Как быстро вычислить сумму углов многоугольника?

И. Х. Сабитов

Эту статью можно считать продолжением нашей работы [1]. Напомним вкратце её содержание.

Ориентированным многоугольником мы называем замкнутую ломаную с указанием направления её обхода (допускаются самопересечения). Вершины многоугольника нумеруются последовательно по его обходу, начиная с произвольной вершины. Для данного направления обхода многоугольника P при каждой его вершине M_i определяется *внутренний угол* по следующему соглашению: внутренним называется тот угол при вершине, который остаётся слева при обходе многоугольника; его величина α_i обычно измеряется в радианах и она всегда положительна и меньше 2π (это значит, что никакая сторона многоугольника не может идти назад по предыдущей стороне).

Для многоугольника вводится также понятие его *индекса*. Определяется он так: в каждый угол вписывается круговая дуга γ_i достаточно малого радиуса, и таким образом многоугольник превращается в некоторую гладкую кривую L, состоящую из прямолинейных отрезков и гладко сопряжённых с ними круговых дуг; затем единичные касательные к L векторы, идущие по направлению обхода, откладываются все параллельно себе из некоторой точки O плоскости, так что их концы N описывают окружность Γ радиуса единица. При обходе кривой L ориентированный угол θ между радиусом ON и некоторым фиксированным направлением, изменяясь непрерывно, при окончательном возвращении радиуса в исходное положение получает некоторое приращение $\Delta\theta$, кратное 2π. Целое число, равное отношению $\Delta\theta/(2\pi)$, и называется индексом кривой L с обозначением Ind_L. Так как при достаточно малых изменениях радиусов дуг γ_i значение Ind_L не изменяется, оно принимается за значение индекса самого многоугольника P с обозначением Ind_P.

В упомянутой статье для суммы внутренних углов многоугольника с числом сторон n была установлена формула

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi(n - 2\,\mathrm{Ind}_P), \tag{1}$$

позволяющая найти сумму углов, даже не зная их значений, с использованием одного эффективного метода вычисления индекса, пригодного только для многоугольников.

Для вычисления индекса гладкой кривой существует свой способ, использующий информацию о числе и расположении точек её самопересечения, но его доказательство, во-первых, доступно только в журнальном варианте [2] (по крайней мере, нам неизвестно ни одного учебного пособия с таким доказательством), во-вторых, хотя оно и не очень сложное, но фактически требует привлечения новых понятий об особых точках векторного поля на плоскости (которые, например, можно найти в книге [3, гл. 1]). В данной статье мы покажем, что для индекса многоугольника тоже верна формула, аналогичная установленной в [2] для гладких кривых, но наше доказательство, опирающееся на формулу (1), будет вполне элементарно и доступно школьникам, а затем уж повторное использование формулы (1) даст возможность быстрого вычисления суммы углов любого многоугольника.

Рассмотрим этот способ. Возможны два случая: (1) многоугольник не имеет самопересечений и (2) в многоугольнике есть точки самопересечения.

Случай 1. Многоугольник без самопересечений называется *жордановым*, по имени французского математика XIX века К. Жордана. Он доказал, что такой многоугольник P разбивает плоскость на две многоугольные области, для которых многоугольник P является общей границей, причём одна из областей ограниченна (пусть она обозначена как D^+), а другая неограниченна (с обозначением D^-). Доказательство этой теоремы можно найти, например, в главе V книги [4], а как наглядные примеры можно рассмотреть треугольник, или параллелограмм, или любой правильный многоугольник: все они ограничивают две области — внутренность и внешность, из которых одна ограниченна, другая простирается неограниченно. Примем эту теорему как известную и продолжим рассмотрение нашего вопроса об индексе жорданова многоугольника. Нетрудно доказать, что ограниченная многоугольная область D с жордановой границей допускает *триангуляцию*, т. е. разбиение на треугольные области, расположенные с соблюдением следующих условий: (1) всякие два треугольника (имеются в виду не «проволочные», а плоские треугольники) имеют или общую вершину, или общую сторону, или вообще не пересекаются; (2) все вершины границы входят в число вершин треугольников; (3) объединение всех треугольников совпадает со всей областью D, т. е., в частности, в этих треугольниках нет ни одной точки, не принадлежащей области D (доказательство существования триангуляции для любой данной жордановой многоугольной области проводится индукцией по числу вершин или сторон

