радиус окружности равен $R-2r$.

Из неравенства (1) и формулы Эйлера следует, что $R-2r \leqslant d$ и тем более $R-2r < 2d$, т. е. точка O лежит вне окружности, по которой движется точка H. Поэтому $2d-R+2r \leqslant OH \leqslant 2d+R-2r$ или

$$2\sqrt{R^2-2Rr}-R+2r \leqslant OH \leqslant 2\sqrt{R^2-2Rr}+R-2r.$$

Упражнение 1. Получите аналогичные оценки для расстояния IH.

Упражнение 2 (American Mathematical Monthly, problem 11306). Докажите неравенства

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{4r-R}{R}\leqslant\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant\frac{a}{2}.$$

В каких случаях они обращаются в равенства? (Как обычно, a, b, c — стороны, p — полупериметр треугольника.)

Упражнение 3 («Математика в школе», задача 260). Докажите, что $OH\geqslant\sqrt{2}\,IH$.

Упражнение 4 [11, 2004 г., 1927]. Пусть ABC — неравносторонний треугольник, O и I — центры описанной и вписанной окружностей, H — точка пересечения высот треугольника. Могут ли точки O, I и H быть вершинами равнобедренного треугольника?

В терминах оптимизационных задач полученный результат может быть сформулирован следующим образом. Если радиус описанной около треугольника окружности равен R, а радиус его вписанной окружности равен r, то наибольшее возможное расстояние между центром описанной окружности и ортоцентром этого треугольника равно $2\sqrt{R^2-2Rr}+R-2r$, а наименьшее составляет $2\sqrt{R^2-2Rr}-R+2r$. В обоих случаях оптимальными являются равнобедренные треугольники.

И ещё один результат, получающийся из той же картинки. Рассмотрим треугольник OIH. Если радиусы вписанной и описанной окружностей заданы, то основание $OI=d$ этого треугольника фиксировано. А вершина H лежит на окружности, центр которой принадлежит прямой OI. Значит, высота треугольника не превосходит радиуса $2R-r$ этой окружности. Следовательно, площадь треугольника не превосходит $d(R/2-r)$.

На первый взгляд, полученные результаты «тянут» на олимпиадные задачки. Может быть, даже не очень хорошие, поскольку использованный аппарат довольно сложен, а полученные ответы довольно громоздки. Но следствия из них заставляют думать иначе.

§ 3. Первые следствия

А теперь поиграем в формулы. Известно, что

$$OM^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2), \tag{2}$$

где a, b, c — стороны треугольника (см., например, задачу 490б из [6] или статью [1]). Следовательно,

$$4R^2+12Rr-4r^2-4d(R-2r)\leqslant a^2+b^2+c^2\leqslant 4R^2+12Rr-4r^2+4d(R-2r).$$

Согласно другой формуле (см., например, задачу 490а из [6]),

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr. \tag{3}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &8R^2 + 40Rr - 4r^2 - 8d(R - 2r) \leqslant \\ &\qquad \leqslant (a + b + c)^2 \leqslant 8R^2 + 40Rr - 4r^2 + 8d(R - 2r). \end{aligned} \tag{F}$$

Два других доказательства этих неравенств, аналитическое и алгебраическое, можно найти в [5]. Первое из них интересно, пожалуй, только очень точным выбором независимой переменной. Второе будет полезно изучающим элементарную алгебру многочленов. А вместе все три доказательства хорошо демонстрируют тезис о единстве математики.

Доказанное неравенство (F) названо в [10] основным (fundamental). Это обусловлено большим числом его следствий. Приведём примеры.

Хорошо известно, что среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный. Это утверждение эквивалентно неравенству $(a + b + c)^2 \leqslant 27R^2$. Данное неравенство является следствием только что полученного. Для того чтобы доказать это, достаточно установить, что

$$8R^2 + 40Rr - 4r^2 + 8\sqrt{R^2 - 2Rr}\,(R - 2r) \leqslant 27R^2. \tag{4}$$

Изолируем радикал:

$$8\sqrt{R^2 - 2Rr}\,(R - 2r) \leqslant 19R^2 - 40Rr + 4r^2,$$

возведём обе части полученного неравенства в квадрат и разложим на множители разность правой и левой частей [4)]. Получим

$$(353R^2 - 60Rr + 4r^2)(R - 2r)^2 \geqslant 0.$$

Это неравенство уже очевидно, поскольку $R \geqslant 2r$.

Неравенство $(a+b+c)^2 \leqslant 27R^2$, так же как и неравенство (4), из которого оно было получено, является точным в том смысле, что для некоторых треугольников оно обращается в равенство. Но неравенство (4) всё-таки в некотором смысле «точнее». А именно, для любых R и r (таких, что $R \geqslant 2r$) найдётся треугольник с такими радиусами описанной и вписанной окружностей, для которого неравенство обращается в равенство. Для неравенства $(a + b + c)^2 \leqslant 27R^2$ это не так. Оно обращается в равенство только при условии $R = 2r$, т. е. для равностороннего треугольника.

[4)] Вручную выполнять эти и подобные выкладки, может быть, и затруднительно. Но если есть программа для символьных вычислений, то все они становятся совсем элементарными.

Упражнение 5. Докажите, что среди всех треугольников, описанных вокруг данной окружности, наименьший периметр имеет правильный.

Рассмотрим чуть более тонкий результат (задача 619 из [6]):

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt{6Rr}.$$

Очевидно, достаточно доказать, что

$$54Rr \leqslant 8R^2+40Rr-4r^2-8\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r).$$

Изолируем радикал:

$$8\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r) \leqslant 8R^2-14Rr-4r^2.$$

Дальше можно воспользоваться предложенной выше стандартной схемой. А можно заметить[5)], что

$$8R^2-14Rr-4r^2 = 2(4R+r)(R-2r).$$

Дальнейшее уже совсем просто.

Упражнение 6 (задача 10.34 из [3]). Докажите, что

$$64Rr-20r^2 \leqslant (a+b+c)^2 \leqslant 16R^2+16Rr+3r^2.$$

Взглянем на ситуацию под несколько иным углом. Для пущей конкретности будем говорить о неравенстве (4) или, что то же самое, о неравенстве

$$(a+b+c)^2 \leqslant 8R^2+40Rr-4r^2+8\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r).$$

Перепишем его в безразмерной форме:

$$\left(\frac{a+b+c}{R}\right)^2 \leqslant 8+20\frac{2r}{R}-\left(\frac{2r}{R}\right)^2+8\sqrt{1-\frac{2r}{R}}\left(1-\frac{2r}{R}\right).$$

Параметр $2r/R$ можно назвать коэффициентом правильности треугольника: если этот коэффициент равен единице, то треугольник правильный; чем меньше значение этого коэффициента, тем более «вытянутым» будет треугольник.

Поскольку при гомотетии с коэффициентом k и стороны треугольника, и радиусы его вписанной и описанной окружностей меняются в k раз, полученный выше результат можно сформулировать следующим образом: если коэффициент правильности треугольника равен μ, то максимальное

5) Можно было бы поступить так же и в предыдущем случае. Поэтому становится понятно, почему $(R-2r)^2$ вынеслось за скобки.