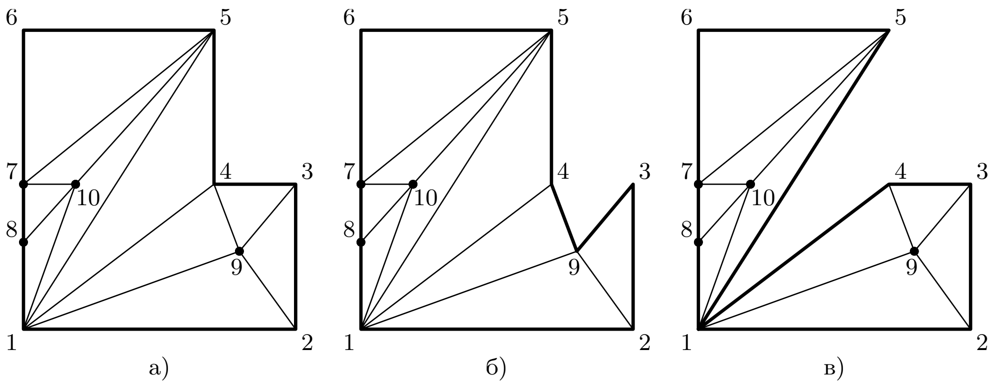

Рис. 1

её жордановой границы — проведите это доказательство самостоятельно). Обратим внимание, что при построении триангуляции на границе области, кроме уже имеющихся вершин, могут появиться и новые вершины.

Далее, для любой триангуляции жордановой многоугольной области верна следующая формула Эйлера:

$$N - E + T = 1, \tag{2}$$

где N — число вершин треугольников, E — число сторон треугольников, T — число треугольников триангуляции. Докажем эту формулу индукцией по числу треугольников. База индукции очевидна: для треугольной области $N = 3$, $E = 3$, $T = 1$ и $N - E + T = 1$. Пусть формула верна для многоугольников с триангуляцией из $T = n \geqslant 1$ треугольников. В этой триангуляции обязательно есть треугольники, у которых одна или две стороны лежат на границе области. Пусть есть треугольник $\Delta_{5,6,7}$ с двумя сторонами на границе (рис. 1а). Третья его сторона должна лежать внутри области. Когда мы уберём этот треугольник, оставив только его третью сторону вместе с её концевыми вершинами, получим новый жорданов многоугольник D_1, составленный из $T_1 = n - 1$ треугольников исходной триангуляции. Но в этом случае по индукционному предположению формула (2) верна, т. е. $N_1 - E_1 + T_1 = 1$. Однако мы знаем, что $T_1 = T - 1$, $E_1 = E - 2$, $N_1 = N - 1$, значит, $N - E + T = 1$, что и утверждалось.

Пусть теперь не знаем, есть ли треугольник, две стороны которого лежат на границе области. Тогда обязательно есть некоторый треугольник Δ, одна сторона которого лежит на границе, а две стороны, обозначим их L_1 и L_2, лежат внутри области. Удалим этот треугольник вместе со стороной, лежащей на границе, оставив, однако её концевые вершины. Тогда возможны два варианта: (1) ни одна из сторон L_1 и L_2 не является диагональю (например, треугольник $\Delta_{3,4,9}$ на рис. 1а); (2) обе эти стороны являются диагоналями, т. е. третья вершина треугольника Δ находится на границе области (например, треугольник $\Delta_{1,4,5}$ на рис. 1а). В первом случае после удаления треугольника Δ получится новая жорданова многоугольная область с триангуляцией из $T_1 = T - 1$ треугольников с $E_1 = E - 1$ сторонами и $N_1 = N$ вершинами (рис. 1б). Снова индукционное предположение приводит к требуемому равенству (2). Во втором случае область D распадётся на две триангулированные области с N_i вершинами, E_i сторонами и $T_i < n$ $(i = 1, 2)$ треугольниками (рис. 1в). По предположению индукции

$$N_1 - E_1 + T_1 = 1, \quad N_2 - E_2 + T_2 = 1,$$
$$N_1 + N_2 - 1 = N, \quad E_1 + E_2 + 1 = E, \quad T_1 + T_2 = T - 1,$$

откуда и получаем формулу (2).

Замечание. На самом деле, формула (2) верна и в более общем случае. Пусть многоугольная область D с жордановой границей разбита на конечное число не пересекающихся своими внутренностями многоугольных областей, примыкающих друг к другу по целой стороне или в вершинах. Тогда для числа Г этих областей, числа В их вершин и числа Р их рёбер верна такая же формула В − Р + Г = 0. Далее, уберём из внутренности D некоторую жорданову многоугольную область D_0; получим двусвязную область D_1, граница которой состоит из двух непересекающихся жордановых многоугольников. Разобьём эту область на непересекающиеся своими внутренностями многоугольники. Тогда для числа этих многоугольников, их вершин и их рёбер получим равенство В − Р + Г = 0. Действительно, добавив к новому разбиению удалённый многоугольник, получим разбиение исходной многоугольной области, для которой в формуле Эйлера справа стоит 1. А для разбиения области D_1 мы имеем то же количество рёбер и вершин, но число граней на одну меньше, т. е. справа будет 0.

Задача 1. Пусть из внутренности жордановой многоугольной области удалили $k > 1$ жордановых многоугольных областей, лежащих каждая вне остальных. Получим $(k+1)$-связную область D_k, граница которой состоит из $k+1$ многоугольников (включая исходный). Пусть область D_k разбита на многоугольники. Какой вид в этом случае будет иметь формула Эйлера?

Теперь с использованием формулы Эйлера мы вычислим сумму углов жорданова многоугольника, а отсюда уже получим, что индекс жорданова многоугольника равен $+1$ (если его внутренняя область остаётся слева от направления обхода).

Итак, пусть нам дан n-угольник P без самопересечений, и пусть область D — внутренность этого многоугольника — разбита на T треугольников (рис. 1а). Пусть $n_{\text{вн}}$ вершин этих треугольников расположены внутри области D, а на границе, кроме n вершин самого многоугольника, имеется ещё $n_{\text{гр}}$ вершин. Тогда число E всех сторон треугольников триангуляции равно сумме $n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}$, где $E_{\text{вн}}$ — число рёбер внутри D (на рис. 1а имеем $n = 6$, $n_{\text{гр}} = 2$, $n_{\text{вн}} = 2$, $E_{\text{вн}} = 10$, $T = 10$). Сумма углов всех треугольников равна πT, и она складывается из $2\pi n_{\text{вн}}$ — суммы углов при внутренних вершинах, $\pi n_{\text{гр}}$ — суммы углов при добавленных вершинах на границе, и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ — суммы внутренних углов при вершинах многоугольника. Поэтому, с учётом формулы Эйлера (2) и значений $N = n + n_{\text{гр}} + n_{\text{вн}}$ и $E = n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi(T - 2n_{\text{вн}} - n_{\text{гр}}) = \pi(1 - 3n_{\text{вн}} + E_{\text{вн}} - n_{\text{гр}}). \tag{3}$$

Теперь вычислим число сторон по-другому. В T треугольниках имеется $3T$ сторон, но каждая сторона внутри области считается два раза, так как к ней примыкают два треугольника. Поэтому $3T = n + n_{\text{гр}} + 2E_{\text{вн}}$. Подставим это значение T в (2) и получим

$$3(n + n_{\text{гр}} + n_{\text{вн}}) - 3(n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}) + (n + n_{\text{гр}} + 2E_{\text{вн}}) = 3,$$

откуда $E_{\text{вн}} = 3n_{\text{вн}} + n + n_{\text{гр}} - 3$. Теперь из (3) получаем $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \pi(n-2)$, что вместе с (1) даёт искомое равенство $\mathrm{Ind}_P = 1$.

Задача 2. Пусть жорданов многоугольник обходится в противоположном направлении, т. е. его внутренность остаётся справа. Получите рассуждениями, аналогичными вышепроведённым, что его индекс равен -1.

Случай 2. Пусть многоугольник с данной ориентацией (т. е. с данным направлением обхода) имеет конечное число точек самопересечения. Будем предполагать, что в каждой из них пересекаются только две стороны, так что, в частности, точки самопересечения не являются вершинами многоугольника и пересечение сторон происходит в их внутренней точке. Такие многоугольники будем называть *нормальными.* Для задачи вычисления индекса или суммы углов это ограничение несущественно, так как любой «ненормальный» многоугольник с самопересечениями может быть приведён к нормальному виду сколь угодно малым смещением вершин (с возможным изменением количества точек самопересечения [1)]), а при этом сумма углов многоугольника и его индекс не изменятся. Действительно, при малом изменении положений вершин, а значит, и положений сторон,

[1)] Приведите примеры смещений вершин, при которых происходит увеличение, уменьшение или сохранение количества точек самопересечения.

углы изменятся на малую величину, а сумма углов всегда кратна 2π и при малом изменении углов она может изменяться только на малую величину, оставаясь кратной 2π. Следовательно, коэффициент кратности должен оставаться постоянным, иначе изменение будет не меньше чем на 2π. (Это очень важное свойство дискретнозначных функций: если функция может принимать только дискретное множество значений и непрерывна на связном множестве, то она на нём постоянна. В нашем случае индекс многоугольника является согласно формуле (1) непрерывной функцией углов α_i, определённой в n-мерном открытом кубе, заданном условиями $0 < \alpha_i < 2\pi$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Значит, при достаточно малом изменении значений этих углов индекс остаётся постоянным.)