значение квадрата отношения его периметра к радиусу описанной окружности равно

$$8+20\mu-\mu^2+8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu).$$

Рассмотрим функцию

$$f(\mu)=8+20\mu-\mu^2+8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu).$$

Очевидно, что её производная

$$f'(\mu)=20-2\mu-12\sqrt{1-\mu}$$

при $\mu\leqslant 1$ положительна. Значит, функция $f(\mu)$ возрастает.

А тогда тот же результат можно сформулировать следующим образом: если коэффициент правильности треугольника не превосходит μ, то максимальное значение квадрата отношения его периметра к радиусу описанной окружности равно

$$8+20\mu-\mu^2+8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu).$$

При $\mu=1$ получим безусловный результат: для любого треугольника отношение периметра к радиусу описанной окружности не превосходит $3\sqrt{3}$. Таким образом, этот классический результат является не просто следствием, а частным случаем результата, полученного в начале параграфа.

§ 4. Тождества и многочлены

Теперь мы вышли на оперативный простор. Дело в том, что радиус описанной окружности R, радиус вписанной окружности r и полупериметр p уже однозначно определяют треугольник. А значит, через них можно выразить любую величину, связанную с треугольником, и как следствие получить оценку этой величины в терминах R и r.

Например, из равенств (3) и

$$(2p)^2=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)$$

получается тождество

$$ab+bc+ac=r^2+4Rr+p^2.$$

Поэтому из полученных выше оценок p^2 через R и r следуют аналогичные оценки для $ab+bc+ac$:

$$2R^2+6Rr-2r^2-2d(R-2r)\leqslant ab+bc+ac\leqslant 2R^2+6Rr-2r^2+2d(R-2r).$$

Из теоремы синусов несложно получить тождество $abc=4pRr$. Отсюда моментально находятся наибольшее и наименьшее значения произведения abc при заданных R и r.

Два использованных тождества вместе с равенством $a + b + c = 2p$ можно суммировать в виде соотношения

$$(t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - 2pt^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)t - 4pRr.$$

Вполне естественно, что многие элементы треугольника встречаются тройками. Поэтому можно образовать кубический многочлен, корнями которого являются элементы тройки. Регулярный способ вычисления коэффициентов таких многочленов предложен в [4, с. 31–33]. Таким образом можно доказывать новые неравенства.

Например, тройке $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы треугольника, соответствует многочлен

$$t^3 - \left(1 + \frac{r}{R}\right)t^2 + \left(\frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}\right)t - \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R} \leqslant \frac{3}{2},$$

многократно предлагавшееся на различных олимпиадах. Но можно получить и ещё много интересного.

Мы не будем останавливаться на дальнейших следствиях подробно, лишь перечислим несколько троек и соответствующих им многочленов.

- Тройка $(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$ и многочлен

$$t^3 - \frac{p}{R}t^2 + \left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}\right)t - \frac{pr}{2R^2}.$$

- Тройка $(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma)$ и многочлен

$$t^3 - \left(\frac{2pr}{p^2 - (2R+r)^2}\right)t^2 + \left(\frac{p^2 - 4Rr - r^2}{p^2 - (2R+r)^2}\right)t - \frac{2pr}{p^2 - (2R+r)^2}.$$

- Тройка $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$ и многочлен

$$t^3 - \left(\frac{4R+r}{p}\right)t^2 + t - \frac{r}{p}.$$

- Тройка высот треугольника (h_a, h_b, h_c) и многочлен

$$t^3 - \left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}\right)t^2 + \left(\frac{2p^2 r}{R}\right)t - \frac{2p^2 r^2}{R}.$$

Большое число готовых результатов можно найти в [10].

Дальнейшее оставляем на усмотрение читателя. Значительное число «прототипов» можно найти в [3], а ещё большее — в [9, 10].

Упражнение 7 (Международная олимпиада, 1964 г.). Обозначим через a, b, c длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

Упражнение 8. Докажите для углов треугольника α, β, γ неравенство

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqslant \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha).$$

На самом деле, два предыдущих неравенства — это в точности неравенство (1). Но, согласитесь, узнать его нелегко!

§ 5. Упрощения

В классической математике доказательство неравенств далеко не всегда является самоцелью. Гораздо чаще доказанное неравенство служит инструментом для решения других задач. Но чтобы инструмент было удобно применять, он должен быть простым.

Выше в § 3 была получена (см. (F)) следующая оценка для полупериметра треугольника:

$$p \leqslant \sqrt{2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r)}. \tag{5}$$

Она довольно точная, но вот простой её назвать трудно. Поэтому естественно попробовать получить более грубые, но и более простые оценки. Выше несколько таких примеров было приведено. Они получались доказательством верхней оценки для правой части этого неравенства. Читатель мог убедиться, что когда такая оценка найдена, доказать её в общем-то несложно. А вот как её найти?

Попробуем разобраться в этом. Здесь нам будет полезен компьютер. Начнём с линейных оценок, т. е. будем искать неравенства вида

$$p \leqslant \lambda R + \sigma r.$$

Разделим неравенство (5) на R и выразим правую часть получившегося неравенства через параметр $\mu = 2r/R$. Получим

$$\frac{p}{R} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{8+20\mu-\mu^2+8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu)} = f(\mu).$$

На рис. 3 приведён[6] график[7] функции $f(\mu)$ на отрезке $[0,1]$. Глядя на него, можно почти сразу получить нужные результаты.

Прежде всего, видно, что функция $f(\mu)$ монотонно возрастает[8], значит, её значение не превосходит значения $3\sqrt{3}/2$ на правом конце отрезка. Отсюда немедленно получается уже доказанный результат $p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R$.

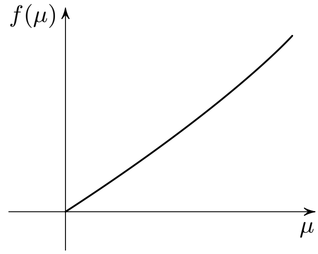

Рис. 3

Но можно получить гораздо более точную оценку, заметив, что график функции $f(\mu)$ на отрезке $[0,1]$ лежит ниже хорды, соединяющей его концы. Содержащая эту хорду прямая является графиком функции

$$g(\mu) = 2 + \Big(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\Big)\mu.$$

Поэтому возникает гипотеза, что $f(\mu) \leqslant g(\mu)$. Доказать её уже несложно.

Возведём последнее неравенство в квадрат, изолируем член, содержащий радикал, и снова возведём получившееся неравенство в квадрат. Получим неравенство

$$\bigg(\Big(2 + \Big(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\Big)\mu\Big)^2 - 2 - 5\mu + \frac{1}{4}\mu^2\bigg)^2 \geqslant 4(1-\mu)^3.$$

Разность левой и правой частей этого неравенства — многочлен четвёртой степени. Но мы знаем, что графики функций $f(\mu)$ и $g(\mu)$ пересекаются в двух точках. Поэтому интересующий нас многочлен имеет два корня 0 и 1. А значит, он разлагается в произведение двух линейных множителей и квадратного трёхчлена, который, в свою очередь, нетрудно разложить на множители. Сделав это, придём к неравенству

$$\frac{1}{169}(229 - 132\sqrt{3})\mu(1-\mu)^2(169\mu + 334 + 216\sqrt{3}) \geqslant 0,$$

которое уже очевидно.