Далее, найдём такую прямую L, чтобы весь многоугольник располагался по одну сторону от неё, имея на самой прямой одну или несколько вершин и сторон. Такая прямая, называемая *опорной* к многоугольнику, строится следующим способом: берём любую прямую, не пересекающуюся с многоугольником, и сдвигаем её параллельно самой себе в сторону многоугольника до первой встречи с многоугольником. Это первое пересечение произойдёт или только в одной вершине многоугольника (тогда полученная прямая называется *строго опорной*), или в нескольких вершинах, или по одной или нескольким сторонам, или в комбинации «несколько вершин и несколько сторон» (нарисуйте для каждой возможности соответствующий рисунок). Если есть вершина, лежащая на опорной прямой, а выходящие из неё стороны составляют с прямой ненулевой угол, то эта прямая называется *локально строго опорной* в этой вершине (таким образом, опорная к многоугольнику прямая является локально строго опорной в каждой отдельно лежащей на ней вершине, а если есть сторона, лежащая на опорной прямой, то в её точках эта опорная прямая не является локально строго опорной).

Задача 3. (1) Докажите, что для всякого многоугольника существует строго опорная к нему прямая. (2) Приведите пример вершины, через которую не проходит ни одна опорная прямая. (3) Приведите пример вершины, через которую проходит единственная опорная прямая.

Пусть опорная прямая L построена. Ради технического упрощения предположим, что на ней есть отдельно лежащая вершина, так что в ней прямая L является локально строго опорной. Начнём с неё обход многоугольника, и пусть вершины получили обозначения $M_1, M_2, \ldots, M_n$ при данном направлении обхода. Выберем точку M_1 началом координат. За ось Ox примем опорную прямую и выберем на ней положительное направление так, чтобы многоугольник оставался от неё слева при движении в этом направлении, а ось Oy направим в сторону расположения многоугольника, так что кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy будет против часовой стрелки. Каждой стороне многоугольника приписываем номер, совпадающий с номером её начальной точки при данном обходе многоугольника. Каждую точку самопересечения считаем началом двух векторов — первый вектор идёт по направлению первой пришедшей к этой точке стороны, а второй — по направлению обхода другой стороны. Эти два вектора не параллельны, так что наименьший геометрический угол между ними всегда меньше π. Если этот наименьший угол описывается вращением от первого вектора ко второму *по* часовой стрелке, тогда мы этой точке самопересечения приписываем знак (+), а в противном случае — знак (−). Назовём это условие *правилом выбора знака.* Пусть при таком правиле расстановки знаков оказалось, что есть N^+ точек самопересечения со знаком (+) и N^- точек со знаком (−). Тогда утверждается, что *индекс многоугольника равен*

$$\mu + (N^+ - N^-), \quad \mu = \pm 1, \tag{4}$$

где $\mu = +1$*, если в вершине с номером 1 вращение от продолжения стороны* M_nM_1 *к стороне* M_1M_2 *идёт против часовой стрелки, и* $\mu = -1$ *в противном случае.* В частности, если точек самопересечения нет (т. е. многоугольник жорданов), то $N^+ = N^- = 0$ и $\mathrm{Ind}_P = \pm 1$ в соответствии с ориентацией жорданова многоугольника (заметьте, что зависимости от числа сторон многоугольника нет).

Доказательство этого утверждения проведём индукцией по числу точек самопересечения. Формально база индукции уже есть: если число точек самопересечения равно нулю, то формула верна (см. случай 1). Для большей ясности изложения сначала выполним индукционный переход при наличии только одного самопересечения.

Итак, пусть нам даны многоугольники P_0 с одним самопересечением, как на рис. 2а и 3а.

Поступаем следующим образом: отправляемся от вершины M_1 в направлении обхода (в нашем примере — по стороне M_1M_2) и отмечаем, когда мы впервые пересекаем сторону, которую уже прошли. Пусть мы впервые вернулись к уже пройденной стороне в некоторой точке M_0, которая в первый раз лежала на стороне M_iM_{i+1}, а во второй раз на стороне M_jM_{j+1} (в нашем случае мы проходим стороны M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5 без возвращения к пройденным сторонам и первый раз возвращаемся к уже пройденной стороне M_2M_3, когда идём по стороне M_5M_6). Участок многоугольника от точки M_0 до M_{i+1} и далее до M_j и по отрезку $M_jM_0 \in M_jM_{j+1}$ представляет собой жорданов $(j - i + 2)$-угольник. На рис. 2а и 3а около точки M_0 вектором со знаком (1) отмечены первые направления прихода, а вектором со знаком (2) — вторые. Видим, что

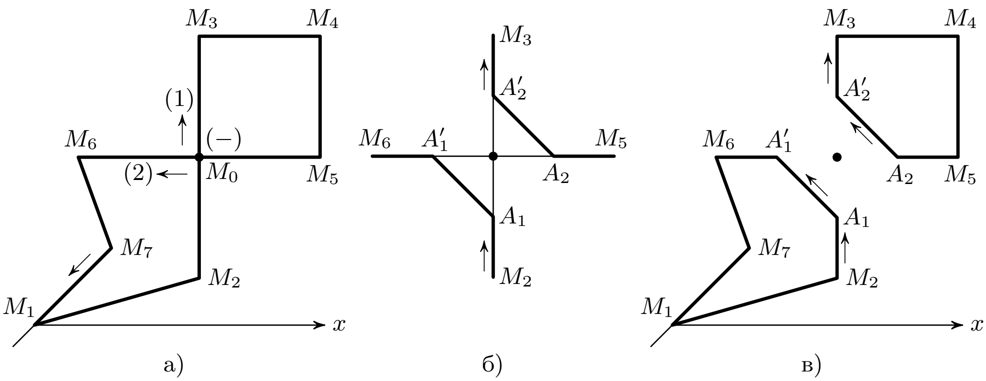

Рис. 2

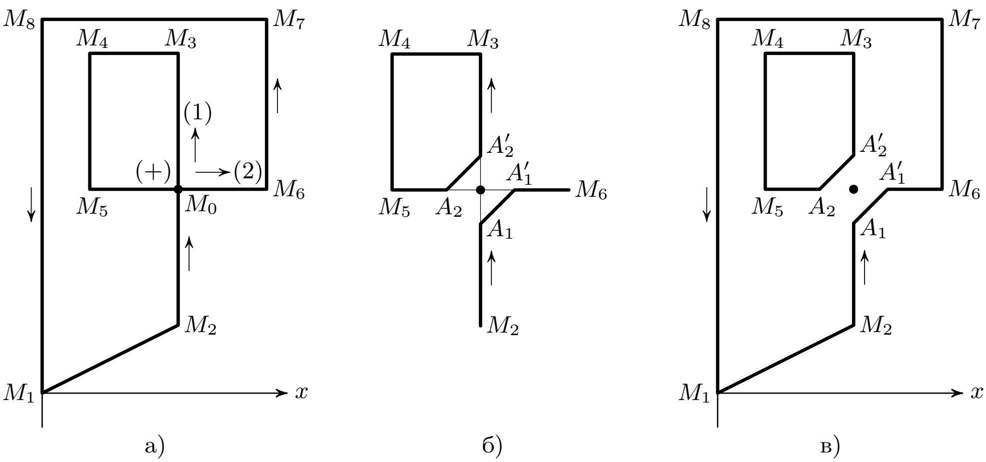

Рис. 3

в первом случае кратчайшее вращение от первого вектора к второму идёт против часовой стрелки, и поэтому согласно условию доказываемого утверждения мы должны поставить в точке M_0 знак $(-)$, что на рис. 2а и сделано. А на рис. 3а такое же вращение идёт по часовой стрелке, и поэтому там поставлен знак $(+)$. Отметим (см. рис. 2б и 3б) на отрезках M_0M_i, M_0M_{j+1}, M_0M_{i+1}, M_0M_j на достаточно малом равном расстоянии d от M_0 соответственно точки A_1, A_1', A_2', A_2 (с условием, чтобы на этих отрезках не было новых точек самопересечения многоугольника) и заменим участок $A_1M_0A_1'$ отрезком A_1A_1', обходимым от A_1 к A_1'. Аналогично заменим участок $A_2M_0A_2'$ отрезком A_2A_2' с обходом от A_2 к A_2'.

Тогда исходный многоугольник распадётся на два многоугольника P_1: $A_2A_2'M_{i+1}\ldots M_jA_2$ и P_2: $M_1\ldots A_1A_1'M_{j+1}\ldots M_nM_1$, все стороны которых обходятся ровно в тех же направлениях, как и на исходном многоугольнике P_0, поэтому внутренние углы этих многоугольников при всех вершинах M_k будут те же самые, что и в P_0. При этом первый многоугольник P_1 будет по его построению жордановым (ни одна его сторона не встречается с предыдущими и последующими его же сторонами, кроме встречи стороны M_jA_2 со стороной A_2A_2' в их общей вершине A_2, где многоугольник P_1 и замыкается). Важно также отметить, что участок исходного многоугольника от вершины M_1 до точки M_0 является жордановой дугой (т. е. без самопересечений), к тому же без пересечения и с многоугольником P_1.