Таким образом, получаем неравенство $p \leqslant 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$. В § 3 фактически показано, что для любых R и r найдётся треугольник, для которого

---

[6] Здесь и далее важна качественная картина. Поэтому масштаб по оси ординат и сдвиг графика вдоль этой оси выбираются так, чтобы картина была наиболее наглядной. В данном случае был выбран сдвиг, равный 2, и фактически нарисован график функции $\frac{2\sqrt{3}}{9}(f(\mu) - 2)$.

[7] Этот и следующий графики я бы советовал читателю нарисовать в большем размере, маленький график не очень информативен.

[8] Ссылка на график, разумеется, не является доказательством. Но в данном случае картинка нужна только для того, чтобы сформулировать гипотезу. А для этого все средства хороши. Позже гипотеза будет строго доказана.

неравенство (5) обращается в равенство. Поэтому понятно, что это наилучшая из линейных оценок для полупериметра. Если кому-то кажется, что коэффициент при r слишком сложный, то это неравенство можно ещё огрубить, например, так: $p < 2(R + r)$.

Обратимся к более сложным, но и более точным квадратичным оценкам. Для этого запишем доказанное неравенство (см. (5))

$$p^2 \leqslant 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R^2 - 2Rr}\,(R - 2r)$$

в «безразмерной» форме

$$\frac{4p^2}{R^2} \leqslant 8 + 20\mu - \mu^2 + 8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu) = f(\mu).$$

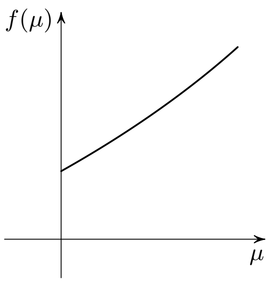

Рис. 4

Глядя на график функции $f(\mu)$ (см. рис. 4), можно прийти к гипотезе, что для любой точки $\mu_0 \in [0, 1]$ существует такой квадратный трёхчлен $g(\mu)$, что $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ для всех $\mu \in [0, 1]$ и $g(\mu_0) = f(\mu_0)$, а, значит, квадратичной оценки, которая лучше других одновременно для всех μ, не существует.

Попробуем найти наилучшую оценку в более узком классе квадратных трёхчленов. А именно, потребуем, чтобы для искомого квадратного трёхчлена g выполнялись равенства $g(0) = f(0)$ и $g(1) = f(1)$. Поскольку $f(0) = 16$, а $f(1) = 27$, такой многочлен можно записать в виде $g(\mu) = 16 + 11\mu + \lambda\mu(\mu - 1)$, где λ — некоторый параметр. Для того чтобы неравенство $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ выполнялось для всех μ из отрезка $[0, 1]$, необходимо, чтобы $g'(0) \geqslant f'(0)$, т. е. $11 - \lambda \geqslant 8$, и $g'(1) \leqslant f'(1)$, или $11 + \lambda \leqslant 18$. Отсюда $\lambda \leqslant 3$. Но чем больше λ, тем более сильное неравенство мы получим. Поэтому естественно рассмотреть случай $\lambda = 3$.

Тогда придём к неравенству

$$16 + 11\mu + 3\mu(\mu - 1) \geqslant 8 + 20\mu - \mu^2 + 8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu).$$

Доказать его уже несложно.

Таким образом, имеем

$$\frac{4p^2}{R^2} \leqslant 3\mu^2 + 8\mu + 16,$$

откуда $p^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Упражнение 9. Найдите наилучшую оценку вида $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ в классе квадратных трёхчленов $g(\mu)$, удовлетворяющих условию

$$g\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Упражнение 10. Докажите сформулированную выше гипотезу: для любой точки $\mu_0 \in [0, 1]$ существует такой квадратный трёхчлен $g(\mu)$, что $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ для всех $\mu \in [0, 1]$ и $g(\mu_0) = f(\mu_0)$.

Полученная выше оценка $f(\mu) \leqslant 3\mu^2 + 8\mu + 16$ «лучше» других, но в некотором специальном смысле: графики функций $f(\mu)$ и $g(\mu) = 3\mu^2 + 8\mu + 16$ не только касаются в одной точке при $\mu = 0$, но ещё и пересекаются в другой точке при $\mu = 1$.

Аналогичным образом можно упрощать нижние оценки для полупериметра, а также получать «простые» оценки для других величин, связанных с треугольником.

§ 6. Некоторые обобщения

В данном параграфе[9] будет намечено одно из возможных направлений для небольшого самостоятельного исследования. Я ограничусь лишь изложением основных идей (с картинками) и формулировкой некоторых вопросов. Для получения конкретных результатов останется лишь проделать кое-какие выкладки.

Молодым читателям я настоятельно советую повозиться с формулами. Навык работы с формулами весьма важен для профессионального математика. И, видимо, это тот случай, когда учиться надо «не по учебникам». В средней школе этому уделяется большое внимание. Но именно это повышенное внимание часто напрочь отбивает желание заниматься такого рода задачами. По-видимому, это связано с тем, что школьные упражнения связаны с преобразованиями ради преобразований и лишены содержательного смысла. В данном случае это не так, и поиск оптимального пути решения может оказаться весьма интересным.

В этом параграфе нас будут интересовать неравенства вида

$$uR^k + vr^k + wp^k \geqslant 0,$$

которые справедливы для всех треугольников. Здесь k — фиксированный параметр, а коэффициенты u, v, w мы будем искать. Начнём со случая $k = -2$, которому соответствуют неравенства вида

$$\frac{u}{R^2} + \frac{v}{r^2} + \frac{w}{p^2} \geqslant 0.$$

Данное неравенство однородно: при умножении всех переменных R, r, p на одно и то же число t неравенство превращается в эквивалентное (такому

[9] Здесь я использовал некоторые идеи и результаты С. В. Маркелова (см. `http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=207461` и `http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=211278`), обсуждавшиеся также с А. А. Заславским. Выражаю им свою признательность.

умножению соответствует переход от треугольника к подобному ему). Поэтому можно провести «нормировку» задачи, чтобы уменьшить число переменных, ограничить их значения и сделать возможным использование картинок. Поскольку коэффициент k отрицателен, ограничимся рассмотрением треугольников, у которых $r=1$. Это позволит рисовать графики на конечном интервале.

Тогда основное неравенство (F) перепишется в виде

$$2R^2+10R-1-2\sqrt{R^2-2R}\,(R-2)\leqslant p^2\leqslant 2R^2+10R-1+2\sqrt{R^2-2R}\,(R-2).$$

Сделаем замену переменных $x=4/R^2$, $y=1/p^2$ (коэффициент 4 выбран для того, чтобы рисовать графики на отрезке $[0,1]$, что будет удобно для сравнения результатов при разных k). Получим

$$\frac{8}{x}+\frac{20}{\sqrt{x}}-1-2\sqrt{\frac{4}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}\Big(\frac{2}{\sqrt{x}}-2\Big)\leqslant\frac{1}{y}\leqslant\frac{8}{x}+\frac{20}{\sqrt{x}}-1+2\sqrt{\frac{4}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}\Big(\frac{2}{\sqrt{x}}-2\Big),$$

или

$$\frac{1}{x}\Big(8+20\sqrt{x}-x-8\Big(\sqrt{1-\sqrt{x}}\Big)^3\Big)\leqslant\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{x}\Big(8+20\sqrt{x}-x+8\Big(\sqrt{1-\sqrt{x}}\Big)^3\Big),$$

что эквивалентно двойному неравенству

$$\frac{x}{8+20\sqrt{x}-x+8\big(\sqrt{1-\sqrt{x}}\big)^3}\leqslant y\leqslant\frac{x}{8+20\sqrt{x}-x-8\big(\sqrt{1-\sqrt{x}}\big)^3}$$

Выше было доказано неравенство $R\geqslant 2r$, поэтому представляет интерес случай $x\leqslant 1$.

Построим на отрезке $[0,1]$ (см. рис. 5) графики функций

$$\varphi_{-2}(x)=\frac{x}{8+20\sqrt{x}-x+8\big(\sqrt{1-\sqrt{x}}\big)^3}\quad\text{и}\quad\psi_{-2}(x)=\frac{x}{8+20\sqrt{x}-x-8\big(\sqrt{1-\sqrt{x}}\big)^3}.$$

Как было доказано выше, точки (x,y), соответствующие реальным треугольникам, лежат в области Π_{-2}, ограниченной графиками этих функций.
треугольник[10].

[10] Это утверждение верно, но в полном объёме здесь не используется. Нам нужно лишь понять, что неравенства, получаемые ниже, обращаются в равенство для некоторых треугольников. Для этого достаточно установить, что каждой точке границы области Π_{-2} соответствует треугольник. Это можно сделать прямым вычислением, имея в виду, что точкам границы соответствуют равнобедренные треугольники. Остальное следует из «соображений непрерывности». Уточнение последнего утверждения и идеи его доказательства содержатся в следующем параграфе.

Нас интересуют неравенства вида

$$\frac{u}{R^2}+\frac{v}{r^2}+\frac{w}{p^2}\geqslant 0,$$

чему в новых переменных соответствуют линейные неравенства. Таким образом, задача сводится к поиску полуплоскостей, которые целиком содержат область Π_{-2}.

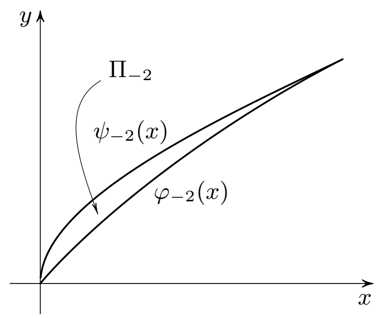

Рис. 5

Одна из них лежит выше хорды, соединяющей точки $(0,0)$ и $(1,1/27)$ графика функции $\varphi_{-2}(x)$. Это не очень интересно, поскольку соответствующее неравенство легко сводится к уже доказанному неравенству $p\leqslant 3\sqrt{3}R$.

А ещё бесконечное число «хороших» неравенств получается, если провести касательные к графику функции $\psi_{-2}(x)$ при различных $x_0\in(0,1]$. Все эти неравенства независимы, поскольку обращаются в равенство для разных треугольников.

Стоит поискать те из них, у которых коэффициенты попроще.

Обратимся к уже хорошо разобранному случаю $k=1$. В данном случае k положительно, поэтому нормировку лучше провести условием $R=1$. Сделаем замену переменных $x=2r$, $y=p$. В этих переменных основное неравенство (F) примет вид

$$\sqrt{2+5x-\frac{1}{4}x^2-2\left(\sqrt{1-x}\right)^3}\leqslant y\leqslant\sqrt{2+5x-\frac{1}{4}x^2+2\left(\sqrt{1-x}\right)^3}.$$

Нарисуем на отрезке $[0,1]$ (см. рис. 6) графики функций

$$\varphi_1(x)=\sqrt{2+5x-\frac{1}{4}x^2-2\left(\sqrt{1-x}\right)^3}$$

и

$$\psi_1(x)=\sqrt{2+5x-\frac{1}{4}x^2+2\left(\sqrt{1-x}\right)^3}.$$

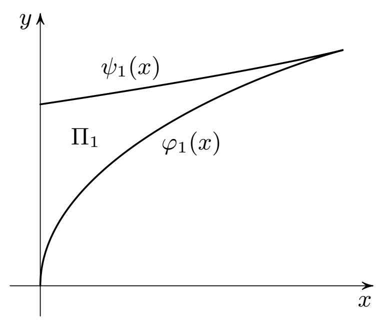

Рис. 6

Точки (x,y), соответствующие треугольникам, лежат в области Π_1, ограниченной графиками этих функций и осью ординат.

Здесь сразу виден новый качественный эффект. Выпуклая оболочка множества Π_1 — это треугольник. Поэтому существует три «самых сильных» неравенства вида $uR+vr+wp\geqslant 0$, справедливых для всех треугольников (они соответствуют сторонам выпуклой оболочки множества Π_1). Это уже известные нам неравенства $r \geqslant 0$, $p \geqslant 3\sqrt{3}r$ и $2R + (3\sqrt{3} - 4)r \geqslant p$. Все остальные такие неравенства являются следствиями этих трёх. Естественно назвать такие три неравенства базисными.

Возникает вопрос: а при каких ещё значениях k выпуклая оболочка множества Π_k является многоугольником и, соответственно, существует конечная система базисных неравенств? Выше мы видели, что при $k = -2$ каждой точке отрезка $[0, 1]$ соответствует «своё» базисное неравенство, т. е. их бесконечно много.

В случае когда выпуклая оболочка множества Π_k — многоугольник, нетрудно выписать явное условие на коэффициенты u, v, w, при которых неравенство вида $uR^k + vr^k + wp^k \geqslant 0$ выполняется для всех треугольников.

При $k = 1$ это делается так. Треугольник содержится в некоторой полуплоскости тогда и только тогда, когда в этой полуплоскости содержатся все его вершины. Поэтому для того, чтобы неравенство $uR + vr + wp \geqslant 0$, или, что то же самое, неравенство

$$u + \frac{1}{2}vx + wy \geqslant 0,$$

выполнялось для всех треугольников, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $u \geqslant 0, u + 2v \geqslant 0$ и $2u + v + 3\sqrt{3}w \geqslant 0$ (первое соответствует вершине $(0, 0)$ выпуклой оболочки множества Π_1, второе — вершине $(0, 2)$, третье — оставшейся вершине).

Интересная задача: описать все аналогичные тройки коэффициентов u, v, w при других k, например, при $k = -2$.

Наконец, рассмотрим случай $k = 2$. Используем нормировку $R = 1$ и замену переменных $x = 4r^2$, $y = p^2$. Графики функций

$$\varphi_2(x) = 2 + 5\sqrt{x} - \frac{1}{4}x - 2\left(\sqrt{1 - \sqrt{x}}\right)^3$$

и

$$\psi_2(x) = 2 + 5\sqrt{x} - \frac{1}{4}x + 2\left(\sqrt{1 - \sqrt{x}}\right)^3$$

приведены на рис. 7. Этот рисунок стоит рассмотреть подробнее. Нас интересует, в частности, выпуклость функции $\psi_2(x)$. Поэтому «уберём линейный тренд», вычтя, например, $2x$ (это на выпуклость не влияет). На рис. 8 приведена часть полученного графика. Теперь хорошо видно, что при малых x функция $\psi_2(x)$ вогнута, а при больших — выпукла.