Всякий «проволочный» жорданов многоугольник является общей границей двух областей — ограниченной и неограниченной, и точки из одной области характеризуются тем, что их можно соединить ломаной, не пересекающей границу области, а никакие две точки из разных областей нельзя соединить без пересечения границы. Этот признак позволяет установить, что в нашем случае точки, лежащие вблизи отрезка A_2A_2' по ту сторону, где нет точки M_0, принадлежат ограниченной (внутренней) многоугольной области. Действительно, точку M_0 можно соединить с начальной вершиной M_1, не пересекая многоугольник P_1, а именно, идя по жордановой дуге $M_0M_iM_{i-1}\dots M_2M_1$, а точка M_1 соединяется со всеми точками полуплоскости $y<0$, поэтому точка M_0 принадлежит внешней по отношению к P_1 области. Следовательно, точки, лежащие вблизи отрезка A_2A_2' с противоположной стороны от M_0, находятся во внутренности жорданова многоугольника P_1, и обход этого многоугольника в направлении от A_2 к M_{i+1} есть обход вокруг границы жордановой многоугольной области. Тогда индекс многоугольника, соответствующий этому обходу, как мы установили выше, равен ±1, а именно, $+1$, если область остаётся слева, и -1, если область остаётся справа.

Ситуация на рис. 2б соответствует случаю, когда кратчайший поворот от приходящего первым направления к приходящему вторым происходит против часовой стрелки, и по правилу выбора знака мы в этой точке имеем $N^-=1$. С другой стороны, обход жорданова многоугольника P_1 по направлению от A_2 к A_2' оставляет эту область справа, значит, $\mathrm{Ind}_{P_1}=-1$. Тогда сумма внутренних углов многоугольника P_1 равна

$$\Sigma_1+\alpha_1+\alpha_2=\pi(j-i+2-2\,\mathrm{Ind}_{P_1})=\pi(j-i+4),$$

где Σ_1 — сумма внутренних углов при вершинах $M_{i+1},\dots,M_j$, а α_1 и α_2 — внутренние углы при вершинах A_2 и A_2', каждый равный $\pi+\gamma$, где γ — геометрическая величина углов $M_0A_2A_2'$ и $M_0A_2'A_2$ (в нашем примере $i=2$, $j=5$ и $\gamma=\pi/4$).

Оставшаяся часть многоугольника образует новый многоугольник P_2, см. рис. 2в (в нашем случае он тоже жорданов, так как точка самопересечения была только одна). В его вершине M_1 значение μ такое же, как у исходного многоугольника, поэтому $\operatorname{Ind}_{P_2} = \mu$.

Число сторон нового многоугольника равно $n+2+i-j$. Следовательно, сумма его углов равна $\Sigma_2 + \beta_1 + \beta_2 = \pi(n + 2 + i - j - 2\mu)$, где через Σ_2 обозначена сумма углов при вершинах M_k, а β_1 и β_2 — углы при вершинах A_1 и A_1', каждый равный $\pi - \delta$, где δ — геометрическая величина углов $M_0A_1A_1'$ и $M_0A_1'A_1$ (в нашем примере $n = 7$ и $\delta = \pi/4$). Сложив эти уравнения и учитывая, что значения γ и δ равны (так как четырёхугольник $A_1A_1'A_2'A_2$ — всегда прямоугольник), получим, что сумма всех углов при вершинах многоугольника P_0 равна

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = -4\pi + \pi(n + 6 - 2\mu) = \pi(n - 2\operatorname{Ind}_{P_0}),$$

откуда

$$\operatorname{Ind}_{P_0} = \mu - 1.$$

Это полностью соответствует утверждаемой формуле (4), так как $N^+ = 0$, $N^- = 1$ (в нашем примере $\mu = 1$, так как кратчайшее вращение от продолжения последней стороны M_7M_1 в сторону оси Ox идёт против часовой стрелки, и можем проверить полученную формулу непосредственным вычислением суммы углов данного на рис. 2в многоугольника).

Пример на рис. 3в рассматривается аналогично. Существенно только то, что на этот раз обход жорданового многоугольника $A_2A_2'M_{i+1}\ldots M_jA_2$ оставляет область слева, и поэтому его индекс равен $+1$, а расположение первого и второго направлений, приходящих в точку самопересечения, даёт значения $N^+ = 1$, $N^- = 0$ (что отображено на рис. 3а). В итоге получаем формулу

$$\operatorname{Ind}_{P_0} = \mu + 1,$$

снова в полном соответствии с формулой (4). Заметим, что значения участвующих в этих вычислениях углов α_1, α_2, β_1, β_2 могут меняться, но главное то, что их сумма всегда равна 4π. Отметим также для дальнейшего, что обход «проволочного» жорданова многоугольника $A_2A_2'M_{i+1}\ldots M_jA_2$ оставляет этот плоский многоугольник справа, если знак при точке самопересечения M_0 отрицательный, и слева, если знак при M_0 положительный. Действительно, на участке $M_jA_2A_2'M_{i+1}$ происходит поворот от второго пришедшего в M_0 направления к первому. При знаке $(+)$ этот поворот происходит против часовой стрелки, поэтому жорданов многоугольник оказывается слева, и аналогично при знаке $(-)$ он оказывается справа.