Вернёмся к рис. 7. Граница выпуклой оболочки множества Π_2 выглядит следующим образом. В неё входит отрезок, соединяющий концы $(0, 1)$ и $(1, 27/4)$ графика функции $\varphi_2(x)$. Далее идёт отрезок прямой, проходящей через точку $(1, 27/4)$ и касающейся графика функции $\psi_2(x)$ ещё

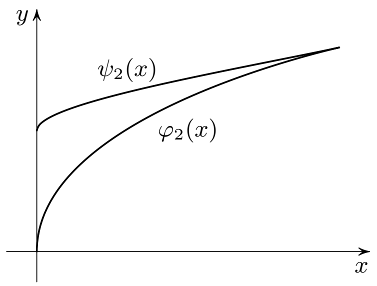

Рис. 7

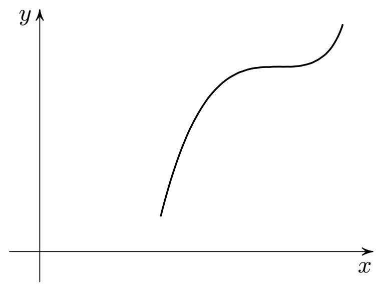

Рис. 8

в одной точке (x_0, y_0) (найдите эту прямую и эту точку[11]). Далее идёт дуга графика функции $\psi_2(x)$. И, наконец, часть оси ординат.

Первому отрезку соответствует уже не раз упоминавшееся неравенство $p \geqslant 3\sqrt{3}r$. Второму отрезку соответствует гораздо более интересное и в некотором смысле уникальное неравенство (какое?). Это неравенство обращается в равенство сразу для двух треугольников: правильного и равнобедренного, но неравностороннего (какого?). В каждой точке дуги графика функции $\psi_2(x)$ можно провести касательную, которой соответствует своё неравенство, обращающееся в равенство и не следующее из других.

Разумеется, стоит рассмотреть и какие-то другие значения k. Особый интерес представляет случай $k = -1$. Этому случаю, по сути, соответствуют неравенства вида $upr + vpR + wrR \geqslant 0$. Поэтому можно попытаться поискать ответ и на такой вопрос: при каких значениях коэффициентов u, v, w, u', v', w' справедливо общее квадратичное неравенство вида

$$uR^2 + vr^2 + wp^2 + u'pr + v'pR + w'rR \geqslant 0?$$

И ещё один круг вопросов. При изменении k от 0 до 1 происходит качественная перестройка границы выпуклой оболочки множества Π_k. Вначале график функции $\psi_k(x)$ лежит ниже хорды, соединяющей его концы, а в какой-то момент начинает «высовываться» выше. В какой именно момент это происходит? А может быть, ещё при каких-то значениях k происходят подобные перестройки? Как они выглядят? Эти «критические» значения k и соответствующие неравенства заслуживают особого внимания.

§ 7. Уточнение теоремы Фейербаха

Вернёмся к «динамической» формулировке теоремы Фейербаха. Пусть вписанная окружность ω и описанная окружность Ω треугольника фик-

[11] Здесь может помочь следующая «хорошо забытая» идея. Для того чтобы найти кратный корень многочлена, можно найти с помощью алгоритма Евклида наибольший общий делитель этого многочлена и его производной.

сированы, а его вершина A движется по окружности Ω. Эксперимент показывает, что *когда точка A совершает один оборот по окружности Ω, центр E окружности Эйлера*[12] *совершает три оборота по окружности ϖ*. Попробуем доказать этот факт.

Пусть прямая, проходящая через центры I и O вписанной и описанной окружностей, пересекает окружность Ω в точках M и N (см. рис. 9). Будем считать, что точка I лежит между точками M и O. Обозначим точки пересечения отрезков IM и IN с окружностью ω через X и Y соответственно. Через точки X и Y проведём хорды X_0X_1 и Y_0Y_1 окружности Ω, перпендикулярные диаметру MN (считаем, что точки X_0 и Y_0 лежат по одну сторону от диаметра, а точки X_1 и Y_1 — по другую).

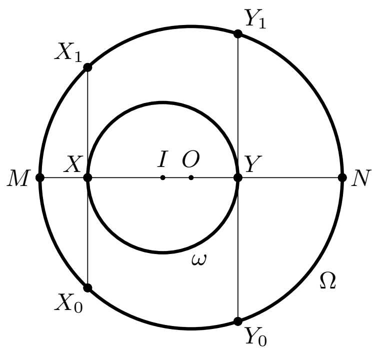

Рис. 9

На дуге Y_0NY_1 может лежать не более одной вершины треугольника, вписанного в Ω и описанного вокруг ω (это и следующие утверждения будут точными, если считать, что дуге принадлежит ровно один из концов). Действительно, если бы этой дуге принадлежали две вершины B и C треугольника, то его сторона BC и вписанная окружность ω лежали бы по разные стороны от прямой Y_0Y_1, а потому не могли бы касаться.

По аналогичным причинам на дугах Y_1X_1, X_1MX_0 и X_0Y_0 лежит не более одной вершины треугольника. Более того, дуги Y_1X_1 и X_0Y_0 не могут содержать вершины треугольника одновременно (иначе сторона треугольника пересекала бы окружность ω).

Таким образом, на каждой из дуг Y_0NY_1 и X_1MX_0 лежит по одной из вершин треугольника, а третья вершина принадлежит одной из дуг Y_1X_1 и X_0Y_0.

Зафиксируем расстояние x от точки M до некоторой точки A_* на отрезке YN. Этому расстоянию соответствует единственная точка A на дуге NY_1, для которой отрезок AA_* перпендикулярен MN. По теореме Понселе существует единственный треугольник ABC с данной вершиной A, вписанный в Ω и описанный вокруг ω, а значит, однозначно определён его полупериметр p.

Обратно: если заданы радиусы R и r окружностей Ω и ω и полупериметр треугольника p, то стороны треугольника являются корнями уравнения

$$t^3 - 2pt^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)t - 4pRr = 0,$$

[12] Вырожденный случай, когда центры окружностей ω и Ω совпадают, мы рассматривать не будем.

и потому определены однозначно. Но существует только два симметричных относительно MN треугольника с заданными сторонами, для которых окружности Ω и ω являются описанной и вписанной соответственно. Следовательно, если A_* — проекция на отрезок YN вершины этого треугольника, принадлежащей дуге Y_0NY_1, то расстояние x от A_* до точки M определено однозначно.

В двух предыдущих абзацах определены две функции $p(x)$ и $x(p)$.

Упражнение 11. Проверьте, что функции $p(x)$ и $x(p)$ непрерывны.

Если точка A_* совпадает с точкой Y или N, то соответствующий треугольник ABC будет равнобедренным и, как установлено выше, его периметр соответственно минимален или максимален среди возможных.

Итак, функция $p(x)$ определена на некотором отрезке, непрерывна, принимает каждое своё значение не более одного раза и минимальна на левом конце области определения. Значит, она монотонно возрастает.

Упражнение 12. Докажите это.

Таким образом, если точка A движется по дуге Y_0N от точки Y_0 к точке N, то периметр соответствующего треугольника монотонно возрастает. Но из формул (2) и (3) видно, что при этом будет монотонно убывать расстояние от точки O до точки пересечения медиан треугольника. А значит, будет убывать и расстояние OE между центрами описанной окружности и окружности Эйлера. Но в силу теоремы Фейербаха точка E всё время находится на окружности ϖ, следовательно, она пробегает монотонно половину этой окружности, когда точка A пробегает дугу Y_0N.

Аналогично: когда точка А пробежит дугу NY_1, точка E пробежит вторую половину окружности ϖ. Далее, если вершина A движется по дуге Y_1X_1, то какая-то другая вершина движется по дуге Y_0N, а потому точка E вновь пробегает первую половину окружности ϖ. Продолжая эти рассуждения, убедимся в справедливости доказываемого факта.

Разумеется, хотелось бы иметь элементарно-геометрическое доказательство этого факта. Но я таковым не располагаю. Более того, есть основания сомневаться, что такое доказательство вообще существует.

В частности, можно заметить, что если точка A движется по окружности Ω с постоянной скоростью, то движение точки E по окружности ϖ неравномерно[13)]. Действительно, точка E проходит половину окружности и когда точка A пробегает дугу NY_1, и когда она пробегает дугу X_1M. Но эти две дуги имеют разные длины!

[13)] Поэтому аналогия с обручем и гимнасткой не совсем точна: в данном случае обруч движется по талии гимнастки «с проскальзыванием».

Читатель, знакомый с основами теории Галуа, может попробовать выяснить, всегда ли можно построить циркулем и линейкой треугольник, у которого заданы периметр и радиусы вписанной и описанной окружностей.

§ 8. Неравенства для остроугольных треугольников

Применим полученные результаты для доказательства следующего факта: треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда $p > 2R + r$.

Начнём с рассмотрения случая, когда центр O описанной окружности лежит вне вписанной окружности ω, т. е. $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} > r$. Проведём через точку O две касательные к окружности ω (см. рис. 10). Внутри одного из углов, ограниченных этими прямыми, лежит окружность ω. Вертикальный угол высекает на описанной окружности дугу QT. Треугольник является остроугольным, если центр описанной окружности лежит внутри него. А для этого необходимо и достаточно, чтобы одна из его вершин лежала на дуге QT. Как было установлено, периметр треугольника тем меньше, чем дальше его вершина от середины N дуги QT. Поэтому достаточно доказать, что для треугольника с вершиной Q выполняется равенство $p = 2R + r$. Но этот треугольник прямоугольный, и соответствующий факт хорошо известен (и доказывается совсем просто).

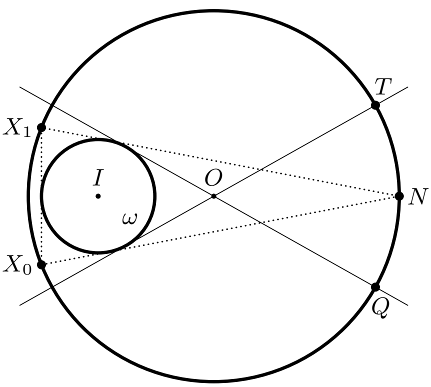

Рис. 10

В случае $d < r$ все треугольники, описанные вокруг окружности радиуса r и вписанные в окружность радиуса R, являются остроугольными, так как содержат центр описанной окружности. Поэтому достаточно доказать, что неравенство $p > 2R + r$ выполняется для треугольника с наименьшим периметром, т. е.

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2d(R - 2r) > (2R + r)^2 = 4R^2 + 4Rr + r^2.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2r(R - 2r) > 4R^2 + 4Rr + r^2,$$

или $2Rr + r^2 > R^2$. А это в точности условие $d < r$.

Случай $d = r$ оставим читателю.

Доказанное утверждение характеризует остроугольные треугольники «в терминах положения точки A». Можно характеризовать их и «в терминах положения точки E».

Упражнение 13. Докажите, что треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$.

Докажем следующий результат, принадлежащий П. Эрдёшу: если h — длина наибольшей высоты нетупоугольного треугольника, то $h \geqslant R + r$. Его можно доказать методами элементарной геометрии ([3, задача 10.79], [6, задача 663]). Покажем, что этот результат можно получить и методами, развитыми выше.

Воспользуемся обозначениями рис. 9. Треугольник X_0NX_1 имеет максимальный периметр, а значит, и наибольшую площадь, ведь она равна произведению полупериметра на постоянный радиус вписанной окружности. Кроме того, у него самая маленькая сторона X_0X_1, следовательно, самая большая высота NX. Будем двигать вершину треугольника по дуге NY_1. Площадь его будет уменьшаться, а противоположная выбранной вершине сторона будет увеличиваться. (Убедитесь сами, что при таком движении увеличивается угол между лучом OI и перпендикуляром, опущенным на рассматриваемую сторону из точки O, а следовательно, уменьшается расстояние от точки O до этой стороны.)

Если центр описанной окружности O лежит вне вписанной, то такое движение можно продолжать до тех пор, пока одна из сторон не пройдёт через точку O, т. е. треугольник не станет прямоугольным. В этом случае наибольшая высота треугольника равна его наибольшему катету. А длина этого катета равна сумме радиуса r и длины наибольшего отрезка от точки касания гипотенузы и вписанной окружности до конца гипотенузы, которая больше или равна R (рис. 11).

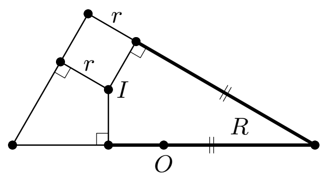

Рис. 11

Если же точка O лежит внутри окружности ω, то движение можно продолжать до тех пор, пока выбранная высота не перестанет быть наибольшей. Это произойдёт, когда её длина станет равна длине другой высоты, т. е. для равнобедренного треугольника Y_0MY_1 (рис. 12). Остаётся доказать неравенство для этого треугольника.

Будем характеризовать треугольник радиусом R и углом 2φ при вершине M. Тогда угол между основанием и высотой, проведённой к боковой стороне, равен φ, основание треугольника равно $2R\sin 2\varphi$, а высота к боковой стороне

$$h = 2R\sin 2\varphi\cos\varphi = 4R\sin\varphi\cdot(1 - \sin^2\varphi).$$

Кроме того,

$$r = MI\sin\varphi = (R-d)\sin\varphi = \left(R - \sqrt{R^2-2Rr}\right)\sin\varphi,$$

откуда находим $r = 2R(\sin\varphi - \sin^2\varphi)$. Следовательно, нужно доказать неравенство

$$4R(\sin\varphi - \sin^3\varphi) \geqslant R + 2R(\sin\varphi - \sin^2\varphi),$$

или

$$-4\sin^3\varphi + 2\sin^2\varphi + 2\sin\varphi - 1 \geqslant 0.$$

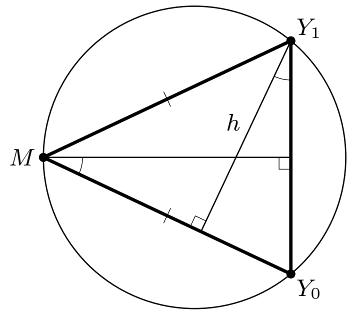

Рис. 12

При этом не надо забывать, что 2φ — острый угол, поэтому $\sin\varphi \leqslant \sqrt{2}/2$. Кроме того, в интересующем нас случае высота равнобедренного треугольника, проведённая к боковой стороне, не меньше высоты того же треугольника, проведённой к основанию. Значит, основание не меньше боковой стороны и, следовательно, угол при вершине не меньше углов при основании. А тогда $2\varphi \geqslant \pi/3$ и $\sin\varphi \geqslant 1/2$.

Заменой $t = \sin\varphi$ задача сводится к доказательству неравенства

$$-4t^3 + 2t^2 + 2t - 1 = -(2t-1)(2t^2-1) \geqslant 0$$

при $1/2 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}/2$. Это уже очевидно. Задача решена.