Теперь на примере рис. 4а рассмотрим случай наличия нескольких точек самопересечения.

Чтобы не загромождать рисунки множеством обозначений вершин многоугольника как точек M_i, мы поставили только номера этих точек, но в тексте

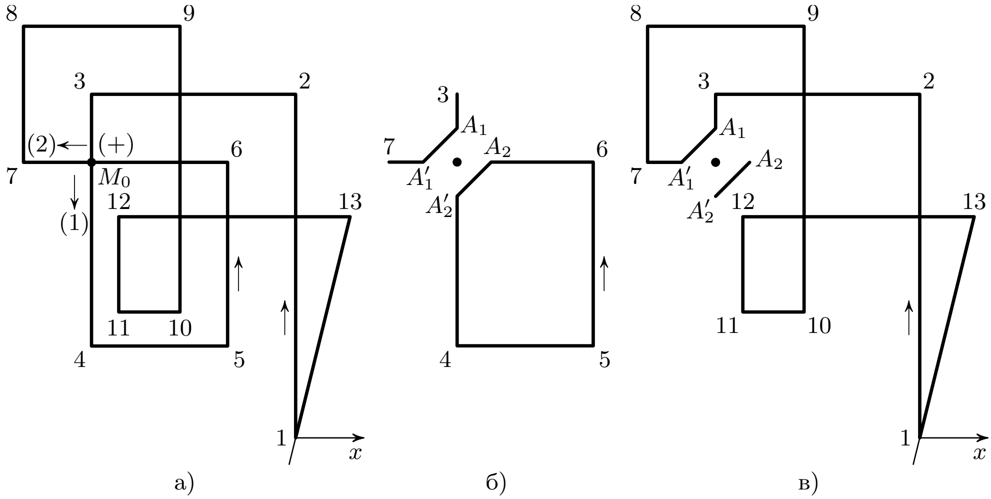

Рис. 4

будем использовать обозначения M_i. Пусть при обходе многоугольника в направлении от вершины M_1 к вершине M_2 движущаяся точка впервые возвращается к пройденному положению при пересечении сторон с начальными вершинами M_i и M_j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $j - i \geqslant 2$; в нашем примере $i = 3$, $j = 6$ (напомним, номер стороны совпадает с номером её начальной вершины при обходе). Обозначим эту точку как M_0 и выберем на отрезках M_iM_0, M_0M_{i+1}, M_jM_0, M_0M_{j+1} соответственно точки A_1, A_2', A_2, A_1' на некотором равном расстоянии d от точки M_0, достаточно малом, чтобы между ними и точкой M_0 не было точек самопересечения многоугольника (но дальше d на этих отрезках точки самопересечения могут быть — например, у нас на рисунке на отрезке M_6A_2 есть точка его пересечения со стороной M_9M_{10}). Уберём отрезки A_1A_2' и A_2A_1', но добавим новые стороны A_1A_1' и A_2A_2'. Получим два отдельных многоугольника P_1: $A_2A_2'M_{i+1} \ldots M_jM_2$ и P_2: $M_1 \ldots M_iA_1A_1'M_{j+1} \ldots M_nM_1$ (у нас они изображены соответственно на рис. 4б и рис. 4в). Стороны этих многоугольников обходятся в таком же направлении, как в исходном многоугольнике, поэтому внутренние углы при всех вершинах M_k остаются теми же, что и в исходном многоугольнике. Многоугольник P_1 по построению жорданов. Как было показано выше, если точке M_0 приписан по указанному выше правилу знак $+$, то обход многоугольника P_1 будет в положительном направлении (т. е. ограниченная им область остаётся слева) и его индекс равен $+1$.

Дальнейшие рассуждения проводятся по такой схеме: сумма углов в жордановом многоугольнике P_1 аналогично вышепроведённому рассуждению вычисляется по формуле $\Sigma_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi(j - i + 2 - 2\,\mathrm{Ind}_{P_1})$, где через Σ_1 обозначена сумма углов многоугольника P_1 при вершинах