Упражнение 14. Докажите, что для остроугольных треугольников выполняется неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$.

Упражнение 15. Докажите, что для тупоугольных треугольников выполняется неравенство

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

Упражнение 16 [11, 1989 г., 1178]. а) Докажите, что для нетупоугольного треугольника выполняется неравенство $2(R+r) \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

б) При каком условии это неравенство обращается в равенство?

§ 9. Немного алгебры

В дальнейшем нам понадобится выражение площади Σ треугольника OHI через стороны треугольника ABC. По свидетельству [10], этот результат был получен ещё в 1890 г. Но найти доказательство в общедоступном источнике мне не удалось. Поэтому приведу его полностью.

По теореме Эйлера площадь треугольника OHI втрое больше площади треугольника OMI. Стороны последнего можно найти. По формуле Эйлера сторона $d = OI$ удовлетворяет условию $d^2 = R^2 - 2Rr$. Из формул (2) и (3) получим условие для стороны $e = OM$:

$$e^2 = R^2 - \frac{1}{9}(2p^2 - 2r^2 - 8Rr).$$

Наконец, известно и соотношение для стороны $f = IM$:

$$f^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$$

(см. [6, задача 490в]).

Поэтому можно воспользоваться формулой Герона, которую удобно использовать в развёрнутой форме:

$$16\left(\frac{\Sigma}{3}\right)^2 = 2(d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2) - (d^4 + e^4 + f^4).$$

Подставляя, получим

$$16\Sigma^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2) - (64R^3r + 48R^2r^2 + 12Rr^3 + r^4),$$

или

$$16\Sigma^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R + r)^3. \qquad (6)$$

Умножим эту формулу на r^2:

$$16\Sigma^2r^2 = -p^4r^2 + 2(2R^2r^2 + 10Rr^3 - r^4)p^2 - (4Rr + r^2)^3$$

и выразим радиусы вписанной и описанной окружностей через площадь, полупериметр и стороны треугольника ABC: $r = \dfrac{S}{p}$ и $R = \dfrac{abc}{4S}$. Получим

$$16\Sigma^2r^2 = -p^2S^2 + 2\left(\frac{(abc)^2}{8p^2} + 5\frac{abc}{2p}\cdot\frac{S^2}{p^2} - \frac{S^4}{p^4}\right)p^2 - \left(\frac{abc}{p} + \frac{S^2}{p^2}\right)^3. \qquad (7)$$

Теперь, воспользовавшись формулой Герона для площади S, нетрудно увидеть, что в правой части последней формулы стоит однородный симметрический многочлен шестой степени от переменных a, b, c. Обозначим его через $F(a, b, c)$.

Рассмотрим множество Δ троек (a, b, c) положительных чисел, удовлетворяющих условиям $a < 2b$, $b < 2a$, $a < 2c$, $c < 2a$, $b < 2c$, $c < 2b$, и фиксируем произвольную точку (a, b, c) из множества Δ. Пусть $\varphi(x) = F(x, b, c)$.

Теперь обратимся к геометрии. Для равнобедренных треугольников ABC треугольник OHI вырождается, поэтому его площадь Σ становится равной нулю. Следовательно, $\varphi(b) = F(b, b, c) = 0$. Но если x достаточно близко к b, то из отрезков x, b и c можно составить треугольник. Следовательно, левая часть формулы (7) будет неотрицательна. Значит, $x = b$ — корень многочлена $\varphi(x)$, причём чётной кратности. Тогда этот многочлен делится на $(x - b)^2$.

По аналогичным причинам он делится и на $(x - c)^2$.

Следовательно, $F(a, b, c) = \Phi(a, b, c)(a - b)^2(a - c)^2$, где $\Phi(a, b, c)$ — однородный многочлен второй степени. Но многочлен $F(a, b, c)$ — симметрический, поэтому $\Phi(a, b, c) = k(b - c)^2$, где k — некоторая константа. Отсюда

$$F(a, b, c) = k(b - c)^2(a - b)^2(a - c)^2.$$

Константу k можно найти, вычислив левую и правую части равенства

$$-p^2S^2 + 2\left(\frac{(abc)^2}{8p^2} + 5\frac{abc}{2p} \cdot \frac{S^2}{p^2} - \frac{S^4}{p^4}\right)p^2 - \left(\frac{abc}{p} + \frac{S^2}{p^2}\right)^3 = k(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$$

для какого-нибудь неравнобедренного треугольника. Удобен, например, египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Для него $S = 6$ и $p = 6$. Отсюда находим $k = 1$.

Итак, для $(a, b, c) \in \Delta$ установлено равенство

$$F(a, b, c) = (b - c)^2(a - b)^2(a - c)^2.$$

Но в левой и правой частях этого равенства стоят многочлены, а множество Δ открыто. Поэтому данное равенство справедливо для всех a, b, c.

Только что доказанное равенство

$$\Sigma = \frac{|(a - b)(b - c)(c - a)|}{4r} \tag{8}$$

вместе с установленным в конце § 2 неравенством $\Sigma \leqslant d(R/2 - r)$ даёт следующий результат:

$$|(a - b)(b - c)(c - a)| \leqslant 4dr\left(\frac{R}{2} - r\right). \tag{9}$$

Было бы интересно охарактеризовать в геометрических терминах треугольники, для которых неравенство (9) обращается в равенство. Впрочем, не ясно, возможно ли это? Читатели, знакомые с основами теории Галуа, могут попробовать выяснить, при всех ли значениях R и r такой треугольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

Упражнение 17. Докажите, что $IH^2 = 2r^2 + 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

Упражнение 18. Докажите, что $\Sigma = 2R^2\left|\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \gamma}{2} \sin\frac{\beta - \gamma}{2}\right|$.

Большое число интересных следствий основного неравенства (F) может натолкнуть на мысль, что любое неравенство для элементов треугольника следует из основного. Неравенство (9) опровергает эту точку зрения. Действительно, основное неравенство обращается в равенство для равнобедренных треугольников, а неравенство (9) тоже обращается в равенство, но для совсем других треугольников.

В алгебраических терминах объясняется это тем, что неравенство (9) слишком сложное. В частности, в формуле (6) стоит квадратный трёхчлен относительно переменной p^2, максимум которого достигается не на конце отрезка, а в вершине параболы.

По той же причине рушится, к сожалению, ещё одна надежда. Можно было бы ожидать, что из неравенства (9) следуют другие «интересные» циклические неравенства для сторон треугольника. На практике «очевидные» простые оценки неравенства (9) оказываются слишком грубыми. А «хорошие» оценки найти непросто.

§ 10. Знакопеременные неравенства

Несмотря на только что сказанное, иногда развитую выше технику удаётся использовать. Вот пример.

Задача M559 из «Задачника „Кванта"» ([11, 1979 г., 559]): доказать неравенство

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1.$$

Избавившись от знаменателя, перепишем это неравенство в виде

$$|a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b|<abc.$$

Выражение под модулем равно нулю, когда какие-то две переменные становятся равными. Поэтому оно должно делиться на $(a-b)(b-c)(c-a)$. Но поскольку и исходное выражение, и это произведение — многочлены третьей степени, частное должно быть константой. Эту константу можно найти, сравнив значения выражений, например, при $a=0, b=1, c=-1$. Таким образом, доказываемое неравенство приводится к виду

$$\bigl|(a-b)(b-c)(c-a)\bigr|<abc.$$

Чтобы избавиться от модуля, возведём обе части в квадрат:

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2<(abc)^2.$$

Воспользовавшись формулами (6), (8) и $abc=4pRr$, запишем

$$4r^2\bigl(-p^4+(4R^2+20Rr-2r^2)p^2-64R^3r-48R^2r^2-12Rr^3-r^4\bigr)<16R^2r^2p^2,$$

или после сокращения

$$-p^4 + (20Rr - 2r^2)p^2 - 64R^3r - 48R^2r^2 - 12Rr^3 - r^4 < 0. \qquad (10)$$

В левой части этого неравенства стоит квадратный трёхчлен относительно переменной p^2. Поэтому достаточно установить (что уже совсем не трудно) отрицательность дискриминанта

$$-256R^3r + 208R^2r^2 - 128Rr^3 = -16Rr(16R^2 - 13Rr + 8r^2).$$

Задача решена. Обсудим некоторые детали.

Начнём с простого следствия. Заменой переменных $a = x + y$, $b = x + z$, $c = y + z$ доказанное неравенство приводится к виду

$$\left|\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}\right| < 1,$$

или

$$\bigl|(x-y)(y-z)(z-x)\bigr| < (x+y)(y+z)(z+x).$$

Эти неравенства верны уже для всех положительных значений переменных. Их доказательство — непростая задача. Приведённое выше решение этой задачи можно рассматривать как доказательство методом замены переменных. Вот только вряд ли можно считать «очевидной» такую замену.

Решённую задачу заметно усложняет наличие модуля. Избавиться от него можно двумя способами. Можно заменить доказанное неравенство системой из двух неравенств

$$-1 < \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c} < 1.$$

Но мы теряем симметрию задачи: выражение $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}$ будет не симмметрическим, а кососимметрическим по любой паре переменных.

Второй способ состоит в возведении в квадрат, как мы делали выше. При этом вдвое повышается степень неравенства. В данном случае такое усложнение оказалось оправданным. Не в последнюю очередь это связано с тем, что переменная p входит в получившееся неравенство в чётных степенях. Это обстоятельство не случайно (сообразите почему).

Появление произведения $(a-b)(b-c)(c-a)$ в решении задачи тоже не случайно. Справедливо следующее утверждение: любой кососимметрический многочлен $P(a, b, c)$ представим в виде

$$P(a, b, c) = (a-b)(b-c)(c-a)\Psi(a, b, c),$$

где $\Psi(a, b, c)$ — симметрический многочлен.

Упражнение 19. Докажите это утверждение.

В случае трёх переменных циклическая группа их перестановок совпадает со знакопеременной. Отсюда вытекает следующий факт: всякий многочлен $P(a, b, c)$, не меняющийся при циклических перестановках переменных a, b, c, представим в виде $P(a, b, c) = \Phi(a, b, c) + \Psi(a, b, c)$, где $\Phi(a, b, c)$ — кососимметрический, а $\Psi(a, b, c)$ — симметрический многочлены.

Упражнение 20. Докажите это утверждение.

Читателю могло показаться, что приведённое решение предыдущей задачи основано на ряде счастливых совпадений. Комментарии показывают, что это не так. В чём здесь действительно повезло, так это в том, что в формулу (10) переменная p входит в четвёртой, а не в шестой степени. Впрочем, повозившись с максимизацией кубических многочленов, можно решить с помощью развитых выше идей и задачи, приведённые ниже. Такое решение этих задач вполне алгоритмично, хотя и не очень эстетично. Здесь мы подходим к границе области применимости развитых выше идей.

Упражнение 21 [11, 1984 г., 852б]. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}.$$

Упражнение 22 [11, 1983 г., 840]. а) Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Выясните, в каких случаях оно обращается в равенство.

б) Докажите, что для любых $x, y, z > 0$ выполнено неравенство

$$x^3y + y^3z + z^3x \geqslant x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

§ 11. Ещё одна картинка

Не хочется заканчивать статью на минорной ноте. Поэтому приведём ещё одну динамическую картинку. Но сначала два давно известных факта.

Известно, что описанная окружность делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей (см. [3, задача 5.109б]). Следовательно, центр вневписанной окружности треугольника лежит на окружности, гомотетичной описанной окружности с коэффициентом 2 и центром гомотетии в центре I вписанной окружности.

Вторая часть теоремы Фейербаха утверждает, что вневписанная окружность касается окружности девяти точек. Теперь представим себе, что вписанная и описанная окружность треугольника фиксированы, а сам треугольник «скользит» между ними. Тогда центр (любой) вневписанной окружности будет тоже двигаться по окружности, а сама вневписанная окружность будет всё время касаться окружности девяти точек (которая катится по вписанной окружности и имеет фиксированный радиус).

На основе этой картинки тоже можно получить ряд интересных результатов. Я оставляю это читателю. Сформулирую лишь некоторые известные утверждения, которые могут подсказать постановки новых задач и, возможно, пути их решения.

Далее I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника (касающихся сторон BC, AC и AB соответственно), а r_a, r_b, r_c — их радиусы.

Упражнение 23 [8, задача 46]. Вершины треугольника ABC обозначены так, что $r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$. Какие значения могут принимать r_a, r_b, r_c, если треугольник ABC

а) описан вокруг окружности радиуса 1;

б) вписан в окружность радиуса 1?

Упражнение 24 [3, задача 5.2]. Докажите, что точки A, B и C — основания высот треугольника $I_aI_bI_c$.

Упражнение 25 [3, задача 5.109а]. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC является окружностью девяти точек треугольника $I_aI_bI_c$.

Упражнение 26 [11, 1982 г., 769в]. Докажите, что площадь треугольника $I_aI_bI_c$ равна $\frac{2R}{r}S$.

Упражнение 27 [3, задача 10.41б]. Докажите неравенство

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Упражнение 28 [11, 1992 г., 1356]. Докажите, что если $abc = 4Rrr_c$, то треугольник прямоугольный.

Другие интересные картинки можно найти в [2].

Список литературы

[1] *Дубровский В., Сендеров В.* Ловушка для треугольника // Квант. 1999. № 3. С. 46–50.

[2] *Заславский А., Косов Д., Музафаров М.* Траектории замечательных точек треугольника Понселе // Квант. 2003. № 2. С. 22–25.

[3] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: Наука, 1991.

[4] *Прасолов В. В.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах. М.: МЦНМО, 2017.

[5] *Солтан В. П., Мейдман С. И.* Тождества и неравенства в треугольнике. Кишинёв: Штиинца, 1982.

[6] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. 9–11 кл. От учебной задачи к творческой. М.: Дрофа, 1996.

[7] *Шарыгин Г. И.* Лекции по элементарной геометрии. М.: МЦНМО, 2017.

[8] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970.

[9] *Bottema O., Djorjević R. Ž., Janić R. R., Mitrinović D. S., Vasić P. M.* Geometric inequalities. Groningen: Wolters — Noordhoff, 1969.

[10] *Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Volenec V.* Recent advances in geometric inequalities. Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publishers, 1989.

[11] Задачник «Кванта» по математике. `http://www.kvant.info/zkm_main.htm`

Михаил Александрович Горелов, ВЦ ФИЦ ИУ РАН

`griefer@ccas.ru`