$M_{i+1}, \ldots, M_j$, а α_1 и α_2 — углы при вершинах A_2 и A'_2, каждый равный $\pi - \gamma$, где γ — геометрическая величина углов $\angle M_0 A_2 A'_2$ и $\angle M_0 A'_2 A_2$ (в нашем примере $n = 13$, $i = 3$, $j = 6$, $\operatorname{Ind}_{P_1} = 1$ и $\gamma = \pi/4$). Индекс многоугольника P_2 по индукционному предположению равен $\mu + N_2^+ - N_2^-$, где N_2^+ и N_2^- — соответственно число плюсов и минусов в точках самопересечения, оставшихся в многоугольнике P_2. Значит, сумма внутренних углов при его вершинах равна $\Sigma_1 + \beta_1 + \beta_2 = \pi(n+2+i-j-2\mu-2N_2^+ + 2N_2^-)$. Сложив эти две суммы и учитывая вышеприведённое равенство $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 4\pi$, получим общую сумму внутренних углов исходного многоугольника P_0:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \pi(n - 2\mu - 2\operatorname{Ind}_{P_1} - 2(N_2^+ - N_2^-)). \tag{5}$$

Теперь заметим, что число точек самопересечения в многоугольнике P_2, вообще говоря, меньше, чем в исходном многоугольнике P_0 (в нашем примере на рис. 4в при переходе к многоугольнику P_2 «исчезли» пересечения сторон M_6M_7 с M_9M_{10} и M_5M_6 с $M_{12}M_{13}$). Поскольку в построении многоугольника P_2 не участвуют стороны жорданова многоугольника P_1, то исчезают именно пересечения с ними. Участок $M_1M_2 \ldots M_iA_1$ многоугольника P_2 не пересекается с P_1, иначе точка M_0 не была бы *первой* точкой самопересечения при движении от начальной вершины M_1, значит, «исчезающие» точки самопересечения получаются при пересечении жорданова многоугольника P_1 с ломаной $A'_1M_{j+1} \ldots M_nM_1$. Но эта ломаная начинается и заканчивается во внешности жорданова многоугольника, значит, у неё должно быть чётное число пересечений с ним, с одинаковым числом точек входа вовнутрь многоугольника и выхода из него. В точках входа и выхода знаки, которые мы договорились расставлять в точках самопересечения, должны быть противоположными. Действительно, первым направлением всегда будет направление стороны жорданового многоугольника (она имеет меньший номер), а вторым — направление вектора, идущего соответственно внутрь или вовне этого многоугольника и потому дающего противоположные знаки этой паре направлений. Пусть будет N_1^+ точек со знаком $(+)$ и $N_1^- = N_1^+$ точек со знаком $(-)$. Тогда всего будет $N_1^+ + N_2^+$ вершин со знаком $(+)$ и $N_1^- + N_2^- = N_1^+ + N_2^-$ вершин со знаком $(-)$, и ещё вершина M_0, знак ± 1 при которой совпадает с Ind_{P_1}. В итоге формулу (5) можно переписать следующим образом:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \pi(n - 2\mu - 2(N^+ - N^-)), \tag{6}$$

так как если $\operatorname{Ind}_{P_1} = 1$, то при M_0 должен быть знак $(+)$, значит,

$$\operatorname{Ind}_{P_1} + N_1^+ + N_2^+ = N^+;$$

если же $\operatorname{Ind}_{P_1} = -1$, то при M_0 должен быть знак $(-)$, значит,

$$N^- = 1 + N_1^- + N_2^- \quad \text{и} \quad -\operatorname{Ind}_{P_1} + N_1^- + N_2^- = N^-.$$

Вспоминая равенство (1), связывающее сумму углов многоугольника с его индексом, получаем требуемую формулу (4) для индекса. Таким образом, формула (6) является конкретизацией формулы (1) и позволяет легко вычислить сумму углов многоугольника.

Задача 4. Вычислите индексы многоугольников в рассмотренных примерах для случая их обхода в противоположном направлении, т. е. в направлении от M_1 к M_n.

Замечание. Конечно, формулу (4) можно обобщить на случай, когда пересечения сторон многоугольника происходят более сложным образом (см. введённое на с. 118 понятие нормального многоугольника). Легче всего это сделать в случае, когда допускаются пересечения в вершинах (сторона проходит через «чужую» вершину или даже в одной вершине встречаются четыре стороны). Используя работу [5], вопрос о быстром вычислении индекса и суммы углов можно надеяться решить и для многоугольников на плоскости Лобачевского.

Список литературы

[1] *Сабитов И. Х.* Чему равна сумма углов многоугольника? // Квант. 2001. № 3. С. 7–12.

[2] *Whitney H.* On regular closed curves in the plane // Comp. Math. 1937. Vol. 4, № 2. P. 276–284.

[3] *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.

[4] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2017.

[5] *Сабитов И. Х.* Об одном методе вычисления объёмов тел // Сибирские электрон. матем. изв. 2013. Т. 10. С. 615–626.

Иджад Хакович Сабитов, мехмат МГУ

isabitov@mail.ru